

文章编号: 1001-0920(2007)02-0169-05

基于风险价值约束的动态均值-方差投资组合的研究

闫伟¹, 李树荣¹, 孙焕泉²

(1. 中国石油大学(华东)信息与控制工程学院, 山东 东营 257061;

2. 中国石化胜利油田有限公司地质科学研究院, 山东 东营 257000)

摘要: 研究了基于风险价值约束的动态均值-方差项目投资组合的数学模型, 该模型是控制带约束的随机线性二次型(LQ)控制问题. 在讨论该随机 LQ 控制问题的解之后, 给出投资组合动态数学模型对应的随机哈密顿-雅克比-贝尔曼方程的解, 得出了有效边界和最佳策略, 讨论了风险价值约束的影响. 最后, 针对某油田勘探开发项目的实际情况, 应用上述结论求出该实例的解, 并讨论了风险价值约束发挥的作用.

关键词: 均值-方差投资组合; 有效边界; 随机线性二次型控制; 随机哈密顿-雅克比-贝尔曼方程

中图分类号: F830 **文献标识码:** A

Research on dynamic mean-variance portfolio selection under a value-at-risk constraint

YAN Wei¹, LI Shurong¹, SUN Huan-quan²

(1. College of Information and Control Engineering, University of Petroleum, Dongying 257061, China; 2. Geological Science Research Institute, Sinopec Shengli Oilfield Company Limited, Dongying 257000, China. Correspondent: YAN Wei, E-mail: yanwei_123456@yahoo.com.cn)

Abstract: Dynamic mean-variance portfolio selection under a value-at-risk (VaR) constraint is concerned. The model is formulated as a stochastic linear-quadratic (LQ) control problem. After solving the stochastic LQ control problem, the solution of the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman equation of the problem is demonstrated. The efficient frontier and optimal strategies of the mean-variance problem are also provided. In addition, the effect of VaR constraint is discussed. Finally, an example of portfolio about oilfield exploitation and development is presented. The result of the problem is obtained by using the above method. The role of VaR constraint is illustrated.

Key words: Mean-variance portfolio selection; Efficient frontier; Stochastic LQ control; Stochastic HJB equation

1 引言

现代投资组合理论由 Markowitz 于 1952 年首次提出^[1], 他对充满风险的证券市场的最佳投资问题进行了研究. 其核心思想是证券的组合投资是为了实现风险一定情况下的收益最大化或收益一定情况下的风险最小化, 具有降低证券投资活动风险的机制, 这就是均值-方差分析方法. 但是动态的投资才能更好地反映实际的情况, 因此均值-方差的分析很快地应用于多阶段投资组合的问题研究中^[2-6], 这些研究成果体现了市场的动态特性. 另一方面, 自从 Merton^[7,8]关于连续时间最优投资消费和投资策略发表以来, 人们开始运用随机最优控制和随机分析的方法研究连续时间投资市场, 于是关于连续时间

的均值-方差理论的研究^[9-11]便应运而生.

金融市场规模的不断扩大和金融市场风波导致的巨大损失引起了金融机构的监管层, 尤其是银行的监管层开始重视研究有效的风险管理, 为此引入了风险价值 (VaR) 来评估金融风险. 随后 VaR 得到广泛运用, 并在金融风险管理领域成为不可抗拒的趋势. 文献 [12-16] 研究了 VaR 在金融监管的具体作用和用途, 文献 [15-19] 研究了 VaR 约束下的投资组合问题, 体现了 VaR 约束对投资组合中的风险抑制作用.

以上的大多数文献仅研究了动态均值-方差理论或者仅考虑了静态投资在 VaR 约束下的影响, 因此本文在连续时间均值-方差的基础上加入了终端

收稿日期: 2005-11-01; 修回日期: 2006-01-05.

基金项目: 国家 973 计划项目 (2004CB318000).

作者简介: 闫伟 (1980-), 男, 山东东营人, 博士生, 从事最优化、最优控制理论及应用等研究; 李树荣 (1966-), 男, 山东安丘人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与控制工程等研究.

时刻的 VaR 约束,建立了基于 VaR 约束的动态投资优模型.在讨论该模型的解之后,考察了此 VaR 约束对动态均值-方差数学模型的最佳策略和有效边界的影响.最后给出了某油田勘探开发规划的实例.

