文章编号: 1001-0920(2007)12-1347-05

基于广义扩展优势关系的粗糙决策分析方法

胡明礼, 刘思峰
(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘 要: 针对信息不完全的偏好多属性决策问题,给出一种基于拓展粗糙集的决策分析方法. 首先提出广义扩展优势关系的概念;然后在广义扩展优势关系下得到知识的粗糙近似,给出分类决策规则. 对比分析证明,扩展优势关系和有限扩展优势关系都是广义扩展优势关系的特例. 最后通过一个实例验证了所提出方法的可行性和有效性.

关键词: 决策分析; 粗糙集; 扩展优势关系; 有限扩展优势关系; 广义扩展优势关系
中图分类号: C934 **文献标识码**: A

Rough analysis method of multi-attribute decision making based on generalized extended dominance relation

HU Ming-li, LIU Si-feng
(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: HU Ming-li, E-mail: superhml@126.com)

Abstract: A decision analysis method based on extension of rough sets is proposed for multi-attribute decision making problems with preference and incomplete information. Firstly, the concept of generalized extended dominance relation is presented. Then, the rough approximations of knowledge are obtained based on generalized extended dominance relation and decision rules of classification are acquired. Both extended dominance relation and limited extended dominance relation are proved to be special cases of generalized extended dominance relation by contrast analysis. Finally, an example shows the feasibility and effectiveness of the proposed method.

Key words: Decision analysis; Rough sets; Extended dominance relation; Limited extended dominance relation; Generalized extended dominance relation

1 引 言

经济、社会、工程和管理等各个领域都存在着大量的多属性决策问题,比如投资决策、工厂选址、项目评估、设备故障识别、区域发展规划方案排序等. 多属性决策分析理论研究多属性决策问题,即为决策者推荐备选方案中最佳者,或将备选方案指派到预定义的类别中,或由好到差排序备选方案. 20 世纪 70 年代以来,多属性决策分析理论和方法一直是管理科学的研究热点之一,人们提出了众多求解多属性决策问题的方法. 较有代表性的有:层次分析法、TOPSIS 法、ELECTRE 法、模糊决策分析法和灰色决策法等[1]. 由于环境的复杂性和不确定性,以及决策者偏好的影响,信息不完全或不确定以及含有偏好信息是实际决策系统的显著特征. 因此,不完全信息的多属性决策问题受到了人们的极大关注.

Greco 等提出的基于优势关系的拓展粗糙集理论[2-4],为处理含有偏好信息的多属性决策问题提供了新的思路. 这一理论利用优势关系将决策者的偏好信息以知识的形式表示出来,非常适合处理有偏好信息的多属性决策问题. 针对信息不完全的决策系统[5,6],如存在空值的决策表,文献[7]提出了基于扩展优势关系的粗糙决策分析方法. 但扩展优势关系的要求过于宽松,容易将实际不满足条件的对象误判为同一个优势类. 针对扩展优势关系的局限,文献[8]提出了基于有限扩展优势关系的粗糙决策分析方法.

有限扩展优势关系要求 2 对象至少有 1 个共同的非空属性,这在属性个数比较少的情形下是没有问题的,但在属性较多的情形下,这样的条件仍然过于宽松. 为了保证对论域进行符合实际的划分,本文

收稿日期: 2006-08-18; **修回日期**: 2006-11-10.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70473037); 江苏省自然科学基金重点项目(BK2003211).
作者简介: 胡明礼(1979 —),山东济宁人,博士生,从事系统评价、多准则决策分析的研究; 刘思峰(1955 —),男,河南平舆人,教授,博士生导师,从事灰色系统理论、数量经济的研究.

考虑引入一个阈值,使 2 对象的共同非空属性占所有属性的比例必须大于该阈值. 基于上述思考,本文提出了广义扩展优势关系的概念,并根据广义扩展优势关系确定粗糙集的上近似、下近似和边界,从而获取确定性决策规则和可能性决策规则.

2 预备概念

为理解和分析方便,下面给出几个预备概念.

