文章编号: 1001-0920(2007)11-1302-03

具有反馈增益不确定的 Delta 算子系统 H∞控制

林瑞全, 杨富文
(福州大学 电气工程与自动化学院, 福州 350002)

摘 要: 基于线性矩阵不等式(LMI)方法,研究 Delta 算子系统状态反馈增益具有加性不确定时的 H_∞非脆弱控制器的设计问题. 给出既能保证闭环 Delta 算子系统稳定,又有一定 H_∞性能的充分必要条件,利用相关引理把该充分必要条件转化为 LMI 形式. 数值算例表明,所提出的设计方法是有效的.

关键词: Delta 算子; H_∞控制; 非脆弱控制; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

H∞ control for Delta operator systems with feedback gain uncertainty

LIN Rui-quan, YANG Fu-wen
(College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China. Correspondent: LIN Rui-quan, E-mail: fudalrq@163.com)

Abstract: Based on LMI, a design method of H_∞ non-fragile controller for Delta operator systems which feedback gain is additive uncertain is introduced. A sufficient and necessary condition is given such that the resulted closed-loop Delta operator systems are stable and of certain H_∞ performance. The certain lemma is used to translate the resulted sufficient and necessary condition into linear matrix inequality form. A numerical example shows the effectiveness of the design procedures.

Key words: Delta operator; H_∞ control; Non-fragile control; LMI

1 引 言

Delta 算子理论是使连续系统理论与离散系统理论成为统一的理论体系. 近几年来,一些学者对基于 Delta 算子理论的系统控制问题进行研究[1-3],但均未考虑控制器参数发生摄动的情况,也就是没有对控制器的非脆弱性问题进行研究. 实际上,控制器在实现时其参数的摄动是不可避免的[4].

Keel 和 Bhattacharyya[5]通过实例指出,传统的最优鲁棒控制器设计方法,当控制器的参数发生极微小的偏移时,会出现闭环系统的性能下降,甚至导致闭环系统失去稳定性,也就是说该控制器是脆弱的. 目前,国内外一些学者对非脆弱控制问题进行研究[4-7],但并没有针对 Delta 算子系统进行非脆弱控制的研究. 为此,本文研究 Delta 算子系统状态反馈控制器参数具有加性摄动时的 H_∞控制问题.

2 问题描述

考虑由以下方程描述的一类 Delta 算子系统[1]:

$$\begin{cases} \delta x(k) = A_\delta x(k) + B_{\delta 1} w(k) + B_{\delta 2} u(k), \\ z(k) = C_1 x(k) + D_1 w(k) + D_2 u(k), \\ A_\delta = (A_z - I)/T, B_{\delta 1} = B_{z1}/T, B_{\delta 2} = B_{z2}/T, \\ \delta x(k) = (x(k+1) - x(k))/T. \end{cases} \tag{1}$$

其中: I 为单位阵; A_z, B_{z1}, B_{z2} 为 Z 域离散系统模型相应的系数矩阵; C_1, D_1, D_2 与 Z 域离散系统模型的系数相同; T 为系统的采样时间; $x(k) \in R^n$ 为系统状态向量; $u(k) \in R^m$ 为控制输入向量; $w(k) \in R^q$ 为干扰输入且 $w(k) \in L_2[0, \infty)$; $z(k) \in R^p$ 为系统受控输出.

定义 1 对于 Delta 算子系统(1) 和给定的参数 γ,如果存在一个状态反馈控制律

$$u(k) = (K + \Delta K) x(k), \tag{2}$$

其中: K 为所设计的控制器参数, ΔK 为控制器参数变化,它具有加性范数有界形式,即

收稿日期: 2006-07-01; **修回日期**: 2006-08-31.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60474049); 福建省教育厅基金项目(JB04217).
作者简介: 林瑞全(1971 —),男,福建莆田人,副教授,博士,从事非脆弱控制、Delta 算子系统等研究; 杨富文(1963 —),男,福建仙游人,教授,博士生导师,从事非脆弱控制、鲁棒控制等研究.

$$\Delta K = HFE. \tag{3}$$

其中: H 和 E 分别为具有合适维数的已知实矩阵, F 为 Lebesgue 可测且满足 $F^{\mathrm{T}}F \le I$. 使得闭环系统

$$\begin{cases} \delta x(k) = A_{\delta k}x(k) + B_{\delta 1}w(k), \\ z(k) = C_k x(k) + D_1 w(k). \end{cases} \tag{4}$$

对于所有满足 $F^{\mathrm{T}}F \le I$ 的 F 渐近稳定, 且满足 $\|Z\|_2 < \gamma\|W\|_2$, 则称参数 K 为该 Delta 算子系统的 H_∞ 非脆弱控制器参数.