2 VaR 约束

VaR 表示“处于风险中的价值”,是指在市场正常波动下,某一金融资产和证券组合的最大损失,更为确切的是指在一定概率水平下(置信度),某一金融资产和证券组合在未来特定的一段时间内的最大可能损失,表示为

$$\text{Prob}(P \leq \text{VaR}) = 1 - c. \tag{1}$$

其中: P 是投资组合在持有期 t 内的损失; VaR 为置信水平 c 下处于风险中的价值, VaR 收益或损失一般取为正数.

这里仅考虑 T 内的损失变化,定义为

$$P = x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} - x(T),$$

那么代入式(1)可得

$$\text{VaR} = \sqrt{\text{Var}[x(T)]}^{-1}(c) - E[x(T)] + e^{\int_0^T r(s) ds} x_0. \tag{2}$$

其中: $\sqrt{\text{Var}[x(T)]}^{-1}(c)$ 表示高斯分布反函数, $r(s)$ 表示无风险资产的升值率(例如银行利率).如果给定一个 VaR 的上限 VaR_{UB} ,那么有

$$\sqrt{\text{Var}[x(T)]}^{-1}(c) - E[x(T)] + x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} = \text{VaR}_{UB}. \tag{3}$$

3 基于 VaR 约束的动态投资优化组合的数学模型

假设有 $n + 1$ 项投资项目,其中一项是无风险的投资,资产过程为 $S_0(t)$ 满足如下一般微分方程:

$$\begin{cases} dS_0(t) = S_0(t) r(t) dt, t \in [0, T], \\ S_0(0) = s_0 > 0. \end{cases} \tag{4}$$

剩余的 n 项是有风险的投资,资产过程为 $S_1(t), \dots, S_n(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$\begin{cases} dS_i(t) = S_i(t) \{ b_i(t) dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) dW^j(t) \}, \\ S_i(0) = s_i > 0, i = 1, \dots, n. \end{cases} \tag{5}$$

其中: $b_i(t)$ 和 $r(t)$ ($b_i(t) > r(t)$) 为升值率, $\sigma_{ij}(t)$ 为波动率, $W(t) = (W^1(t), \dots, W^n(t))^T$ 是 n 维标准维纳过程.

假设初始总财富为 x_0 ,在时刻 $t(t \in [0, T])$,第 i 个项目上的财富为 $S_i(t)$,则有

$$x(t) = \sum_{i=0}^n S_i(t). \tag{6}$$

考虑到动态的变化过程,可以写出如下随机微

分方程:

$$dx(t) = \left\{ r(t)x(t) + \sum_{i=1}^n [b_i(t) - r(t)]u_i(t) \right\} dt + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \sigma_{ij}(t) u_i(t) dW^j(t). \tag{7}$$

这里令 $u_i(t) = S_i(t)$,并且没有考虑其他的耗费.

按照动态均值-方差投资理论^[20],投资策略应当使得在最终财富的数学期望 $E(x(T)) = d$ 的情况下风险最小,即使方差

$$\text{Var}[x(T)] = E\{x(T) - E[x(T)]\}^2 = E\{x(T) - d\}^2$$

最小.于是可得到基于 VaR 约束的动态投资优化组合的数学模型为

$$\begin{aligned} \min \text{Var}[x(T)] &= E\{x(T) - d\}^2, \\ \text{s.t. } E[x(T)] &= d, \\ x(t), u_i(t) &\text{ 满足式(7)}, \\ u_i(t) &\geq 0, i = 1, \dots, n, \\ \sqrt{\text{Var}[x(T)]}^{-1}(c) - E[x(T)] + x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} &= \text{VaR}_{UB}. \end{aligned} \tag{8}$$

注 1 1) 在一般连续时间投资市场上,当投资份额出现负值时($u_i(t) < 0$),便是投资者买空卖空的表现,这在一些较发达的投资市场是允许的,但其存在会使市场的混乱加剧,许多投资市场是不允许的^[21],因此始终要求 $u_i(t) \geq 0$. 2) 一般假设 d

$x_0 e^{\int_0^T r(s) ds}$,即期望获得的最终财富要大于或等于初始财富 x_0 不投资在有风险资产上而仅投资在无风险资产上所获得的最终财富.