2.1 信息不完全的偏好多属性决策系统

首先给出信息不完全的偏好多属性决策系统的概念[9-11]. 假设有一个决策系统 $S = \langle U, A, V, f\rangle$. 其中:$U$ 是非空的对象全集;A 是非空的属性集合,$A = C \cup D$, C和 D 分别为条件属性集和决策属性集;V 是属性值,$V_C = \{V_q : q \in C\}$ 和 $V_D = \{V_d : d \in D\}$ 分别为条件属性值集和决策属性值集,条件属性值 V_q 和决策属性值 V_d 具有偏好次序;$f: U \times A \to V$ 是一个信息函数,表示对每一个 $q \in A$, $x \in U$, $f(x,q) \in V_q$,如果某些属性值 $V_q' \in V_C = *$,“$*$”表示空值,则 S 是一个信息不完全的偏好多属性决策系统.

为了处理多属性的偏好信息,需定义 2 种累积集:向上累积集和向下累积集.

定义 1[2] 给定论域 U,集合 $Cl_r, Cl_s \subseteq U$, $r, s \in \{1, 2, \cdots, n\}$, $\forall x, y \in U$, xSy 表示 x 不劣于 y,且 ySx 表示 x 不优于 y, $\{x \in Cl_r, y \in Cl_s, r > s\} \Rightarrow \{xSy \wedge \neg ySx\}$. 于是,向上累积集 $Cl_t^{\geq}$ 定义为 $Cl_t^{\geq} = \bigcup_{s \geq t} Cl_s$;向下累积集 $Cl_t^{\leq}$ 定义为 $Cl_t^{\leq} = \bigcup_{s \leq t} Cl_s$. 其中 $t = 1, 2, \cdots, n$.

由定义 1,显然可以得到 $Cl_t^{\geq}$ 和 $Cl_t^{\leq}$ 的如下性质:

1) $Cl_1^{\geq} = Cl_n^{\leq} = U$, $Cl_n^{\geq} = Cl_n$, $Cl_1^{\leq} = Cl_1$;

2) $Cl_{t-1}^{\leq} = U - Cl_t^{\geq}$, $t = 2, 3, \cdots, n$.

2.2 扩展优势关系

定义 2[7] 给定决策系统 $S = \langle U, A, V, f\rangle$,集合 $P \subseteq A$,假设 $x, y \in U$, P 上的扩展优势关系 $\mathrm{EDOM}(P)$ 定义为

$$\mathrm{EDOM}(P) = \{(x,y) \in U \times U \mid \forall q \in P, f(y,q) \geq f(x,q) \text{ or } f(y,q) = * \text{ or } f(x,q) = *\}. \quad (1)$$

这时称“y 扩展优势于 x”,简写为 $yD_P^* x$. 显然,扩展优势关系 D_P^* 满足自反性和传递性.

2.3 有限扩展优势关系

定义 3[8] 给定决策系统 $S = \langle U, A, V, f\rangle$,集合 $P \subseteq A$, P上的有限扩展优势关系 $\mathrm{LEDOM}(P)$ 定义为

$$\mathrm{LEDOM}(P) = \{(x,y) \in U \times U \mid \forall q \in P, (B_P(x) \cap B_P(y) \neq \varnothing \wedge ((f(x,q) = * \wedge f(y,q) = *) \vee (f(x,q) = * \wedge f(y,q) \neq *) \vee (f(y,q) = * \wedge (f(x,q) \neq *) \vee ((f(x,q) \neq * \wedge f(y,q) \neq *) \to f(y,q) \geq f(x,q)))\}. \quad (2)$$

其中:$B_P(x) = \{b \mid b \in P \wedge f(x,b) \neq *\}$,这时称“$y$有限扩展优势于 x”,简写为 $yD_P^l x$. 有限扩展优势关系 D_P^l 满足自反性,但不一定满足传递性.

