

文章编号: 1001-0920(2007)02-0195-03

基于分布参数控制理论的可变质产品最优经营策略

李 桃¹, 巩永华¹, 才金正²

(1. 沈阳大学 管理科学与工程实验室, 沈阳 110044; 2. 东北大学 工商管理学院, 沈阳 110004)

摘 要: 应用分布参数控制理论,研究了零售企业对于可变质产品的最优经营管理问题.通过建立可变质产品的最优经营管理的分布参数控制系统模型,得出了零售企业每个瞬间每种可变质产品的最优经营管理策略,并对空间伴随函数和控制变量给出了明确的经济学解释.该模型更合理地描述了可变质产品的实际经营特性,具有一定的现实意义和实用价值.

关键词: 最优经营策略;可变质产品;分布参数控制

中图分类号: TP13

文献标识码: A

Optimal operation strategy of products subject to spoilage in retailing based on distributed parameter control theory

LI Tao¹, GONG Yong-hua¹, CAI Jin-zheng²

(1. Management Science and Engineering Laboratory, Shenyang University, Shenyang 110044, China; 2. School of Business Administration, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: GONG Yong-hua, E-mail: gongyh2008@163.com)

Abstract: An optimal operation for products subject to spoilage is studied with the distributed parameter control theory. And an optimal operation strategy of any kind of products subject to spoilage at any time is obtained on the basis of the proposition of the model of distributed parameter control systems. Moreover, definite economic explanations to spatial adjoint function and control variables are presented. The model describes the factual management characteristics of products subject to spoilage more reasonable, which has some practical significance and feasibility.

Key words: Optimal operation strategy; Products subject to spoilage; Distributed parameter control

1 引 言

零售企业对可变质产品的经营管理目标是在保证尽量满足消费者需求的前提下,使产品达到保质期时剩余量最少.对此类问题的研究,古典的存贮论 EOQ 模型^[1]是通过建立静态模型来寻找一个稳态的解;批量公式模型^[2]的动态形式则是用动态规划法来求解动态模型.其研究的基本问题是对于特定的需求类型以怎样的方式进行补充,才能更好地实现存贮的管理目标.面对变化日益迅速的市场,企业管理层制定经营管理策略的难度日趋加大.分布参数控制系统通过一组偏微分方程或差分方程来描述系统、建立系统模型,不仅能为零售企业提供每个瞬间的最优经营策略,而且能够提供每个瞬间每种产品的最优经营策略.

基于分布参数控制理论的最优控制模型能够更好地适应市场的需求变化,帮助企业进行经营决策.利用分布参数控制理论,从零售企业着手,研究可变质产品的最优经营控制策略,可以减少资源浪费,提升零售企业的经营效益,而且能够有效地保护消费者权益.

2 问题描述

研究经营 $n(n = 1, 2, \dots)$ 种可变质产品的零售企业.设 t 为时间, T 为终端时间. $S = (S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n)$ 为产品离开生产线的时长,其中 S_i 为第 i 种产品离开生产线的时长. $S = (S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n)$ 为保质期的时长,当产品达到保质期时必须撤出销售柜台,其中 S_i 为第 i 种产品的保质期. $x(t, s) = (x_1(t, s), x_2(t, s), \dots, x_i(t, s), \dots, x_n(t, s))$ 为 t 时刻

收稿日期: 2005-11-10; 修回日期: 2006-01-06.

基金项目: 辽宁省社会科学规划基金重点课题(L03AJ Y007).

作者简介: 李桃(1973 -),女,安徽宿县人,教授,博士,从事经济均衡、混沌与控制等研究; 巩永华(1981 -),女,山东烟台人,硕士生,从事管理科学与工程领域最优化管理研究.