式(4)中, $A_{\delta k}$ 和 C_k 分别为

$$\begin{cases} A_{\delta k} = A_\delta + B_{\delta 2}(K + \Delta K), \\ C_k = C_1 + D_2(K + \Delta K). \end{cases} \tag{5}$$

3 Delta 算子系统的 H_∞ 非脆弱控制

定理 1　对于系统(1)和给定的常数 $\gamma > 0$, 满足 $D_1^{\mathrm{T}}D_1 - \gamma^2 I < 0$, 采用非脆弱状态反馈控制律(2)得到的 Delta 算子闭环系统(4)渐近稳定, 且有一个 H_∞ 范数界 γ, 其充分必要条件是存在常数 $\lambda > 0$, 正定对称矩阵 X 及矩阵 Q, 使得下列矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} A_\delta X + B_{\delta 2}Q + XA_\delta^{\mathrm{T}} + Q^{\mathrm{T}}B_{\delta 2}^{\mathrm{T}} & B_{\delta 1} & \sqrt{T}XA_\delta^{\mathrm{T}} + \sqrt{T}Q^{\mathrm{T}}B_{\delta 2}^{\mathrm{T}} & XC_1^{\mathrm{T}} + Q^{\mathrm{T}}D_2^{\mathrm{T}} & \lambda B_{\delta 2}H & XE^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 & \sqrt{T}B_{\delta 1}^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -X & 0 & \sqrt{T}\lambda B_{\delta 2}H & 0 \\ * & * & * & -I & \lambda D_2 H & 0 \\ * & * & * & * & -\lambda I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

式中 $*$ 代表对称转置. 此时, 所设计的非脆弱状态反馈控制律(2)中的参数 $K = QX^{-1}$.

为方便定理的证明, 先给出如下引理:

引理 1[8]　取 M, H, E 为合适维数的实矩阵, 且 $M = M^{\mathrm{T}}$, 则以下条件等价:

$$M + H\Delta E + E^{\mathrm{T}}\Delta^{\mathrm{T}}H^{\mathrm{T}} < 0, \tag{7}$$

其中 $\Delta = FF^{\mathrm{T}} \le I$;

存在常数 $\lambda > 0$, 使得

$$\begin{bmatrix} M & \lambda H & E^{\mathrm{T}} \\ * & -\lambda I & 0 \\ * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0. \tag{8}$$

引理 2[1]　给定一个常数 $\gamma > 0$, 系统(4)渐近稳定且有一个 H_∞ 范数界 γ, 其充分必要条件是存在正定对称矩阵 P, 使得下式成立:

$$\begin{bmatrix} PA_{\delta k} + A_{\delta k}^{\mathrm{T}}P & PB_{\delta 1} & \sqrt{T}A_{\delta k}^{\mathrm{T}} & C_k^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I & \sqrt{T}B_{\delta 1}^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} \\ * & * & -P^{-1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

定理 1 证明　把式(5)的值代入式(9), 可得到

$$\begin{bmatrix} P(A_\delta + B_{\delta 2}(K+\Delta K)) + (A_\delta + B_{\delta 2}(K+\Delta K))^{\mathrm{T}}P & PB_{\delta 1} & \sqrt{T}(A_\delta + B_{\delta 2}(K+\Delta K))^{\mathrm{T}} & (C_1 + D_2(K+\Delta K))^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I & \sqrt{T}B_{\delta 1}^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} \\ * & * & -P^{-1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

即

$$\begin{bmatrix} P(A_\delta + B_{\delta 2}K) + (A_\delta + B_{\delta 2}K)^{\mathrm{T}}P & PB_{\delta 1} & \sqrt{T}(A_\delta + B_{\delta 2}K)^{\mathrm{T}} & (C_1 + D_2K)^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I & \sqrt{T}B_{\delta 2}^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} \\ * & * & -P^{-1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} PB_{\delta 2}\Delta K + (B_{\delta 2}\Delta K)^{\mathrm{T}}P & 0 & \sqrt{T}(B_{\delta 2}\Delta K)^{\mathrm{T}} & (D_2\Delta K)^{\mathrm{T}} \\ * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} < 0. \tag{11}$$