3 基于广义扩展优势关系的粗糙决策分析方法

3.1 广义扩展优势关系

定义 4 给定决策系统 $S = \langle U, A, V, f\rangle$,集合 $P \subseteq A$, P上的广义扩展优势关系 $\mathrm{GEDOM}(P)$ 定义为

$$\mathrm{GEDOM}(P) = \{(x,y) \in U \times U \mid \forall q \in P, (|B_P(x) \cap B_P(y)| / |C|) \geq \lambda \wedge ((f(x,q) = * \wedge f(y,q) = *) \vee (f(x,q) = * \wedge f(y,q) \neq *) \vee (f(y,q) = * \wedge f(x,q) \neq *) \vee ((f(x,q) \neq * \wedge f(y,q) \neq *) \to f(y,q) \geq f(x,q)))\}. \quad (3)$$

其中:$B_P(x) = \{b \mid b \in P \wedge f(x,b) \neq *\}$, λ是阈值且 $0 \leq \lambda < 1$, $|C|$ 表示有限条件属性集合的基数,这时称“y 广义扩展优势于 x”,简写为 $yD_P^{\lambda} x$.

阈值 λ起到了一个约束条件的作用,λ越大,广义扩展优势关系要求 2 对象间共同的非空属性越多,这时样本对象归入某优势类的确定性越大,误分类的几率越小,从而对论域中信息不完全的样本对象的分类更加符合实际,得到的决策规则的可信度也就更高. 另一方面,阈值由决策者事先设定,决策者可以根据实际系统中不确定性的程度(比如空值的多少)或实际问题的具体需要选取阈值,这使得决策分析方法具有一定的灵活性和适应性.

考虑到方法的可操作性,下面给出一个阈值选取方案:任选 2 个样本对象 a_i 和 a_j 构成一个样本对,它们共同的非空属性个数记为 N_{ij},则 N_{ij} 的取值范围是$\{0, 1, \cdots, |C|\}$. 计算 N_{ij} 等于 $|C|$ 的样本对占所有样本对的比例,如果该比例大于 50 %,则阈值取为$(|C| - 1)/|C|$;如果该比例不大于 50 %,则计算 N_{ij} 大于或等于 $|C| - 1$ 的样本对所占比例,依次减少取值,直到 N_{ij} 大于或等于 $|C| - k$的样本对占所有样本对的比例大于 50 % 为止,其中 $k \in \{1, 2, \cdots, |C|\}$,这时取阈值为$(|C| - k)/|C|$.

性质 1 广义扩展优势关系满足自反性,但不一定满足传递性.

定义 5 对于 $P \subseteq A$, $x \in U$, $D_P^{+\lambda}(x) = \{y \in$

$U:yD_P^{\lambda}x\}$ 称为 P 广义扩展优势集, $D_P^{-\lambda}(x)=\{y\in U:xD_P^{\lambda}y\}$ 称为 P 广义扩展被优势集.

3.2　基于广义扩展优势关系的粗糙近似

定义 6　对于 $P\subseteq A, x\in U, Cl_t^{\geq}, Cl_t^{\leq}\subseteq U, t=1,2,\cdots,n$,在广义扩展优势关系下, $Cl_t^{\geq}$ 和 $Cl_t^{\leq}$ 的粗糙近似分别定义为

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}=\{x\in U_P^*:D_P^{+\lambda}(x)\subseteq Cl_t^{\geq}\},\tag{4}$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}=\bigcup_{x\in Cl_t^{\geq}}D_P^{+\lambda}(x),\tag{5}$$

$$Bn_P(Cl_t^{\geq})^{\lambda}=\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}-\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda},\tag{6}$$

$$\underline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda}=\{x\in U_P^*:D_P^{-\lambda}(x)\subseteq Cl_t^{\leq}\},\tag{7}$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda}=\bigcup_{x\in Cl_t^{\leq}}D_P^{-\lambda}(x),\tag{8}$$

$$Bn_P(Cl_t^{\leq})^{\lambda}=\overline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda}-\underline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda}.\tag{9}$$

定义 7　对于 $P\subseteq A, x\in U, Cl_t^{\geq}, Cl_t^{\leq}\subseteq U, t=1,2,\cdots,n$,广义扩展优势关系下 $Cl_t^{\geq}$ 和 $Cl_t^{\leq}$ 的粗糙近似的分类精度分别定义为

$$\alpha_{Cl_t^{\geq}}^{\lambda}=\frac{|\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}|}{|\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}|},\tag{10}$$

$$\alpha_{Cl_t^{\leq}}^{\lambda}=\frac{|\underline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda}|}{|\overline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda}|}.\tag{11}$$