离开生产线时长为 s 的产品的数量,其中 $x_i(t, s)$ 为 t 时刻离开生产线时长为 s 的第 i 种产品的数量. $u_1(t, s) = (u_{11}(t, s), u_{12}(t, s), \dots, u_{1i}(t, s), \dots, u_{1n}(t, s))$ 为时刻 t 离开生产线时长为 s 的产品的购进速率,其中 $u_{1i}(t, s)$ 为时刻 t 离开生产线时长为 s 的第 i 种产品的购进速率. $u_2(t, s) = (u_{21}(t, s), u_{22}(t, s), \dots, u_{2i}(t, s), \dots, u_{2n}(t, s))$ 为时刻 t 离开生产线时长为 s 的产品的销售速率,其中 $u_{2i}(t, s)$ 为时刻 t 离开生产线时长为 s 的第 i 种产品的销售速率. 根据过程的动态特性,可得

$$\begin{aligned} x(t + \Delta t, s) &= \\ x(t, s - \Delta t) + u_1(t, s) - u_2(t, s). \end{aligned} \quad (1)$$

将式(1)两边同时减去 $x(t, s)$, 再用 Δt 除, 并取当 $\Delta t \rightarrow 0$ 的极限, 得如下状态方程:

$$\dot{x} = -\frac{\partial x}{\partial s} + u_1(t, s) - u_2(t, s). \quad (2)$$

其初始边界条件为

$$x(0, s) = x_0(s), \quad (3)$$

$$x(t, 0) = 0, \quad (4)$$

其中: $x_0(s) = (x_{01}(s), x_{02}(s), \dots, x_{0i}(s), \dots, x_{0n}(s))$ 为 n 种产品离开生产线的时长为 s 的产品数量的初始分布; $x_{0i}(s)$ 为第 i 种产品的初始数量分布; $x(t, 0)$ 为在时刻 t 刚下生产线便进入零售企业的产品的数量为零. 设 $P(t, s) = (P_1(t, s), P_2(t, s), \dots, P_i(t, s), \dots, P_n(t, s))^T$ 为 t 时刻离开生产线时长为 s 的产品的单位售价, 其中 $P_i(t, s)$ 为 t 时刻离开生产线时长为 s 的第 i 种产品的单位售价; $G(t) = P(t, S)$ 为产品在时刻 t 达到保质期限 S 时的平均单位售价; $Q(s) = P(T, s)$ 是在终端时刻 T 离开生产线时长为 s 的产品的残值. 现以 $C_1(t, s) = (C_{11}(t, s), C_{12}(t, s), \dots, C_{1i}(t, s), \dots, C_{1n}(t, s))^T$ 为时刻 t 购进离开生产线时长为 s 的产品的采购费, 包括手续费、差旅费、检验费等, 与订货次数有关, 与订货数量无关, 其中 $C_{1i}(t, s)$ 为时刻 t 购进离开生产线时长为 s 的第 i 种产品的采购费; $C_2(t, s) = (C_{21}(t, s), C_{22}(t, s), \dots, C_{2i}(t, s), \dots, C_{2n}(t, s))^T$ 为时刻 t 购进离开生产线时长为 s 的产品的单位进价成本 (未考虑由批量带来的折扣), 其中 $C_{2i}(t, s)$ 为时刻 t 购进离开生产线时长为 s 的第 i 种产品的单位进价成本; $C_3(t, s) = (C_{31}(t, s), C_{32}(t, s), \dots, C_{3i}(t, s), \dots, C_{3n}(t, s))^T$ 为时刻 t 离开生产线时长为 s 的产品的单位库存保管费, 其中 $C_{3i}(t, s)$ 为时刻 t 离开生产线时长为 s 的第 i 种产品的单位库存保管费. 同时用 $\bar{u}(t, s) = (\bar{u}_1(t, s), \bar{u}_2(t, s), \dots, \bar{u}_i(t, s), \dots, \bar{u}_n(t, s))$ 表示时刻 t 市场对离开生产线时长为 s 的产品的需求速率, 其中 $\bar{u}_i(t, s)$ 为时刻 t 市场对离开生产线时长

为 s 的第 i 种产品的需求速率. 因此, n 种产品的购进速率和销售速率对此目标的任何偏离都会造成损失. 现用 $M(u_1 - \bar{u})^2$ 和 $M(u_2 - \bar{u})^2$ 给出偏差的惩罚成本, 这里 M 是一较大的正数, 于是可变质产品的最优经营管理的目标函数为

$$\begin{aligned} J = & \int_0^T \int_0^S [Pu_2 - C_2 u_1 - C_3 x - C_1 - \\ & M(u_1 - \bar{u})^2 - M(u_2 - \bar{u})^2] ds dt + \\ & \int_0^T G(t) x(t, S) dt + \int_0^S Q(s) x(T, s) ds. \end{aligned} \quad (5)$$

