

文章编号: 1001-0920(2007)12-1408-03

图像矩阵降维压缩的一种新方法

王建辉¹, 崔连延^{1,2}, 顾树生¹

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004; 2. 辽宁工学院 信息学院, 辽宁 锦州 121001)

摘要: 由于矩阵的 SVD 分解方法反映了图像的内在属性和本质特征, 在图像处理中得到了广泛应用. 但在矩阵降维压缩过程中对奇异值的最小数目还没有定量的确定方法, 这给 SVD 在图像特征提取中的应用带来很大困难. 为此, 在研究确定奇异值可压缩到最小数目的基础上, 提出一个奇异值压缩的降秩准则, 并给出了具体的证明过程和计算方法. 计算机仿真研究验证了所提出计算方法的正确性.

关键词: 奇异值分解; 降秩准则; 人脸识别; 保真度

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A

A new method of image matrix reducing dimension and compress

WANG Jian-hui¹, CUI Lian-yan^{1,2}, GU Shu-sheng¹

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. College of Information, Liaoning Institute of Technology, Jinzhou 121001, China. Correspondent: WANG Jian-hui, E-mail: wangjianhui@ise.nen.edu.cn)

Abstract: The method of the singular value decomposition (SVD) of matrixes reflects the inwardness and essence character of the images, so it has wide application in the image processing. However, there is no a quantitative calculational standard to get the minimum quantity of the singular value in image matrix reducing dimension and compress, which brings much trouble to the application of SVD in the extraction of image characters. Therefore, it is researched that the singular value can be compressed to minimum, based on which, a rule of reducing dimension is proposed, and a specific proof procedure and calculation are given also. Computer simulation shows the effectiveness of calculation method.

Key words: Singular value decomposition; Rule of reducing dimension; Face recognition; Fidelity

1 引言

Hong 等人于 1991 年提出了基于奇异值分解 (SVD) 的人脸识别方法^[1-3], 按照奇异值分解原理, 将图像矩阵分解成奇异值矩阵和左右标架矩阵, 提取奇异值作为图像识别的特征量, 从而对图像进行分析和处理. 由于该方法提取的是图像的代数特征, 反映了图像的内在属性和本质特征, 具有对图像噪声、光照条件等影响不敏感的优点, 在人脸图像处理中得到了广泛的应用^[4-7]. 但是, 用该方法进行奇异值向量压缩时, 没有一个定量的奇异值选择范围, 往往凭经验和实验效果来确定奇异值向量的长度, 这给该方法的使用造成了诸多不便^[7,8].

在图像的质量评价中, 常用的评价函数有 RMSE, SNR 和 PSNR, 其中应用最广泛的是图像的信噪比 SNR. 定义如下^[9]:

设 $f(x, y)$ 是原始图像, $g(x, y)$ 是经过压缩后的重建的近似图像. 对于任意的 $x, y, f(x, y)$ 和 $g(x, y)$, 信噪比定义为

$$SNR = \frac{\sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^l f^2(x, y)}{[\sum_{x=1}^m \sum_{y=1}^l [g(x, y) - f(x, y)]^2]} \quad (1)$$

图像的信噪比反映了压缩之后图像灰度误差的大小, 可作为图像保真度的客观约束. 本文根据图像保真度的准则, 提出了一个奇异值压缩的降秩准则, 并给出了具体的计算方法.

2 图像矩阵的降秩准则

设 A 为原始 $m \times l$ 图像矩阵, B 为降秩后的同阶图像矩阵.

准则 1 若要满足图像保真度的要求, 则降秩

收稿日期: 2006-11-30; 修回日期: 2006-12-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60474040); 沈阳市科技计划项目 (10220360-1-07).

作者简介: 王建辉 (1957—), 女, 辽宁鞍山人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论及应用等研究; 崔连延 (1957—), 男, 辽宁法库人, 教授, 博士生, 从事智能控制的研究.

矩阵 B 应满足如下准则:

$$\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l a_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \left(\sum_{k=p+1}^r Y_{i,k}^* U_{k,j} \right)^2} \text{SNR}_{M,p} \quad r. \quad (2)$$

式中: $a_{i,j}$ 是矩阵 A 的元素, Y^* 是左标架矩阵的元, 是奇异值, U 是右标架矩阵的元, SNR_M 是图像保真度要求的信噪比, p 是压缩后的奇异值个数, r 是原图像的非零奇异值个数.

证明 根据奇异值分解定理, 图像矩阵 A 可表示为

$$A = Y^* U. \quad (3)$$

其中: Y^* 是 $m \times m$ 阶的左标架矩阵, U 是 $l \times l$ 阶的右标架矩阵, 是 $m \times l$ 阶奇异值矩阵.

$$= \begin{bmatrix} r \times r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p \end{bmatrix},$$

式中 $1, 2, \dots, r$ 是 r 个非零奇异值.