定义 8　对于 $P\subseteq A, x\in U, Cl_t^{\geq}, Cl_t^{\leq}\subseteq U, t=1,2,\cdots,n$,广义扩展优势关系下粗糙近似的分类质量定义为

$$\gamma_P(Cl)^{\lambda}=\frac{\left|U-\bigcup_{t=1}^{n}(Bn_P(Cl_t^{\leq})^{\lambda})\right|}{|U|}=\frac{\left|U-\bigcup_{t=1}^{n}(Bn_P(Cl_t^{\geq})^{\lambda})\right|}{|U|}.\tag{12}$$

3.3　决策规则的获取

1) 根据式(4),可得到以下确定性的决策规则:

If $f(x,q_1)\geq r_{q1}, f(x,q_2)\geq br_{q2},\cdots,f(x,q_p)\geq r_{qp}$,

Then $x\in Cl_t^{\geq}$.

其中: $P=\{q_1,q_2,\cdots,q_p\}\subseteq C,(r_{q1},r_{q2},\cdots,r_{qp})\in V_{q1}\times V_{q2}\times\cdots\times V_{qp}, t=1,2,\cdots,n$.

2) 根据式(7),可得到以下确定性的决策规则:

If $f(x,q_1)\leq r_{q1}, f(x,q_2)\geq r_{q2},\cdots,f(x,q_p)\leq r_{qp}$,

Then $x\in Cl_t^{\leq}$.

其中: $P=\{q_1,q_2,\cdots,q_p\}\subseteq C,(r_{q1},r_{q2},\cdots,r_{qp})\in V_{q1}\times V_{q2}\times\cdots\times V_{qp}, t=1,2,\cdots,n$.

3) 根据式(6)和(9),可得到以下可能性决策规则:

If $f(x,q_1)\geq r_{q1}, f(x,q_2)\geq r_{q2},\cdots,f(x,q_k)\geq r_{qk}$,

$f(x,q_{k+1})\leq r_{qk+1}, f(x,q_{k+2})\leq r_{qk+2},\cdots,f(x,q_p)\leq r_{qp}$,

Then $x\in Cl_t\cup Cl_{t+1}\cup\cdots\cup Cl_s$.

其中: $Q'=\{q_1,q_2,\cdots,q_k\}\subseteq C, Q''=\{q_{k+1},q_{k+2},\cdots,q_p\}\subseteq C, P=Q'\cup Q''$, Q' 和 Q'' 可以相交, $(r_{q1},r_{q2},\cdots,r_{qp})\in V_{q1}\times V_{q2}\times\cdots\times V_{qp}, s,t\in\{1,2,\cdots,n\}, t<s$.

4　3 种基于拓展粗糙集的决策分析方法的对比

4.1　3 种拓展优势关系的对比

下面讨论 GEDOM(P) 与 EDOM(P) 以及 LEDOM(P) 之间的关系.

定理 1　EDOM(P) 是 GEDOM(P) 的特例.

证明　由定义 2 和定义 4 不难看出,当阈值 $\lambda=0$ 时, GEDOM(P) 完全等价于 EDOM(P). □

定理 2　LEDOM(P) 是 GEDOM(P) 的特例.

证明　由定义 3 和定义 4 可知,当阈值 $\lambda=1/|C|$ 时, GEDOM(P) 完全等价于 LEDOM(P). □

当 $1/|C|\leq\lambda<1$ 时,对比分析基于 EDOM(P),LEDOM(P) 和 GEDOM(P) 的粗糙集的下近似、上近似和边界域,可得到下面的结论:

定理 3　给定决策系统 $S=\langle U,A,V,f\rangle$ 和集合 $P\subseteq A, Cl_t^{\geq}\subseteq U, 1/|C|\leq\lambda<1$,则有

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq})^*\subseteq\underline{P}(Cl_t^{\geq})^l\subseteq\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}.\tag{13}$$

证明　因为对于 $\forall x,y\in U$,有 $yD_P^{\lambda}x\Rightarrow yD_P^l x$,而且 $D_P^{+\lambda}(x)=\{y\in U:yD_P^{\lambda}x\}$, $D_P^{+l}(x)=\{y\in U:yD_P^l x\}$,所以有 $y\in D_P^{+\lambda}(x)\Rightarrow y\in D_P^{+l}(x)$.但反之不成立,所以 $D_P^{+\lambda}(x)\subseteq D_P^{+l}(x)$.