3 可变质产品经营管理问题的最优控制

根据以上分析, 可变质产品的最优经营管理问题可归纳为如下一般形式的分布参数控制问题:

$$\begin{aligned} \max \{ J = & \int_0^T \int_0^S [Pu_2 - C_2 u_1 - C_3 x - C_1 - \\ & M(u_1 - \bar{u})^2 - M(u_2 - \bar{u})^2] ds dt + \\ & \int_0^T G(t) x(t, S) dt + \int_0^S Q(s) x(T, s) ds \}. \end{aligned} \quad (6)$$

Subject to

$$\dot{x} = -\frac{\partial x}{\partial s} + u_1(t, s) - u_2(t, s), \quad (7)$$

$$x(0, s) = x_0(s), \quad (8)$$

$$x(t, 0) = 0. \quad (9)$$

应用 Pontryagin 原理构造 Hamilton 函数^[3], 有

$$\begin{aligned} H = & Pu_2 - C_2 u_1 - C_3 x - C_1 - \\ & M(u_1 - \bar{u})^2 - M(u_2 - \bar{u})^2 + \\ & \lambda \left[-\frac{\partial x}{\partial s} + u_1(t, s) - u_2(t, s) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

因此空间伴随函数应满足如下偏微分方程:

$$\begin{aligned} \partial \lambda(t, s) / \partial t = & \\ -\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H}{\partial x_t} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial H}{\partial x_s} \right) = & \\ -\frac{\partial}{\partial s} \lambda(t, s) + C_3, \end{aligned} \quad (11)$$

及横截条件

$$\lambda(t, S) = G(t), \quad (12)$$

$$\lambda(T, s) = Q(s). \quad (13)$$

为了使哈密顿函数为极大, 将 H 相对于 u_1 和 u_2 进行微分, 并令其等于零, 得

$$-C_2 - 2M(u_1 - \bar{u}) + \lambda = 0, \quad (14)$$

$$P - 2M(u_2 - \bar{u}) - \lambda = 0. \quad (15)$$

据此可得

$$u_1^* = \bar{u}(t, s) + \frac{\lambda(t, s) - C_2(t, s)}{2M}, \quad (16)$$

$$u_2^* = \bar{u}(t, s) + \frac{P(t, s) - \lambda(t, s)}{2M}. \quad (17)$$

为了计算 u_1^* 和 u_2^* , 必须先解出 $\lambda(t, s)$. 因为微分算子生成的半群是一个平移半群, 应用算子半群

理论^[4,5]和偏微分方程的知识,可得空间伴随函数 $\lambda(t,s)$ 的解为

$$\lambda^*(t,s) = \begin{cases} G(S+t-s) - \int_0^s C_3(t+\tau-s, \tau) d\tau, \\ (t,s) \in D_1 \cup D_2; \\ Q(T+s-t) - \int_0^T C_3(\tau, s+\tau-t) d\tau, \\ (t,s) \in D_3. \end{cases} \quad (18)$$

其中集合 $D_1 \sim D_3$ 满足

$$\begin{aligned} D &= D_1 \cup D_2 \cup D_3 = [0, T] \times [0, S], \\ D_1 &= \{(t,s) \mid 0 < t < s < S\}, \\ D_2 &= \{(t,s) \mid 0 < s < t < s - S + T\}, \\ D_3 &= \{(t,s) \mid s - S + T < t < T\}. \end{aligned}$$