引入 Lagrange 乘子 μ ,问题(8)可以转化为

$$\begin{aligned} \min E\{[x(T) - d]^2 + 2\mu[E[x(T)] - d]\}, \\ \text{s.t. } x(t), u_i(t) &\text{ 满足式(7)}; \\ u_i(t) &\geq 0, i = 1, \dots, n, \\ \sqrt{\text{Var}[x(T)]}^{-1}(c) - E[x(T)] + x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} &= \text{VaR}_{UB}. \end{aligned} \tag{9}$$

进一步可得如下模型:

$$\begin{aligned} \min \frac{1}{2} E\{x(T) - (d - \mu)\}^2, \\ \text{s.t. } x(t), u_i(t) &\text{ 满足式(7)}; \\ u_i(t) &\geq 0, i = 1, \dots, n, \\ \sqrt{\text{Var}[x(T)]}^{-1}(c) - E[x(T)] + x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} &= \text{VaR}_{UB}. \end{aligned} \tag{10}$$

4 模型的求解

应用随机线性二次型(LQ)控制理论来求解式(10). VaR 约束只考虑终态时刻 T ,而没有考虑中间

状态,因此在处理时,可先不加入 VaR 约束,最后再考虑它对有效边界的影响.

一般的随机 LQ 问题描述如下:

$$\begin{cases} dx(t) = \\ [A(t)x(t) + B(t)u(t) + f(t)]dt + \\ \sum_{j=1}^n D_j(t)u(t)dW^j(t), t \in [s, T]; \\ x(s) = y \in R. \end{cases} \quad (11)$$

其中: $A(t) \in R, f(t) \in R, B^T(t) \in R^n$ (R^n 的非负子空间), $D_j^T(t) \in R^n, u^T(t) \in R^n$. 目标是寻找一个 $u(\cdot)$, 使得二次(最终)值函数最小, 即

$$J(s, y; u(\cdot)) = E\left[\frac{1}{2}x(T)^2\right]. \quad (12)$$

那么关于随机 LQ 问题(11)和(12)的值函数可定义为

$$V(s, y) = \inf_{u(\cdot)} J(s, y; u(\cdot)). \quad (13)$$

系统(11)~(13)的随机 HJB 方程为^[9]

$$\begin{aligned} V_t(t, x) + \inf_{u(\cdot)} \{ & V_x(t, x)[A(t)x(t) + \\ & B(t)u(t) + f(t)] + \\ & \frac{1}{2}V_{xx}(t, x)u^T(t)D^T(t)D(t)u(t)\} = 0, \\ V(T, x) &= \frac{1}{2}x(T)^2. \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $D^T(t) = (D_1^T(t) \dots D_n^T(t))$.

令 $\bar{z}(t)$ 是如下最优化问题的解:

$$\min_{z(t) \in [0, +\infty)^n} \frac{1}{2} (D^T(t))^{-1} z(t) + (D^T(t))^{-1} B^T(t) z(t)^2. \quad (15)$$

其中 $M = \sqrt{m_{ij}}, M = (m_{ij})$ 是一向量或矩阵. 令

$$\bar{z}(t) = (D^T(t))^{-1} \bar{z}(t) + (D^T(t))^{-1} B^T(t) z(t), \quad (16)$$

可以得出如下结论^[9]:

$$\begin{cases} V(t, x) = \\ \frac{1}{2} P_1(t)x^2 + g_1(t)x + c_1(t), \\ x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_t^z A(s)ds} dz = 0; \\ \frac{1}{2} P_2(t)x^2 + g_2(t)x + c_2(t), \\ x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_t^z A(s)ds} dz > 0. \end{cases} \quad (17)$$

其中 $P_1(t), g_1(t), c_1(t), p_2(t), g_2(t), c_2(t)$ 分别满足如下方程:

$$\begin{cases} \dot{P}_1(t) = [-2A(t) + \bar{z}(t)^2]P_1(t), \\ P_1(T) = 1, P_1(t) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{g}_1(t) = [-A(t) + \bar{z}(t)^2]g_1(t) - f(t)P_1(t), \\ g_1(T) = 0, g_1(t) > 0; \\ \dot{c}_1(t) = -f(t)g_1(t) + \frac{1}{2}\bar{z}(t)^2 P_1(t)^{-1}g_1(t)^2, \\ c_1(T) = 0, c_1(t) > 0; \\ \dot{P}_2(t) = -2A(t)P_2(t), \\ P_2(T) = 1, P_2(t) > 0; \\ \dot{g}_2(t) = -A(t)g_2(t) - f(t)P_2(t), \\ g_2(T) = 0, g_2(t) > 0; \\ \dot{c}_2(t) = -f(t)g_2(t), \\ c_2(T) = 0, c_2(t) > 0. \end{cases}$$