又因为 $\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}=\{x\in U_P^*:D_P^{+\lambda}(x)\subseteq Cl_t^{\geq}\}$, $\underline{P}(Cl_t^{\geq})^l=\{x\in U_P^*:D_P^{+l}(x)\subseteq Cl_t^{\geq}\}$,所以对于 $\forall x\in U$,有 $x\in\underline{P}(Cl_t^{\geq})^l\Rightarrow D_P^{+l}(x)\subseteq Cl_t^{\geq}\Rightarrow D_P^{+\lambda}(x)\subseteq Cl_t^{\geq}\Rightarrow x\in\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}$.但反之不一定成立,所以 $\underline{P}(Cl_t^{\geq})^l\subseteq\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}$.

同理可证 $\underline{P}(Cl_t^{\geq})^*\subseteq\underline{P}(Cl_t^{\geq})^l$.所以

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq})^*\subseteq\underline{P}(Cl_t^{\geq})^l\subseteq\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}.\qquad\square$$

定理 4　给定决策系统 $S=\langle U,A,V,f\rangle$ 和集合 $P\subseteq A, Cl_t^{\geq}\subseteq U, 1/|C|\leq\lambda<1$,则有

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}\subseteq\overline{P}(Cl_t^{\geq})^l\subseteq\overline{P}(Cl_t^{\geq})^*.\tag{14}$$

证明　由定理 3 的证明可知 $D_P^{+\lambda}(x)\subseteq D_P^{+l}(x)$.因为

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda}=\bigcup_{x\in Cl_t^{\geq}}D_P^{+\lambda}(x),$$

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^l=\bigcup_{x\in Cl_t^{\geq}}D_P^{+l}(x),$$

所以对于 $\forall x \in U$, 有 $x \in \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda} \Rightarrow x \in \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{I}$. 但反之不一定成立, 所以 $\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{I}$.

同理可证 $\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{I} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{*}$,所以

$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{I} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{*}. \quad \square$$

定理 5 给定决策系统 $S = \langle U, A, V, f\rangle$ 和集合 $P \subseteq A$, $Cl_t^{\leq} \subseteq U$, $1/|C| \leq \lambda < 1$,则有

$$\underline{P}(Cl_t^{\leq})^{*} \subseteq \underline{P}(Cl_t^{\leq})^{I} \subseteq \underline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda}. \tag{15}$$

证明过程与定理 3 类似,此略.

定理 6 给定决策系统 $S = \langle U, A, V, f\rangle$ 和集合 $P \subseteq A$, $Cl_t^{\leq} \subseteq U$, $1/|C| \leq \lambda < 1$,则有

$$\overline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\leq})^{I} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\leq})^{*}. \tag{16}$$

证明过程与定理 4 类似,此略.

由式(6) 和(9) 及定理 3 ~ 定理 6,可得到如下推论:

推论 1

$$Bn_P(Cl_t^{\geq})^{\lambda} \subseteq Bn_P(Cl_t^{\geq})^{I} \subseteq Bn_P(Cl_t^{\geq})^{*}. \tag{17}$$

推论 2

$$Bn_P(Cl_t^{\leq})^{\lambda} \subseteq Bn_P(Cl_t^{\leq})^{I} \subseteq Bn_P(Cl_t^{\leq})^{*}. \tag{18}$$

4.2 3 种基于拓展优势关系的近似分类性能对比

4.2.1 近似分类的精度

对比分析基于 EDOM(P), LEDOM(P) 和 GEDOM(P) 的近似分类的精度,可得到如下定理:

定理 7 给定决策系统 $S = \langle U, A, V, f\rangle$ 和集合 $P \subseteq A$, $Cl_t^{\geq} \subseteq U$, $t = 1, 2, \cdots, n$, $1/|C| \leq \lambda < 1$,则有

$$\alpha^{\lambda}_{Cl_t^{\geq}} \geq \alpha^{I}_{Cl_t^{\geq}} \geq \alpha^{*}_{Cl_t^{\geq}}. \tag{19}$$

证明可由定义 6,定理 3 和定理 4 直接得到,此略.

