文章编号: 1001-0920(2007)12-1399-04

布尔型模糊系统逼近的充分条件

李得超[1], 史忠科[1], 李永明[2]
(1. 西北工业大学 自动化学院, 西安 710072; 2. 陕西师范大学 计算科学学院, 西安 710062)

摘 要: 为了保证布尔模糊系统逼近定义在紧集上任意实值连续函数的逼近精度, 给出一个估计布尔模糊系统的输入变量与输出变量各自需要构造的模糊集个数的公式, 讨论如何设计布尔模糊系统, 以便实现逼近任给的实值连续函数到需要的逼近精度. 最后通过一个例子展示了如何设计布尔模糊系统来逼近所给的连续函数的具体方法.

关键词: 布尔型模糊系统; 充分条件; 泛逼近性
中图分类号: O159 **文献标识码**: A

Sufficient condition for Boolean fuzzy systems as universal approximators

LI De-chao[1], *SHI Zhong-ke*[1], *LI Yong-ming*[2]
(1. College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China; 2. College of Computer Sciences, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China. Correspondent: LI De-chao, E-mail: dch1831@163.com)

Abstract: A formula is given to compute the minimal upper bounds on the number of fuzzy sets and achieve pre-specified approximation accuracy for any multivariate continuous function. One example is provided to show the way in which Boolean fuzzy systems are designed to approximate given functions with a given required approximation accuracy.

Key words: Boolean fuzzy system; Sufficient condition; Universal approximation

1 引 言

目前关于模糊系统逼近性的研究已经取得了很大的成就. 一般模糊系统由模糊化、模糊规则、模糊推理以及解模糊化 4 部分组成. 如果采用单点模糊化、中心平均解模糊化或最大值解模糊化, 则模糊规则形式如下:

(SISO)

R_j: If x is A_j,

Then y is B_j, $j = 1, 2, \cdots, m$;

(MISO)

R_j: If x_1 is A_j^1 and x_2 is A_j^2 and $\cdots$ and x_n is A_j^n,

Then y is B_j, $j = 1, 2, \cdots, m$.

这里: $x_i(x)$ 是输入变量, $i = 1, 2, \cdots, n$; $A_j^i(A_j)$ 是输入模糊集, $i = 1, 2, \cdots, n$, $j = 1, 2, \cdots, m$; y 是输出变量; B_j 是输出模糊集, $j = 1, 2, \cdots, m$; m 是模糊规则数. 而每个模糊规则 R_j 可视作一个蕴涵 $A_j = A_j^1 \times A_j^2 \times \cdots \times A_j^n \to B_j$, 进而对一个模糊输入 A', 可选用的推理方法有以下几种:

$$B_1' = \bigwedge_{i=1}^{m} A' \circ (A_i \to B_i), \tag{1}$$

$$B_2' = A' \circ \bigwedge_{i=1}^{m} (A_i \to B_i), \tag{2}$$

$$B_3' = \bigvee_{i=1}^{m} A' \circ (A_i \to B_i), \tag{3}$$

$$B_4' = A' \circ \bigvee_{i=1}^{m} (A_i \to B_i), \tag{4}$$

其中 $\circ$ 是模糊合成算子. 这恰好是对 Zadeh 的 max-$*$ 合成的推广(这里 $*$ 是 t-模). 如果设输入为 $x = x_0$, 则上述式(1) 和(2) 的结果相同, 式(3) 和(4) 的结果相同. 常见的模糊系统有: Mamdani 系统、Takagi-Sugeno 系统和布尔模糊系统. 它们之间的主要区别在于推理过程中所选用的蕴涵算子不同. Mamdani 系统和 Takagi-Sugeno 系统选 t-模为

收稿日期: 2006-09-02; **修回日期**: 2007-01-10.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60134010).
作者简介: 李得超(1972—), 男, 青海互助人, 博士生, 从事系统工程的研究; 史忠科(1955—), 男, 陕西岐山人, 教授, 博士生导师, 从事智能控制等研究.