得到最优 $u^*(t, x)$, 且

$$\begin{cases} u^*(t, x) = \\ -D^{-1}(t)\bar{z}(t)\left(x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_t^z A(s)ds} dz\right), \\ x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_t^z A(s)ds} dz = 0; \\ 0, x + e^{-\int_t^T A(s)ds} \int_t^T f(z)e^{\int_t^z A(s)ds} dz > 0. \end{cases} \quad (18)$$

5 基于 VaR 约束的有效边界和最佳策略

考虑问题(10), 仍先不考虑 VaR 约束, 令 $X(t) = x(t) - (d - \mu)t$, 那么问题(10)可转化为

$$\begin{aligned} \min & \frac{1}{2} E[X(T)]^2, \\ \text{s. t. } & dX(t) = \\ & [A(t)X(t) + B(t)u(t) + f(t)]dt + \\ & \sum_{j=1}^n D_j(t)u(t)dW^j(t); \\ & u_i(t) = 0, i = 1, \dots, n; \\ & X(0) = x_0 - (d - \mu)t. \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} A(t) &= r(t), f(t) = (d - \mu)r(t), \\ B(t) &= (b_1(t) - r(t), \dots, b_n(t) - r(t)), \\ D_j(t) &= (v_{1j}(t), \dots, v_{nj}(t)). \end{aligned}$$

令 $\bar{z}(t)$ 是如下最优化问题的解:

$$\min_{z(t) \in [0, +\infty)^n} \frac{1}{2} (\bar{z}(t))^{-1} \bar{z}(t) + (\bar{z}(t))^{-1} B^T(t) z(t)^2, \quad (20)$$

令 $\bar{z}(t) = (\bar{z}(t))^{-1} \bar{z}(t) + (\bar{z}(t))^{-1} B^T(t) z(t)$. 这样可以得出最佳策略为

$$\begin{cases} u^*(t, x) = \\ -(\bar{z}(t))^{-1} \bar{z}(t) + \\ B^T(t) [x - (d - \mu)e^{-\int_t^T r(s)ds}], \\ x - (d - \mu)e^{-\int_t^T r(s)ds} = 0; \\ 0, x - (d - \mu)e^{-\int_t^T r(s)ds} > 0. \end{cases} \quad (21)$$

由式(9),式(10)和 $X(t) = x(t) - (d - \mu)$,容易得出

$$\begin{aligned} & \min_{u(\cdot)} E\{ [x(T) - d]^2 + \\ & 2\mu\{ E[x(T)] - d \} \} = \\ & 2 \min_{u(\cdot)} \left\{ E \left[\frac{1}{2} [X(T)]^2 \right] - \mu^2 \right\} = \\ & \begin{cases} e^{-\int_0^T \bar{r}(s) ds} [x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} - (d - \mu)]^2 - \mu^2, \\ x_0 - (d - \mu) e^{-\int_0^T r(s) ds} = 0; \\ [x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} - (d - \mu)]^2 - \mu^2, \\ x_0 - (d - \mu) e^{-\int_0^T r(s) ds} > 0. \end{cases} \quad (22) \end{aligned}$$

由拉格朗日对偶原理可知,式(22)中第1式和第2式的最优解是取得适当的 μ 使式(22)中第3式

取得最大值,易得当 $\mu^* = \frac{d - x_0 e^{\int_0^T r(s) ds}}{1 - e^{-\int_0^T \bar{r}(s) ds}}$ 时(这里

用到 $d - x_0 e^{\int_0^T r(s) ds}$ 的假设),式(23)中的第3式会取得最大值,问题(8)(不考虑 VaR 约束)的有效边界为

$$\text{Var}[x(T)] = \frac{\{E[x(T)] - x_0 e^{\int_0^T r(s) ds}\}^2}{e^{\int_0^T \bar{r}(s) ds} - 1}. \quad (23)$$