定理 8 给定决策系统 $S = \langle U, A, V, f\rangle$ 和集合 $P \subseteq A$, $Cl_t^{\leq} \subseteq U$, $t = 1, 2, \cdots, n$, $1/|C| \leq \lambda < 1$,则有

$$\alpha^{\lambda}_{Cl_t^{\leq}} \geq \alpha^{I}_{Cl_t^{\leq}} \geq \alpha^{*}_{Cl_t^{\leq}}. \tag{20}$$

证明可由定义 7,定理 5 和定理 6 直接得到,此略.

4.2.2 近似分类的质量

对比分析基于 EDOM(P), LEDOM(P) 和 GEDOM(P) 的近似分类的质量,可得到如下定理:

定理 9 给定决策系统 $S = \langle U, A, V, f\rangle$ 和集合 $P \subseteq A$, $Cl \subseteq U$, $1/|C| \leq \lambda < 1$,则有

$$\gamma_P(Cl)^{\lambda} \geq \gamma_P(Cl)^{I} \geq \gamma_P(Cl)^{*}. \tag{21}$$

证明可由定义 8,推论 1 和推论 2 直接得到,此略.

定理 9 表明,当 $1/|C| \leq \lambda < 1$ 时,根据基于 GEDOM(P) 的近似分类,能够确定决策的对象在论域中所占的比例较高.

5 实 例

下面用一个实例来说明如何利用基于广义扩展优势关系的粗糙决策分析方法解决多属性决策问题. 表 1 是某学校的教学管理信息系统中的一个信息表,教务长需要对每个学生进行评判,但学生不一定学习完全相同的课程,而且不一定都通过所有课程的考试取得成绩,所以决策表中含有不完全信息是很自然的. 在这种情形下对学生的综合评判就是一个不完全信息的多属性决策问题,现在要求由表 1 获取分类决策规则.

表 1 某学校教学管理信息系统中的一个信息表

学生 ID	课程 c_1	课程 c_2	课程 c_3	总评(d)
1	中	差	差	差
2	优	中	*	优
3	中	*	*	差
4	*	中	中	优
5	*	优	差	差
6	优	中	差	优

在表 1 中:对象全集 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;课程 c_1, c_2 和 c_3 是条件属性;总评 d 是决策属性. 令 $P = \{c_1, c_2, c_3\}$, $Cl_1 = \{x \in U_P^{*}, f(x, d) = 差\} = \{1, 3, 5\}$, $Cl_2 = \{x \in U_P^{*}, f(x, d) = 优\} = \{2, 4, 6\}$,则显然有 $Cl_1^{\leq} = Cl_1$, $Cl_2^{\geq} = Cl_2$, $Cl_1^{\geq} = Cl_2^{\leq} = U$.

令阈值 $\lambda_1 = 0$,利用基于 GEDOM(P) 的粗糙决策分析方法计算的结果如下:

$\underline{P}(Cl_1^{\leq})^{\lambda_1} = \{1\}$, $\overline{P}(Cl_1^{\leq})^{\lambda_1} = U$, $Bn_P(Cl_1^{\leq})^{\lambda_1} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\alpha^{\lambda_1}_{Cl_1^{\leq}} \approx 0.17$; $\underline{P}(Cl_2^{\geq})^{\lambda_1} = \phi$, $\overline{P}(Cl_2^{\geq})^{\lambda_1} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $Bn_P(Cl_2^{\geq})^{\lambda_1} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $\alpha^{\lambda_1}_{Cl_2^{\geq}} = 0$, $\gamma_P(Cl)^{\lambda_1} \approx 0.17$.