因为 B 是 A 降秩后的图像矩阵, 与 A 具有相同的标架矩阵, 故 B 也可表示为

$$B = Y^* U, = \begin{bmatrix} p \times p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

其中

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p \end{bmatrix}, p \quad r.$$

依照图像保真度的客观准则, 有

$$\text{SNR} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l a_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l [a_{i,j} - b_{i,j}]^2}. \quad (4)$$

由于

$$A - B = Y^* U - Y^* U = Y^* \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & \ddots \\ & & & p \end{bmatrix} \right) U = \begin{bmatrix} Y_{11}^* & \dots & Y_{1m}^* \\ \dots & \ddots & \dots \\ Y_{m1}^* & \dots & Y_{mr}^* \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} U_{11} & \dots & U_{1l} \\ \dots & \ddots & \dots \\ U_{1l} & \dots & U_{ll} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_{11} & \dots & U_{1l} \\ \dots & \ddots & \dots \\ U_{1l} & \dots & U_{ll} \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Y_{11}^* & \dots & Y_{1m}^* \\ \dots & \ddots & \dots \\ Y_{m1}^* & \dots & Y_{mr}^* \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & p+1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & r \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & \dots & U_{1l} \\ \dots & \ddots & \dots \\ U_{1l} & \dots & U_{ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & & & & r \\ & Y_{1k}^* U_{kl} & \dots & & Y_{1k}^* U_{kl} \\ k=p+1 & & & & k=p+1 \\ & \dots & \ddots & & \dots \\ r & & & & r \\ k=p+1 & Y_{mk}^* U_{kl} & \dots & & Y_{mk}^* U_{kl} \\ & & & & k=p+1 \end{bmatrix}.$$

即

$$a_{i,j} - b_{i,j} = \sum_{k=p+1}^r Y_{i,k}^* U_{k,j}. \quad (5)$$

将式(5)代入准则表达式(4)即可得到

$$\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l a_{i,j}^2}{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^l \left(\sum_{k=p+1}^r Y_{i,k}^* U_{k,j} \right)^2} \text{SNR}_{M,p} \quad r.$$

从上面的证明过程可以看出, 图像矩阵的特征是由其线性无关的奇异值的组合所反映的, 亦即奇异值的个数就是图像矩阵的秩. 通过压缩奇异值的个数来对图像矩阵降秩势必造成图像信息的丢失, 因此图像的降秩即奇异值个数的压缩必须有个约束, 这个约束就是图像的保真准则.

根据上面的证明, 可以总结出压缩奇异值个数的算法如下:

- 1) 根据保真度的要求确定 SNR_M .
- 2) 寻找符合保真度要求的奇异值个数 p , 方法如下: 选择适当的 p 代入式(2); 若满足, 则 $p = p - 1$, 再代入式(2) 计算, 如此循环, 直至不满足式(2), 转入步骤 3); 若不满足, 则 $p = p + 1$, 再代入式(2) 计算, 如此循环, 直至满足式(2), 转入步骤 3)。
- 3) 此时的 p 即为要寻找的奇异值个数.

3 仿真研究

本文利用 ORL 国际标准人脸数据库进行仿真实验. 该库有 40 组 40 个人的照片, 每组有 10 张不同角度、不同姿态的照片.

仿真研究过程如下: 首先选 ORL 库中编号为 S40-1 的图像为研究对象, 该图为 112×92 的 pgm 图像, 奇异值的个数为 92. 根据 GB50198-94 对民用图像传输的要求, SNR_M 应大于等于 35 dB, 据此可利用式(2) 计算出奇异值个数 $p = 42$. 取不同的 p 值重建该图像, 如图 1 所示. 绘制奇异值个数与 SNR_M 倒数的曲线, 如图 2 所示.