将 $\mu^* = \frac{d - x_0 e^{\int_0^T r(s) ds}}{1 - e^{-\int_0^T \bar{r}(s) ds}}$ 代入式(22),则可以得到最佳策略为

$$u^*(t, x) = \begin{cases} -(\bar{r}(t))^{-1} [\bar{r}(t) + \\ B^T(t) \{ [x - (d - \mu^*) e^{-\int_0^T r(s) ds}] \}, \\ x - (d - \mu^*) e^{-\int_0^T r(s) ds} = 0; \\ 0, x - (d - \mu^*) e^{-\int_0^T r(s) ds} > 0. \end{cases} \quad (24)$$

下面讨论加入 VaR 约束的影响:

$$\sqrt{\text{Var}[x(T)]}^{-1}(c) - E[x(T)] + x_0 e^{\int_0^T r(s) ds} \text{VaR}_{UB}$$

反映的是一个风险同最终期望获得财富的制约关系,它使得投资的有效边界不再是原来的整条曲线,

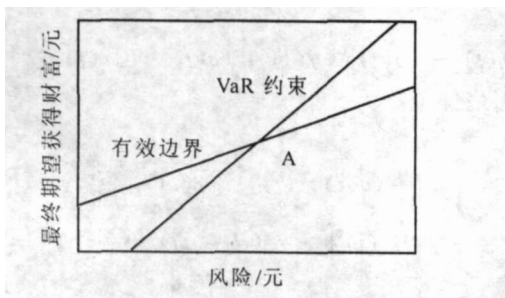


图1 有效边界和 VaR 约束

而仅是 VaR 约束同有效边界交点(点 A)的左半部分,如图1所示.图1中的纵坐标为 $E[x(T)]$,横坐标以 $\sqrt{\text{Var}[x(T)]}$ 表示.这充分体现了风险监管的加入,使得投资的风险不能任意增大.

6 油田勘探开发规划的应用实例

某油田勘探开发规划的探区共有6个勘探开发项目,分别为:圈闭 T_{01} ,圈闭 T_{02} ,圈闭 T_{03} ,圈闭 T_{04} ,圈闭 T_{05} ,圈闭 T_{06} ,其升值率和波动率分别为

$$\begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ b_4(t) \\ b_5(t) \\ b_6(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.029 \\ 0.033 \\ 0.042 \\ 0.052 \\ 0.068 \\ 0.071 \end{bmatrix},$$

$$(t) = \begin{bmatrix} 0.91 & 0 & 0.23 & 0.42 & 0.25 & 0 \\ 0 & 1.19 & 0.29 & 0 & 0.31 & 0.22 \\ 0 & 0 & 1.23 & 0.33 & 0.15 & 0.27 \\ 0 & 0 & 0 & 1.41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.52 & 0.32 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.67 \end{bmatrix}.$$

由于仅考虑油田勘探开发的项目投资,不存在无风险资产的投资(可以认为 $r(t) = 0$),而且用净现值(NPV)来计量每个圈闭的风险资产,初始总净现值 x_0 为 1.96×10^8 元,考察150个月份,即令 $T = 150$.按照上述讨论可得最佳策略为

$$u^*(t, x) = \begin{cases} B^* [(d - \mu^*) - x], x - (d - \mu^*) = 0; \\ 0, x - (d - \mu^*) > 0. \end{cases}$$

其中

$$\mu^* = \frac{d - x_0}{1 - e^{0.00467T}},$$

$$B^* = (0.0026, 0.0067, 0.0065, 0.0239, 0.0211, 0.0195)^T.$$

有效边界为

$$\text{Var}[x(T)] = \frac{\{E[x(T)] - x_0\}^2}{e^{0.00467T} - 1}.$$

有效边界和 VaR 约束如图2所示.图2中横纵坐标表示意义与图1相同.