故可变质产品最优经营管理策略为

$$\begin{aligned} u_1^* &= \\ \bar{u}(t,s) + \frac{\lambda^*(t,s) - C_2(t,s)}{2M} &= \\ \bar{u}(t,s) - \frac{C_2(t,s)}{2M} + \frac{1}{2M} \times & \\ \begin{cases} G(S+t-s) - \int_0^s C_3(t+\tau-s, \tau) d\tau, \\ (t,s) \in D_1 \cup D_2; \\ Q(T+s-t) - \int_0^T C_3(\tau, s+\tau-t) d\tau, \\ (t,s) \in D_3. \end{cases} & \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2^* &= \\ \bar{u}(t,s) + \frac{P(t,s) - \lambda^*(t,s)}{2M} &= \\ \bar{u}(t,s) + \frac{P(t,s)}{2M} - \frac{1}{2M} \times & \\ \begin{cases} G(S+t-s) - \int_0^s C_3(t+\tau-s, \tau) d\tau, \\ (t,s) \in D_1 \cup D_2; \\ Q(T+s-t) - \int_0^T C_3(\tau, s+\tau-t) d\tau, \\ (t,s) \in D_3. \end{cases} & \quad (20) \end{aligned}$$

可变质产品的状态方程与系统的伴随函数方程具有相同的微分算子,因而它们具有完全相同的强连续算子半群.用类似的方法可得到可变质产品经营管理的最优轨迹为

$$\begin{aligned} x^*(t,s) &= \\ \begin{cases} x_0(s-t) + \int_t^s [u_1^*(\tau, s-t+\tau) - \\ u_2^*(\tau, s-t+\tau)] d\tau, (t,s) \in D_1; \\ \int_t^s u_1^*(t-s+\tau, \tau) d\tau - u_2^*(t-s+\tau, \tau), \\ (t,s) \in D_2 \cup D_3. \end{cases} & \quad (21) \end{aligned}$$

4 可变质产品经营管理问题的经济学意义

在区域 D_1 上,式(21)的解是 n 种可变质产品最优经营管理的“初始策略”,它完全由 n 种零售企业中产品的初始分布 x_0 表征.式(18)的第2表达式在区域 D_3 上是 n 种可变质产品最优经营管理的“终端策略”,即在此区域内,在终端时间 T 时刻所有的可变质产品都要按照价值 $Q(s)$ 核价,对此经营期间的业绩进行评核.而式(18)的第1表达式在区域 D_2 内属于最优经营管理的“中间策略”部分,与产品的初始分布无关,属于产品最优经营管理中的正常经营过程.

对于式(18)表示的空间伴随函数 $\lambda^*(t,s)$ 的解,有更加明确的经济学意义:在 t 时刻离开生产线时长为 s 的产品在时间 $t-s+S$ 达到保质期的最后期限,此时产品的价值为 $G(t-s+S)$.从 s 到 S 产品的库存费用为

$$\int_0^s C_3(t+\tau-s, \tau) d\tau.$$

因此, $\lambda^*(t,s)$ 在 $D_1 \cup D_2$ 上的解表示在时刻 t 离开生产线时长为 s 的单位可变质产品所得的纯利润为

$$G(t-s+S) - \int_0^s C_3(t+\tau-s, \tau) d\tau.$$

同理,在区域 D_3 上 $\lambda^*(t,s)$ 的解表明在终端时刻 T 可变质产品的剩余价值为 $Q(T+s-t)$,从 t 到 T 产品的库存费用为

$$\int_0^T C_3(\tau, s+\tau-t) d\tau.$$

由此可见, $\lambda^*(t,s)$ 在 D_3 上的解表示在时刻 t 离开生产线时长为 s 的单位可变质产品在到达经营期末 T 时所得的纯利润,即

$$Q(T+s-t) - \int_0^T C_3(\tau, s+\tau-t) d\tau.$$

据此分析可知,经营过程中单位产品的纯利润即为产品的边际利润.

由空间伴随函数 $\lambda^*(t,s)$ 的经济学意义,可以得出最优控制 $u_1^*(t,s)$ 和 $u_2^*(t,s)$ 的经济学意义,即当产品的边际利润 $\lambda^*(t,s)$ 小于等于单位产品的进价成本 $C_2(t,s)$ 时,产品的购进速率 $u_1^*(t,s)$ 应小于等于产品的目标购进速率 $\bar{u}(t,s)$.反之,如果产品的边际利润 $\lambda^*(t,s)$ 大于购进单位产品的进价成本 $C_2(t,s)$ 时,产品的购进速率 $u_1^*(t,s)$ 应大于市场对产品的需求速率 $\bar{u}(t,s)$.对于控制变量 $u_2(t,s)$ 的经济学意义则为,当产品的单位售价 $P(t,s)$ 大于等于产品的边际利润 $\lambda^*(t,s)$ 时,销售速率 $u_2^*(t,s)$ 应大于等于市场对产品的需求速率 $\bar{u}(t,s)$;反之,销售速率 $u_2^*(t,s)$ 应小于市场对产品的需求速率 $\bar{u}(t,s)$.