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

蕴涵算子，例如取小和乘积算子，而在布尔模糊系统中则选用多值蕴涵算子(包括 R-implication，S-implication 和 QL-implication)．对于布尔模糊系统，只能采用推理方法(1)和(2)，若进一步采用单点模糊化、最大值解模糊化(MOA)，则能得到函数 $y = G(x)$，本文将其称为布尔模糊系统的系统函数．对布尔模糊系统的更多讨论可参见文献[1,2]．布尔模糊系统与其他的模糊系统相比，具有更好的控制能力[3-5]．此外，基于多值蕴涵的模糊逻辑是经典逻辑的推广[6,7]，而且具有严格的逻辑基础[6]，已在专家系统中得到广泛的应用[3-5]．

自李等人[1,2]证明了布尔模糊系统具有泛逼近性以来，关于布尔模糊系统的理论研究却没有进一步深入，比如模糊系统逼近的充分条件，即给出一个定义在紧集上实值连续函数，为达到所需的逼近精度，应对输入变量和输出变量构建多少个隶属函数．为此本文将重点讨论布尔模糊系统逼近的充分条件．

2 预备知识

本文将无穷范数定义为

$$\| f(x) \|_\infty = \sup_{x \in U} | f(x) |,$$

这里紧集 $U \subseteq R^n$．

定义 1[8] 紧集 $U \subseteq R$ 上的模糊集 A 的支撑集定义为 $\operatorname{supp} A = \{x \mid A(x) > 0\}$．

定义 2[8] 紧集 $U \subseteq R$ 上的模糊集 A 的核定义为 $\ker A = \{x \mid A(x) = 1\}$．

定义 3[9] 若 $\ker A \neq \varnothing$，则称紧集 $U \subseteq R$ 上的模糊集 A 是正规的．

定义 4[9] 若 x_0 是 $\ker A$ 的中心，则称 x_0 是 A 的中心．

定义 5[9] 称正规模糊集族 A_i 是相重的，如果 $c_{i-1} \leq \inf(\operatorname{supp} A_i) \leq \sup(\operatorname{supp} A_{i-1}) \leq c_i$，这里 c_i 是 $A_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 的中心．

显然，若 A_i 为 $U \subseteq R$ 上相重的隶属函数，则对所有的 $i \neq j$ 均有 $A_i(c_j) = 0$，且对任意的 $x \in U$，最多有 2 个相邻的隶属函数非零，且存在 $j \in \{1,2,\cdots,n-1\}$ 使得 $c_j \leq x \leq c_{j+1}$．

设 $[0,1]^n$ 上的多项式 $P(x)$ 的像集为 $[c,d]$，对于输出变量 y，其上的模糊集对应的中心为 $c_i (i = 1,2,\cdots,n)$，且假设 $c_1 < c_2 < \cdots < c_n$．对于输出变量 y，定义模糊划分的距离 $D_k = c_k - c_{k-1}$．其中：$c_0 = c$，$c_{n+1} = d$，$k = 1,2,\cdots,n+1$．并定义模糊划分的最大距离为 $D_{\max} = \max_k D_k$．

定义 6[10] 模糊划分称为等度划分，若 $D_k = (d - c)/(n+1)$，$k = 1,2,\cdots,n+1$．

易证对于输出变量 y 的任意模糊划分，均有 $D_{\max} \leq (d-c)/(n+1)$ 成立，当且仅当划分为等度划分时，$D_{\max} = (d-c)/(n+1)$ 成立．

对于每个输入变量 x_i，$i = 1,2,\cdots,n$，设其上的模糊集对应的中心为 $c^{i\prime}_{k_i}$，且 $0 \leq c^{i\prime}_1 < c^{i\prime}_2 < \cdots < c^{i\prime}_{n_i} \leq 1$．定义模糊划分为 $D^i_{k_i} = c^i_{k_i} - c^i_{k_i-1}$．其中：$c^{i\prime}_0 = 0$，$c^{i\prime}_{n_i+1} = 1$，$k_i = 1,2,\cdots,n_i+1$．并定义模糊划分的最大距离为 $D^i_{\max} = \max_{k_i} D^i_{k_i}$．

易证对于输入变量 $x_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 的任意模糊划分，均有 $D^i_{\max} \leq 1/(n_i+1)$，当且仅当划分为等度划分时，$D^i_{\max} = 1/(n_i+1)$．

3 布尔模糊系统逼近的充分条件

命题 1 设布尔模糊系统的输出变量有 n_0 相重的等度划分，对于每个输入变量都有 $n_i{}'$ 相重的等度划分，则对任意的多项式 $P(x) \in [0,1]^n$，$\forall \varepsilon > 0$，只要 $n_0 > \dfrac{d-c}{\varepsilon} - 1$，$n_i{}' > \dfrac{n}{\varepsilon} \left\| \dfrac{\partial P}{\partial x_i} \right\|_\infty - 1$，则存在布尔系统 $y = G(x)$，使得 $\| G(x) - f(x) \|_\infty < \varepsilon$ 成立．