加入 VaR 约束,令 $\text{VaR}_{UB} = 9.8 \times 10^6, c = 90\%$,由式(3)可得

$$\sqrt{\text{Var}[x(T)]} \frac{E[x(T)] - x_0 + \text{VaR}_{UB}}{-1}(c).$$

它与有效边界相交于 A 点,可以看出,在未加入 VaR 约束前,有效边界是整条的,但加入 VaR 约束后,由于风险的控制,有效边界只取 A 点左侧部分,

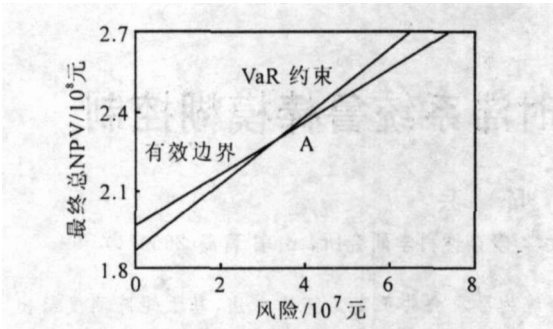


图 2 油田勘探开发项目投资的有效边界及 VaR 约束
可见风险价值的加入使得风险不能太大,从而达到控制风险的目的。

7 结 语

本文研究了基于终端时刻 VaR 约束的动态均值-方差项目投资的数学模型,讨论了该随机 LQ 控制问题的解,给出了投资组合动态数学模型所对应的随机 HJB 方程的解,得出了对有效边界的影响,从而揭示出 VaR 约束对于风险控制和制约作用。

参考文献(References)

- [1] Markowitz H. Portfolio selection [J]. J of Finance, 1952, 7(1): 77-91.
- [2] Grauer R R, Hakansson N H. On the use of mean-variance and quadratic approximations in implementing dynamic investment strategies: A comparison of returns and investment policies[J]. Management Science, 1993, 39(7): 856-871.
- [3] Hakansson N H. Multi-period mean-variance analysis: Toward a general theory of portfolio choice [J]. J of Finance, 1971, 26(4): 857-884.
- [4] Mossin J. Optimal multiperiod portfolio policies[J]. J of Business, 1968, 41(2): 215-229.
- [5] Pliska S R. Introduction to mathematical finance [M]. Blackwell: Malden, 1997.
- [6] Samuelson P A. Lifetime portfolio selection by dynamic stochastic programming[J]. The Review of Economics and Statistics, 1969, 51(2): 239-246.
- [7] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case[J]. The Review of Economics and Statistics, 1969, 51(2): 247-257.
- [8] Merton R C. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model [J]. J of Economic Theory, 1971, 3(2): 373-413.
- [9] Li X, Zhou X Y, Lim Andrew E B. Dynamic mean-variance portfolio selection with no-shorting constraints [J]. Siam J on Control and Optimization, 2002, 40(5): 1540-1555.
- [10] Lim Andrew E B, Zhou X Y. Mean-variance portfolio selection with random parameters in a complete market [J]. Mathematics of Operations Research, 2002, 27(1): 101-120.
- [11] Zhou X Y, Li D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: A stochastic LQ framework [J]. Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42(1): 19-33.
- [12] Kluppelberg C, Korn R. Optimal portfolios with bounded value-at-risk [Z]. Munich University of Technology: Working Paper, 1998.
- [13] Gourieroux C, Laurent J P, Scaillet O. Sensitivity analysis of values-at-risk [J]. J of Empirical Finance, 2000, 7(3): 225-245.
- [14] Kast R, Luciano E, Peccati L. Value-at-risk as a decision criterion [Z]. University of Turin: Working Paper, 1999.
- [15] Alexander G J, Baptista A M. Economic implications of using a mean-VaR model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis [J]. J of Economic Dynamics and Control, 2002, 26(7): 1159-1193.
- [16] Basak S, Shapiro A. Value-at-risk based risk management: Optimal policies and asset prices[J]. The Review of Financial Studies, 2001, 14(2): 371-405.
- [17] 肖春来, 宋然. VaR 理论及其应用研究 [J]. 数理统计与管理, 2003, 22(2): 6-10.
(Xiao C L, Song R. The theory and application of VaR [J]. Application of Statistics and Management, 2003, 22(2): 6-10.)
- [18] 迟国泰, 姜大治, 奚扬, 等. 基于 VaR 收益率约束的贷款组合优化决策模型 [J]. 中国管理科学, 2002, 10(6): 1-7.
(Chi G T, Jiang D Z, Xi Y, et al. Decision-making model of loan's portfolio optimization based on the yield of VaR [J]. Chinese J of Management Science, 2002, 10(6): 1-7.)
- [19] Campbell Rachel, Huisman Ronald, Koedijk Kees. Optimal portfolio selection in a value-at-risk framework [J]. J of Banking and Finance, 2001, 25(9): 1789-1804.
- [20] Markowitz H. Portfolio selection: Efficient diversification of investment [M]. New York: Wiley, 1991: 129-153.
- [21] 孔爱国. 现代投资论 [M]. 上海: 上海人民出版社, 2003.
(Kong A G. Modern investment theory [M]. Shanghai: China Renmin Press, 2003.)