(下转第201页)

[J]. 软件学报,2003,14(3):503-511.
(Ren F Y, Lin C, Ren Y, et al. Congestion control algorithm in large-delay networks[J]. J of Software, 2003,14(3):503-511.)

[5] Ren F, Ying X, Ren Y, et al. A robust active queue management algorithm based on sliding mode variable structure control [C]. Proc of IEEE INFOCOM '02. New York: IEEE Press,2002:13-20.

[6] Yan P, Gao Y, Ozbay H. A variable structure control approach to active queue management for TCP with ECN [C]. Proc of IEEE ISCC '03. Turkey: IEEE Press,2003:203-215.

[7] Saleh A, Al S, Oscar D, et al. An approach to stabilize linear systems with state and input delay [C]. Proc of the American Control Conf. Colorado: IEEE Press, 2003:875-880.

[8] Holot C, Misra V, Towsley D, et al. Analysis and design of controllers for AQM routers supporting TCP flows[J]. IEEE ACM Trans on Automatic Control, 2002,47(6):945-959.

[9] Shyu K, Yan J. Robust stability of uncertain time-delay systems and its stabilization by variable structure control [J]. Int J of Control,1993,57(1):237-246.

[10] Quet P F, Ozbay H. On the design of AQM supporting TCP flows using robust control theory[J]. IEEE Trans on Automatic Control,2004,49(6):1031-1036.

(上接第 197 页)

5 结 语

本文通过建立分布参数最优控制模型,得出了企业对于 n 种可变质产品的最优经营管理策略. 该模型的构造针对于 n 种可变质产品,更贴近实际情况,给出的各部分解的经济学解释亦非常明确. 分布参数模型对于指导大、中、小零售企业的采购经营工作具有广泛的实际应用价值. 值得指出的是,本文模型是在订购批量不带来折扣的假设下展开的,在现实的零售业采购过程中,订购批量与折扣往往有一定的比例关系,单位进价成本 $C_2(t,s)$ 可采用分段函数表示,进而展开更进一步的研究.

参考文献(References)

[1] 胡运权,郭耀煌. 运筹学教程[M]. 北京:清华大学出版社,1998:322-344.
(Hu Y Q, Guo R H. Course in operational research [M]. Beijing: Publication of Tsinghua University, 1998: 322-344.)

[2] Harvey M Wagner, Thomson M Whitin. Dynamic version of the economic lot size model[J]. Management Science, 1958,5(11): 89-96.

[3] Sethi S P, Thompson G L. Optimal control theory, applications to management science[M]. J C Leiden of the Netherlands: Martinus Nijhoff Publishing,1981:16-37.

[4] 赵中奇,王浣尘,潘德惠. 管理中常见的半群结构及其应用[J]. 上海交通大学学报,2003,37(4):585-588.
(Zhao Z Q, Wang H C, Pan D H. The semi-group construction of distributed parameters systems and its application [J]. J of Shanghai Jiaotong University, 2003,37(4): 585-588.)

[5] Bensoussan A, Nissen G, Tapiero C. Optimum inventory and product quality control with deterministic and stochastic deterioration — An application of distributed parameters control systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1975, 20(3): 407-412.

下 期 要 目

蚁群算法硬件实现的研究进展.....	段海滨,等
极点与状态方差约束下的动态输出反馈可靠控制	张 刚,等
离散线性系统高阶积分观测器设计.....	段广仁,等
一类基于 FSP 问题 Block 性质的快速 TS 算法.....	金 锋,等
粒子群优化粒子滤波方法	方 正,等
持续时态数据挖掘的研究	潘 定,等
考虑环境因素的分布式系统可靠性建模及其分析.....	原菊梅,等