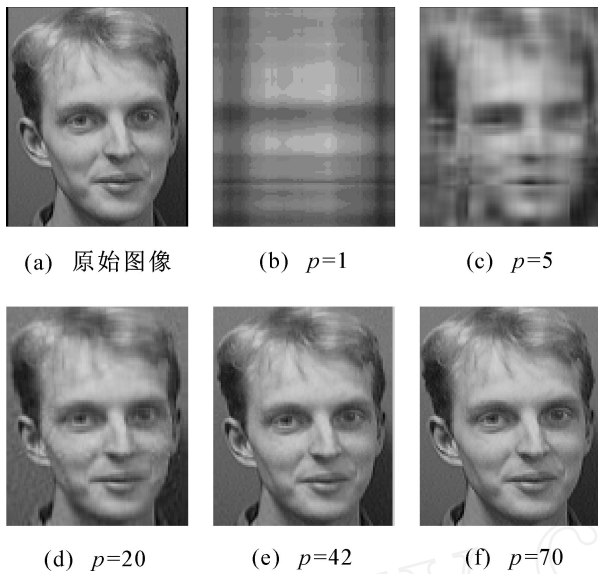


图 1 原始图像与选不同 p 值重建的图像比较

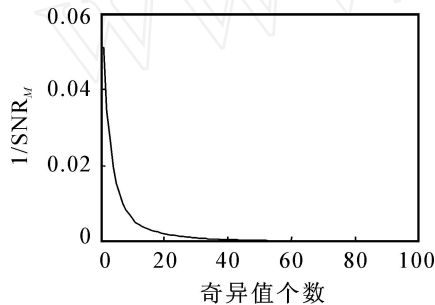


图 2 奇异值个数与 $1/SNR_M$ 的关系曲线

由图 1 可以看出, $p = 1$ 时图像不可用;选 $p = 5$ 时,图像严重失真;选 $p = 20$ 时,图像略有失真;选 $p = 42$ 时,图像已看不出失真;选 $p = 70$ 时,已与原始图像看不出区别. 图 2 反映了奇异值个数与图像保真度之间的关系. 从图 2 的曲线看,所选出的 $p = 42$ 点的 SNR_M 值比较大,保证了图像的保真度. 以上实验从主客观两个方面表明,用式 (2) 选出的奇异值个数是合理的.

在此基础上对全库 400 张图片按组内和组外逐一进行计算和比照,并绘制了 $p-1/SNR_M$ 曲线,其中的典型曲线如图 3 所示. 由图 3 可以找出在满足保真度前提下的奇异值个数,如表 1 和表 2 所示.

表 1 根据准则选出的同一人不同照片的奇异值个数

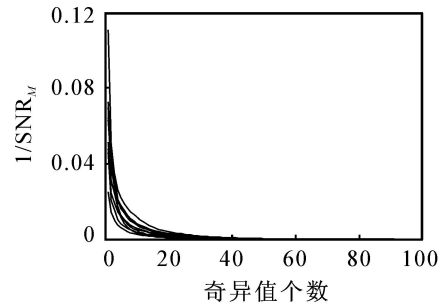
图像编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	最大
奇异值	42	32	42	34	33	41	44	37	39	38	44

表 2 根据准则选出的不同组别图像的奇异值个数

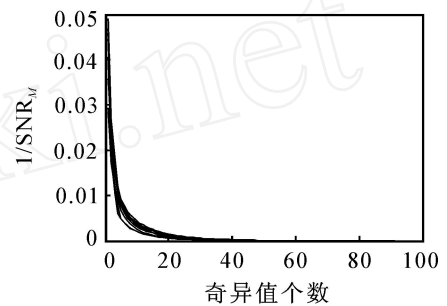
图像编号	s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	最大
奇异值	42	56	42	42	42	50	51	35	49	51	56

通过以上实验可以看出:

1) 两组的 $p-1/SNR_M$ 曲线相似,曲线可分为 3 段: $p > 60$ 段,曲线平直,噪声很小,奇异值个数变化



(a) 不同人的奇异值个数与信噪比关系的曲线



(b) 同一人的奇异值个数与信噪比关系的曲线

图 3 组内组外的 $p-1/SNR_M$ 曲线

对曲线几乎没有影响; $30 < p < 50$ 段是小斜率线性变化段,奇异值的个数变化对曲线虽有影响,但各图像的曲线重叠,差异不大; $p < 30$ 段,曲线开始剧烈变化,并出现分支,显现个体差异,说明奇异值个数的选取不能进入该段. 因此,奇异值个数的选取的下限位置应在中间段.

2) 表 1 和表 2 列出了按准则选取的奇异值个数,在同一组内差别小一些,在组间差别大一些. 对于一个图像样本库,要使每个图像的奇异值都满足图像保真度的要求,则应选择奇异值数目为全库中最大的一个(如图 1 和图 2 中的图像集,应选 $p = 56$).

4 结 语

本文从图像保真度要求的角度研究了奇异值压缩的约束问题,给出了保证图像不失真情况下的压缩极限. 仿真研究验证了奇异值压缩准则的正确性.

参考文献(References)

[1] Hong Z Q. Algebraic feature extraction of image for recognition [J]. Pattern Recognition, 1991, 24(3): 211-219.
 [2] Wang Z, Bovik A C. A universal image quality index [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2002, 9(3): 8184.
 [3] Beghdadi A, Pesquet-Popescu B. A new image distortion measure based on wavelet decomposition[C]. Proc of IEEE ISSPA 2003. Paris, 2003, (1): 485-488.