将式(3)代入(11), 并利用引理 1 可得到

$$\begin{bmatrix} P(A_\delta + B_{\delta 2}K) + (A_\delta + B_{\delta 2}K)^{\mathrm{T}}P & PB_{\delta 1} & \sqrt{T}(A_\delta + B_{\delta 2}K)^{\mathrm{T}} & (C_1 + D_2K)^{\mathrm{T}} & \lambda PB_{\delta 2}H & E^{\mathrm{T}} \\ * & -\gamma^2 I & \sqrt{T}B_{\delta 1}^{\mathrm{T}} & D_1^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ * & * & -X & 0 & \sqrt{T}\lambda B_{\delta 2}H & 0 \\ * & * & * & -I & \lambda D_2H & 0 \\ * & * & * & * & -\lambda I & 0 \\ * & * & * & * & * & -\lambda I \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

式(12)两边分别乘以矩阵

$$G = \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & I & 0 \\ * & * & * & * & * & I \end{bmatrix},$$

进行全等变换,并令 $X = P^{-1}, Q = KP^{-1}$. 代入式(12),可得到式(6). □

式(6)是关于 X 与 Q 的LMI方程,此LMI是关于采样周期 T 的显式表达式. 从中可以看出,Delta算子系统的 H_∞ 非脆弱控制器参数与采样周期 T 是相关的,通过解此LMI,可得到不同采样时间下Delta算子系统的非脆弱状态反馈系数 K.

4 实例分析

下面给出一个实例,用于验证上述 H_∞ 非脆弱状态反馈控制器设计方法的有效性.

设有一如式(1)所示的Delta算子系统,其对象参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [1 \quad 1 \quad 1], D_1 = 0.1, D_2 = 1.$$

取 H_∞ 干扰抑制水平 $\gamma = 1$,系统的采样时间 $T = 0.005$,所设计的非脆弱 H_∞ 状态反馈控制器参数摄动为

$$H = [0.3 \quad 0.3], E = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

求解控制器参数 K,并判断系统的稳定性.

利用Matlab LMI Toolbox,对式(6)的LMI进行求解,可得到该Delta算子系统非脆弱 H_∞ 状态反馈控制器参数

$$K = [-1.1009 \quad -1.0002 \quad -1.0405].$$

在实际的状态反馈控制中,采用的控制规律为

$$u(k) = [-1.1009 \quad -1.0002 \quad -1.0405]x(k).$$

此时闭环系统的极点为

$$-1.7847,$$
$$-1.3715 + 0.6297\mathrm{i},$$
$$-1.3715 - 0.6297\mathrm{i}.$$

也就是说,当控制器的参数发生摄动时,所设计的非脆弱 H_∞ 状态反馈控制器仍能保证闭环系统二次稳定,且其干扰抑制水平为1.

5 结 语

本文针对Delta算子系统,基于 H_∞ 性能指标给出了控制器参数存在加性摄动时的非脆弱状态反馈控制器的设计方法,以LMI的形式给出了所设计控制器参数存在的充分必要条件. 控制器的存在性取决于LMIs的可行性解,通过求解LMI方程,可得到Delta算子系统在不同采样时间下的非脆弱 H_∞ 状态反馈控制器参数的解.

参考文献(References)

[1] 李惠光, 吴波, 李国友, 等. Delta算子控制及其鲁棒控制理论基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 2005.
(Li Hui-guang, Wu Bo, Li Guo-you, et al. Basic theory of Delta operator control and its robust control [M]. Beijing: NDIP, 2005.)

[2] 张端金, 杨成梧, 吴捷. Delta算子系统的鲁棒性能分析[J]. 自动化学报, 2000, 26(6): 848-852.
(Zhang Duan-jin, Yang Cheng-wu, Wu Jie. Robust performance analysis of Delta operator systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2000, 26(6): 848-852.)

[3] 张端金, 吴捷, 杨成梧. 反馈控制Delta算子理论的研究与发展[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(5): 732-736.
(Zhang Duan-jin, Wu Jie, Yang Cheng-wu. Robust stabilization and robust H_∞ control for the Delta operator system via state feedback [J]. Control Theory and Applications, 2001, 18(5): 732-736.)

[4] 林瑞全, 杨富文. 基于 H_∞ 控制理论的非脆弱控制的研究[J]. 控制与决策, 2004, 19(5): 598-600.
(Lin Rui-quan, Yang Fu-wen. Non-fragile control based on H_∞ control theory[J]. Control and Decision, 2004, 19(5): 598-600.)

[5] Keel Bhattacharyya. Robust, fragile or optimal [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1098-1105.

[6] Corrado J R, Haddad W M. Static output feedback controllers for systems with parametric uncertainty and controller gain variation[C]. Proc of American Control Conf. San Diego, 1999: 915-919.

[7] Yang G H, Wang J L. Robust non-fragile Kalman filtering for uncertain linear systems with estimator gain uncertainty [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(2): 343-348.

[8] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Yu Li. Robust control: LMI approach[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)