证明 $\forall x \in [0,1]^n$，能构造布尔模糊系统 $y = G(x)$．首先构造一族正规模糊集 $\{B_k\}$，使得 $\sum_{k=1}^{n} B_k(y) = 1$，且它们各自的中心为 c_k．因为输出变量对应的隶属函数为相重的等度划分，故 $c_{k+1} - c_k = (d-c)/(n_0+1)$．

借用文献[1,2]中的思想，令

$U_1 =$
$P^{-1}([c_1, c_1 + \lambda(d-c)/(n_0+1)])$ …$U_k =$
$P^{-1}(c_k - \lambda(d-c)/(n_0+1), c_k +$
$\lambda(d-c)/(n_0+1))$，
$U_{n_0+1} =$
$P^{-1}(c_{n_0+1} - \lambda(d-c)/(n_0+1), c_{n_0+1})$，

这里 $\lambda \in [1/4, 1/2]$，则 $\{U_1, U_2, \cdots, U_{n_0+1}\}$ 就是 $[0,1]^n$ 的一个开覆盖．令 $\prod_{j=1}^{n} [c^{j\prime}_{k_j}, c^{j\prime}_{k_j+1}]$ 最多与 2 个相交的 $\{U_k\}$ 有交集，这样就能构造出一族正规模糊集 $\{A^i_{k_i}\}$，其中心为 $c^{i\prime}_{k_i}$．因为输入变量对应 $[0,1]^n$ 上的隶属函数为相重的等度划分，故有 $c^i_{k_i} - c^i_{k_i-1} = 1/(n_i+1)$，进而模糊规则设计为

$$R_{i_1 i_2 \cdots i_n}: \text{If } x_1 \text{ is } A^1_{i_1} \text{ and } x_2 \text{ is } A^2_{i_2} \text{ and}$$
$$\cdots \text{and } x_n \text{ is } A^n_{i_n},$$
$$\text{Then } y \text{ is } C_{i_1 i_2 \cdots i_n},$$

其中 $C_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 被选为 B_k，若 $\exists k$ 使得 $(c^{1\prime}_{i_1}, c^{2\prime}_{i_2}, \cdots, c^{n\prime}_{i_n}) \in U_k$．于是便构造出了布尔模糊系统 $y = G(x)$．

$\forall x \in [0,1]^n$ 存在 $\prod_{j=1}^{n} [c^{j\prime}_{k_j}, c^{j\prime}_{k_j+1}]$，使得 $x \in \prod_{j=1}^{n} [c^{j\prime}_{k_j},$

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

c'_{k_j+1}]. 易知对于任意 $c_i' = (c'_{i_1}, c'_{i_2}, \cdots, c'_{i_n})$,只有规则 $R_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 起作用,且 $G(c_i') = c_k$ 成立. 而 $P(x)$ 在 $[0,1]^n$ 上连续,故存在 $x' = (x_1', x_2', \cdots, x_n')$,使得 $P(x') = c_k$,于是 $x' \in \prod_{j=1}^{n}[c'_{k_j}, c'_{k_j+1}]$. 由 Taylor 展式得 $P(x) = P(x') + r_1(x)$. 其中 $r_1(x)$ 为 Lagrange 余项,即 $r_1(x) = \frac{\partial P}{\partial x}\big|_{x=\eta}(x - x')$. η 位于覆盖 x 和 x' 的最小超球内,且 $\partial P/\partial x$ 是 P 的雅可比行列式.

$|G(x) - P(x)| = |G(x) - c_k - r_1(x)| < |G(x) - c_k| + |r_1(x)|$,令 $|G(x) - c_k| < \varepsilon/2$, $|r_1(x)| < \varepsilon/2$. 因为 $|G(x) - c_k| < |c_{k+1} - c_k|/2 < \varepsilon/2$,故 $n_0 > (d - c)/\varepsilon - 1$. 又因为

$$r_1(x) = \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{x=\eta}(x - x') \le \sum_{i=1}^{n} \|\partial P/\partial x\|_\infty/(n_i' + 1) < \varepsilon/2,$$

进一步设 $\|\partial P/\partial x\|_\infty/(n_i' + 1) < \varepsilon/2n$,就会得到 $n_i' > (n/\varepsilon)\|\partial P/\partial x_i\|_\infty - 1$. 于是

$$\|G(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \qquad \square$$

引理 1[11]　对于任意给定的紧集 U 上的连续函数 $f(x)$,存在多项式 $P(x)$ 使得 $\|P(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon$.