这样的结果显然太宽松,例如认为学生 3 和 4 是不可分辨的,然而这 2 个对象之间没有一个共同的非空属性,只是存在归入同一个扩展优势类的可能,而且这种可能性也不大. 对象 3 与 5 之间也存在类似的情况. 因此,这里考虑提高阈值 λ,利用要求更为严格的 GEDOM(P) 来处理这一问题.

令阈值 $\lambda_2 = 1/|C| = 1/3$,利用基于 GEDOM(P) 的粗糙决策分析方法计算结果如下:

$\underline{P}(Cl_1^{\leq})^{\lambda_2} = \{1, 3\}$, $\overline{P}(Cl_1^{\leq})^{\lambda_2} = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $Bn_P(Cl_1^{\leq})^{\lambda_2} = \{2, 5, 6\}$, $\alpha^{\lambda_2}_{Cl_1^{\leq}} = 0.4$; $\underline{P}(Cl_2^{\geq})^{\lambda_2} = \{4\}$, $\overline{P}(Cl_2^{\geq})^{\lambda_2} = \{2, 4, 5, 6\}$, $Bn_P(Cl_2^{\geq})^{\lambda_2} = \{2, 5, 6\}$, $\alpha^{\lambda_2}_{Cl_2^{\geq}} = 0.25$, $\gamma_P(Cl)^{\lambda_2} = 0.5$.

以上结果与基于 LEDOM(P) 的粗糙决策分析方法得到的结果完全相同. 定理 2 得到验证.

令阈值 $\lambda_3 = 2/3 \in [1/3, 1]$，利用基于 GEDOM$(P)$ 的粗糙决策分析方法计算结果如下:

$\underline{P}(Cl_1^{\leq})^{\lambda_3} = \{1,3\}$, $\underline{P}(Cl_1^{\leq})^{\lambda_3} = \{1,3,5,6\}$, $Bn_P(Cl_1^{\leq})^{\lambda_3} = \{5,6\}$, $\hat{\alpha}^{\lambda_3}_{Cl_1^{\leq}} = 0.5$; $\underline{P}(Cl_2^{\geq})^{\lambda_3} = \{2,4\}$, $\overline{P}(Cl_2^{\geq})^{\lambda_3} = \{2,4,5,6\}$, $Bn_P(Cl_2^{\geq})^{\lambda_3} = \{5,6\}$, $\hat{\alpha}^{\lambda_3}_{Cl_2^{\geq}} = 0.5$, $\gamma_P(Cl)^{\lambda_3} = 0.667$.

显然有

$$\underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda_1} \subseteq \underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda_2} \subseteq \underline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda_3},$$
$$\overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda_3} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda_2} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\geq})^{\lambda_1},$$
$$\underline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda_1} \subseteq \underline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda_2} \subseteq \underline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda_3},$$
$$\overline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda_3} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda_2} \subseteq \overline{P}(Cl_t^{\leq})^{\lambda_1},$$
$$\hat{\alpha}^{\lambda_3}_{Cl_t^{\geq}} \geq \hat{\alpha}^{\lambda_2}_{Cl_t^{\geq}} \geq \hat{\alpha}^{\lambda_1}_{Cl_t^{\geq}}, \hat{\alpha}^{\lambda_3}_{Cl_t^{\leq}} \geq \hat{\alpha}^{\lambda_2}_{Cl_t^{\leq}} \geq \hat{\alpha}^{\lambda_1}_{Cl_t^{\leq}},$$
$$\gamma_P(Cl)^{\lambda_3} \geq \gamma_P(Cl)^{\lambda_2} \geq \gamma_P(Cl)^{\lambda_1}.$$

上述结果验证了定理 3 ～ 定理 9.

根据 3.1 节的阈值选取方案,由表 1 计算得到 $N_{ij} \geq 3$ 的样本对,所占比例约为 7 %,小于 50 %;而 $N_{ij} \geq 2$ 的样本对所占比例约为 53 %,大于 50 %. 所以阈值应取 2/3,这与上述结果吻合,故取 $\lambda = \lambda_3$.