(下转第 1416 页)

- [4] 林丹, 李敏强, 寇纪淞. 进化规划中防治早熟收敛的方法[J]. 系统工程学报, 2001, 16(3): 211-216.
(Lin Dan, Li Min-qiang, Kou Ji-song. Two methods to prevent and overcome premature convergence in evolutionary programming [J]. J of Systems Engineering, 2001, 16(3): 211-216.)
- [5] 李孝安, 康继昌. 一种新的快速进化规划方法[J]. 西北工业大学学报, 2001, 19(1): 11-14.
(Li Xiao-an, Kang Ji-chang. An improved fast evolutionary programming [J]. J of Northwestern Polytechnical University, 2001, 19(1): 11-14.)
- [6] 郭崇慧, 唐焕文. 一种改进的进化规划算法及其收敛性[J]. 高等学校计算数学学报, 2002, 24(1): 51-56.
(Guo Chong-hui, Tang Huan-wen. An improved evolutionary programming algorithm and its convergence analysis [J]. Numerical Mathematics J of Chinese Universities, 2002, 24(1): 51-56.)
- [7] 黄席樾. 现代智能算法理论及应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
(Huang Xi-yue. Modern intelligent algorithms theory and applications[M]. Beijing: Science Press, 2005.)
- [8] 王磊, 潘进, 焦李成. 免疫规划[J]. 计算机学报, 2000, 23(8): 806-812.
(Wang Lei, Pan Jin, Jiao Li-cheng. The immune programming[J]. Chinese J of Computers, 2000, 23(8): 806-812.)
- [9] 付利华, 何华灿. 基于免疫进化规划的一种柔性神经模糊推理系统[J]. 计算机工程与应用, 2004, 40(18): 19-22.
(Fu Li-hua, He Hua-can. A flexible neuro-fuzzy inference system based on immune evolutionary programming [J]. Computer Engineering and Application, 2004, 40(18): 19-22.)
- [10] Chellapilla K, Fogel D. Two new mutation operators for enhanced search and optimization in evolutionary programming [C]. Proc of SPIE. Bellingham: SPIE Press, 1997: 260-269.
- [11] 林丹, 李敏强, 寇纪淞. 进化规划和进化策略中变异算子的若干研究[J]. 天津大学学报, 2000, 33(5): 627-630.
(Lin Dan, Li Min-qiang, Kou Ji-song. On research of mutation operator in evolutionary programming and evolutionary strategies [J]. J of Tianjin University, 2000, 33(5): 627-630.)
- [12] 王向军, 向东. 一种双种群进化规划算法[J]. 计算机学报, 2006, 29(5): 835-840.
(Wang Xiang-jun, Xiang Dong. A novel bi-group evolutionary programming [J]. Chinese J of Computers, 2006, 29(5): 835-840.)
- [13] 何大阔, 王福利. 一种提高遗传算法全局收敛性的方法[J]. 东北大学学报(自然科学版), 2003, 24(6): 511-514.
(He Da-kuo, Wang Fu-li. Improving the global convergence of the genetic algorithm [J]. J of Northeastern University (Natural Science), 2003, 24(6): 511-514.)
- [14] Xin Yao. Evolutionary programming made faster[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 1999, 3(2): 82-102.

(上接第 1410 页)

- [4] 刘党辉, 沈兰荪, Kin-man Lam. 人脸检测研究进展[J]. 计算机工程与应用, 2003, 39(28): 5-9.
(Liu Dang-hui, Shen Lan-sun, Kin-man Lam. Face detection: A survey [J]. Computer Engineering and Applications, 2003, 39(28): 5-9.)
- [5] 赵丽红, 刘纪红, 徐心和. 人脸检测方法综述[J]. 计算机应用研究, 2004, (9): 1-5.
(Zhao Li-hong, Liu Ji-hong, Xu Xin-he. A survey of human face detection [J]. Application Research of Computers, 2004, (9): 1-5.)
- [6] 梁路宏, 艾海舟, 徐光祐, 等. 人脸检测研究综述[J]. 计算机学报, 2002, (5): 41-42.
(Liang Lu-hong, Ai Hai-zhou, Xu Guang-you, et al. A survey of human face detection [J]. Chinese J of Computers, 2002, (5): 41-42.)
- [7] 甘俊英, 张有为. 一种基于奇异值特征的神经网络人脸识别新途径[J]. 电子学报, 2004, (1): 170-173.
(Gan Jun-ying, Zhang You-wei. A new approach for face recognition based on singular value features and neural networks [J]. Acta Electronica Sinica, 2004, (1): 170-173.)
- [8] 周洁, 卢春雨, 张长水, 等. 人脸自动识别方法综述[J]. 电子学报, 2000, 28(4): 102-106.
(Zhou Jie, Lu Chun-ryu, Zhang Chang-shui, et al. A survey of automatic human face recognition [J]. Acta Electronica Sinica, 2000, 28(4): 102-106.)
- [9] 刘直芳, 王运辉. 数字图像处理与分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
(Liu Zhi-fang, Wang Yun-hui. Digital image processing and analysis [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.)