定理 1　设布尔模糊系统的输出变量都有 n_0 相重的等度划分,每个输入变量都有 n_i' 相重的等度划分,则对任意的实值连续函数 $f(x) \in [0,1]^n$, $\forall \varepsilon > \varepsilon_1 > 0$,且 $\|P(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon_1$,只要 $n_0 > (d - c)/(\varepsilon - \varepsilon_1) - 1$, $n_i' > n/(\varepsilon - \varepsilon_1)\|\partial P/\partial x_i\|_\infty - 1$,则一定存在布尔模糊系统 $y = G(x)$,使得 $\|G(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon$ 成立.

证明　由引理 1 知,必存在多项式函数 $P(x)$ 使得 $\|P(x) - f(x)\|_\infty < \varepsilon_1$ 成立. 又由命题 1,也存在布尔模糊系统使得 $\|P(x) - G(x)\|_\infty < \varepsilon - \varepsilon_1$ 成立. 若 $n_0 > (d - c)/(\varepsilon - \varepsilon_1) - 1$,则意味着 $\|f(x) - G(x)\|_\infty < \|f(x) - P(x)\|_\infty + \|G(x) - P(x)\|_\infty < \varepsilon$ 成立. 类似地有

$$n_i' > \frac{n}{\varepsilon - \varepsilon_1}\|\partial P/\partial x_i\|_\infty - 1. \qquad \square$$

4　例　　子

设计布尔模糊系统逼近函数 $f(x) = \sin x (x \in [-3,3])$ 的误差为 $\varepsilon = 0.2$.

由定理 1 知,输出论域划分为 10 部分. 进一步构造隶属函数为 $B_1, B_2, \cdots, B_{11}$,若隶属函数选为三角型,则模糊集如图 1 所示.

又 $\|df/dx\|_\infty = 1$,有 $n' > 29$,于是输入论域划分为 30 部分. 进一步构造隶属函数为 $A_1, A_2, \cdots, A_{31}$,相应的模糊集如图 2 所示.

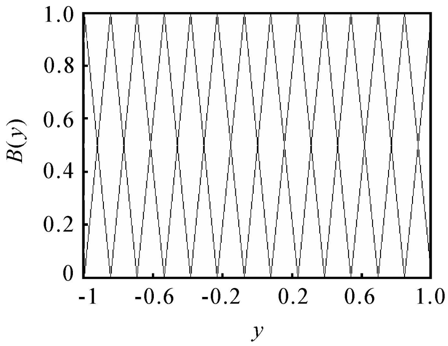

图 1　在输出论域上建立的模糊集

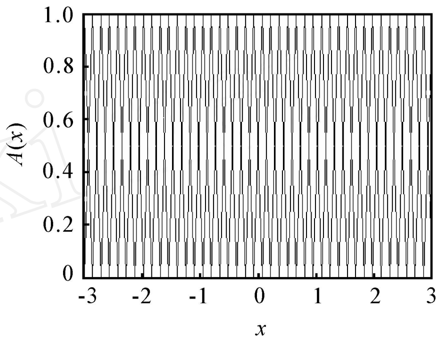

图 2　在输入论域上建立的模糊集

在命题 1 的证明中,本文选取 $C_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ 为 B_k,若 $\exists k$ 使得 $(c'_{i_1}, c'_{i_2}, \cdots, c'_{i_n}) \in U_k$,便可找到构造模糊规则后件隶属函数的方法,找出 k 使得 $(c'_{i_1}, c'_{i_2}, \cdots, c'_{i_n}) \in U_k$,此时就可以将 k 作为 B_k 的下标.

模糊规则如表 1 所示:

表 1　模糊规则库

i	k	i	k	i	k	i	k
1	5	9	1	17	7	25	11
2	4	10	1	18	8	26	10
3	3	11	2	19	8	27	9
4	2	12	2	20	10	28	9
5	2	13	3	21	10	29	8
6	1	14	4	22	11	30	7
7	1	15	5	23	11	31	6
8	1	16	6	24	11		

表 1 中 1,2,…代表隶属函数的下标. 选用 R-implication 为蕴涵算子,则模糊规则可约减变为

R_1: If x is A_5, Then y is B_1;

R_2: If x is A_4 or A_6, Then y is B_2;

R_3: If x is A_3 or A_7, Then y is B_3;

R_4: If x is A_2 or A_8, Then y is B_4;

R_5: If x is A_1 or A_9, Then y is B_5;

R_6: If x is A_{10} or A_{20}, Then y is B_6;

R_7: If x is A_{11} or A_{19}, Then y is B_7;

R_8: If x is A_{12} or A_{18}, Then y is B_8;

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

R_9 : If x is A_{13} or A_{17} , Then y is B_9 ;

R_{10} : If x is A_{14} or A_{16} , Then y is B_{10} .