经过计算,系统的最小约简是$\{c_2, c_3\}$,从而获得决策规则如下:

1) If $r_{c_2} \leq$差 and $r_{c_3} \leq$差, Then $x \in Cl_1^{\leq}$. 说明如果某生的课程 c_2 的成绩至多是“差”,且课程 c_3 的成绩至多是“差”,则该生的总评肯定是“差”.

2) If $r_{c_2} \geq$中 and $r_{c_3} \geq$中, Then $x \in Cl_2^{\geq}$. 说明如果某生的课程 c_2 的成绩至少是“中”,且课程 c_3 的成绩至少是“中”,则该生的总评肯定是“优”.

3) If ($r_{c_2} \leq$优, $r_{c_3} \geq$差) or ($r_{c_2} \geq$中, $r_{c_3} \leq$差), Then $x \in Cl_1^{\leq}$ or $x \in Cl_2^{\geq}$. 说明如果某生的课程 c_2 的成绩至多是“优”而课程 c_3 至少是“差”,或某生的课程 c_2 至少是“中”而课程 c_3 至多是“差”,则该生的总评可能是“优”也可能是“差”.

6　结　　语

本文提出的广义扩展优势关系是扩展优势关系和有限扩展优势关系的拓广,具备后两者的特点和优势. 基于广义扩展优势关系的粗糙决策分析方法允许分析者根据决策问题的需要选择恰当的阈值 λ,以获得更符合实际和令决策者满意的分析结果. 这为解决不完全信息下偏好多属性决策问题提供了一种有效方法.

参考文献(References)

[1] 岳超源. 决策理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
(Yue Chao-yuan. Decision making: Theory and applications [M]. Beijing: Science Press, 2003.)

[2] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Rough sets theory for multicriteria decision analysis [J]. European J of Operational Research, 2001, 129(1): 1-47.

[3] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Generalizing rough set theory through dominance-based rough set approach [C]. 10th Int Conf on Rough Sets, Fuzzy Sets, Data Mining and Granular Computing. Heidelberg: Springer-Verlag, 2005: 1-11.

[4] Greco S, Matarazzo B, Slowinski R. Dominance-based rough set approach to case-based reasoning[C]. 3th Int Conf on Modeling Decisions for Artificial Intelligence. Heidelberg: Springer-Verlag, 2006: 7-18.

[5] 王国胤. 粗糙集理论在不完备信息系统中的扩充[J]. 计算机研究与发展, 2002, 39(10): 1238-1243.
(Wang Guo-yin. Extension of rough set under incomplete information systems [J]. J of Computer Research and Development, 2002, 39(10): 1238-1243.)

[6] 黄兵, 周献中. 不完备信息系统中基于联系度的粗集模型拓展[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(1): 88-92.
(Huang Bing, Zhou Xian-zhong. Extension of rough set model based on connection degree under incomplete information systems [J]. System Engineering Theory and Application, 2004, 24(1): 88-92.)

[7] 何亚群, 胡寿松. 不完全信息的多属性粗糙决策分析方法[J]. 系统工程学报, 2004, 19(2): 117-120.
(He Ya-qun, Hu Shou-song. Rough method of multi-attribute decision making with incomplete information [J]. J of System Engineering, 2004, 10(2): 117-120.)

[8] 胡明礼, 刘思峰. 基于有限扩展优势关系的粗糙决策分析方法[J]. 系统工程, 2006, 24(4): 106-110.
(Hu Ming-li, Liu Si-feng. Rough analysis method of multi-attribute decision making based on limited extended dominance relation[J]. Systems Engineering, 2006, 24(4): 106-110.)

[9] 王国胤. 粗糙集理论与知识获取[M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2001.
(Wang Guo-yin. Rough sets theory and knowledge discovery [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2001.)

[10] 张文修, 仇国芳. 基于粗糙集的不确定决策[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
(Zhang Wen-xiu, Qiu Guo-fang. Uncertain decision making based on rough sets [M]. Beijing: Tsinghua Uiversity Press, 2005.)

[11] Greco S, Inuiguchi M, Slowinski R. Fuzzy rough sets and multiple-premise gradual decision rules[J]. Int J of Approximate Reasoning, 2006, 41(2): 179-211.