系统函数 $y = G(x)$ 和待逼近函数 $y = f(x)$ 的比较如图 3 所示.

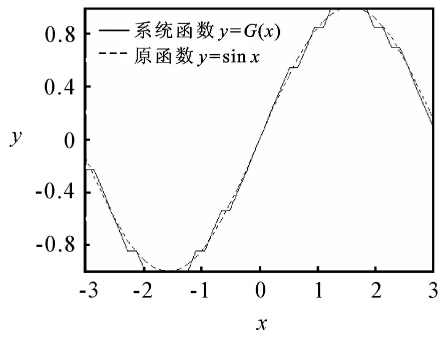

图 3 系统函数与待逼近函数的比较

5 结 语

本文重点讨论了布尔模糊系统逼近的充分条件,并在此基础上给出了一个计算逼近给定函数到指定误差时所需要的模糊集个数的最小上界公式. 最后以一个例子说明了设计布尔模糊系统的方法.

参考文献(References)

[1] Li Y M, Shi Z K, Li Z H. Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implication —SISO case [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130: 147-197.

[2] Li Y M, Shi Z K, Li Z H. Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implication —MIMO case[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2002, 130: 159-174.

[3] Bugarin A J, Barro S. Reasoning with truth values on compacted fuzzy chained rules [J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernet, 1998, 28(1): 34-46.

[4] Cao Z, Kandel A. Applicability of some fuzzy implication operators [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1989, 31: 151-186.

[5] Nguyen H T, Kreinovich V, Sirisaugtakin O. Fuzzy control as a universal control tool [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 80: 71-86.

[6] Cao Z, Park D, Kandel A. Investigations on the applicability of fuzzy inference [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 49: 151-169.

[7] Cordǒn O, Herrera F, Peregrin A. Applicability of the fuzzy operators in the design of fuzzy logic controllers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 86: 15-41.

[8] Ying H. Sufficient condition on uniform approximation of multivariate functions by Takagi-Sugeno fuzzy systems with linear rule consequent[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1998, 28(4): 515-520.

[9] Wang L X. A course in fuzzy systems and control[M]. London: Prentice Hall PTR, 1997.

[10] Zeng K, Zhang N Y, Xu W L. A comparative study on sufficient conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems as universal approximators[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2000, 8(6): 773-780.

[11] Lorentz G G. Approximation of functions [M]. London: Holt, Rine-hart, 1966.

(上接第 1398 页)

[4] 李智勇, 童调生. 基于多种群进化小生境遗传算法的神经网络进化设计方法研究[J]. 控制与决策, 2003, 18(5): 607-610.
(Li Zhi-yong, Tong Tiao-sheng. Research on ANN evolutionary design method based on populations evolution niche genetic algorithm [J]. Control and Decision, 2003, 18(5): 607-610.)

[5] 王向军, 稽斗, 张民. 一种多群竞争进化规划算法[J]. 电子学报, 2004, 11(32): 1824-1828.
(Wang Xiang-jun, Ji Dou, Zhang Min. A multi-subgroup competition evolutionary programming algorithm[J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 11(32): 1824-1828.)

[6] Kumar Chellapillal, David Foge1. Two new mutation operators for enhanced search and optimization in evolutionary programming [C]. Applications of Soft Computing. Piscataway: IEEE Press, 1997, 3: 260-269.

[7] 莫宏伟, 金鸿章. 用于函数优化的改进免疫克隆多样性算法[J]. 哈尔滨工程大学学报, 2004, 25(1): 75-79.
(Mo Hong-wei, Jin Hong-zhang. The modified immune diversity algorithm used in function optimization[J]. J of Harbin Engineering University, 2004, 25(1): 75-79.)

[8] 刘若辰, 杜海峰, 焦李成. 一种免疫单克隆策略算法[J]. 电子学报, 2004, 11(32): 1880-1884.
(Liu Ruo-chen, Du Hai-feng, Jiao Li-cheng. An immune monoclonal strategy algorithm [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, 11(32): 1880-1884.)

© 1994-2010 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net