第 22 卷 第 3 期 控 制 与 决 策 2007 年 3 月
Vol. 22 No. 3 Control and Decision Mar. 2007

文章编号: 1001-0920(2007)03-0318-04

不确定连续系统的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波

马清亮, 胡昌华
(第二炮兵工程学院 自动化系, 西安 710025)

摘 要: 研究凸多面体不确定连续系统的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题. 为降低设计的保守性, 提出一种新的具有参数依赖 Lyapunov 函数的鲁棒 H_2/H_∞ 性能准则. 基于该性能准则, 推导出鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器存在的充分条件, 并将滤波器设计问题转化为具有线性矩阵不等式(LMI)约束的参数优化问题.

关键词: H_2/H_∞ 滤波; 鲁棒滤波; 参数依赖 Lyapunov 函数; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Robust H_2/H_∞ filtering for uncertain continuous systems

MA Qing-liang, HU Chang-hua
(Department of Automation, The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China. Correspondent: MA Qing-liang, E-mail: mql99@sohu.com)

Abstract: The problem of robust H_2/H_∞ filtering for polytopic continuous systems is discussed. To reduce the design conservatism, a robust H_2/H_∞ performance criteria with parameter-dependent Lyapunov functions is proposed. The sufficient conditions for the existence of robust H_2/H_∞ filter are presented based on the proposed performance criteria. The problem of filter design is converted into a parameter optimization problem with linear matrix inequality (LMI) constraint.

Key words: H_2/H_∞ filtering; Robust filtering; Parameter-dependent Lyapunov functions; LMI

1 引 言

近年来, 一些学者对不确定系统的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题进行了深入研究, 并取得了一批有价值的研究成果. 对于范数有界的参数不确定系统, 文献[1,2]研究了基于 Riccati 方程法的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波. 对于凸多面体不确定离散系统, 文献[3,4]给出的基于二次稳定的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波方案, 要求对于所有允许的参数不确定性, 系统存在一个统一的 Lyapunov 函数, 从而导致其设计结果具有较大的保守性. 为此, 文献[5]提出了基于参数依赖 Lyapunov 函数的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波方法, 在一定程度上降低了设计的保守性. 但对于凸多面体不确定连续系统的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题, 相关的研究成果目前还未见报道.

本文针对凸多面体不确定连续系统的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题进行研究. 首先借助于投影定理, 提出一种具有参数依赖 Lyapunov 函数的鲁棒 H_2/H_∞ 性能准则; 然后, 给出了鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器的设计方法; 最后通过仿真表明了该方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下不确定连续系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w_1(t) + B_2 w_2(t), \\ y(t) = Cx(t) + D_1 w_1(t) + D_2 w_2(t), \\ z(t) = Lx(t). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为状态变量, $y(t) \in R^m$ 为测量输出, $w_1(t) \in R^p$ 为能量有限的噪声信号, $w_2(t) \in R^q$ 为白噪声信号, $z(t) \in R^r$ 为待估计的信号. 不确定性系统矩阵 A, B_1, B_2, C, D_1, D_2 和 L 可表示为若干个顶点矩阵的凸组合, 即

$$\begin{cases} M = (A, B_1, B_2, C, D_1, D_2, L) \in \Omega, \\ \Omega = \left\{ M \mid M = \sum_{i=1}^{N} \delta_i M_i, \delta_i \geq 0, \sum_{i=1}^{N} \delta_i = 1 \right\}, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $M_i = (A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i, D_{1i}, D_{2i}, L_i)$.

构造如下形式的全阶滤波器:

收稿日期: 2005-11-28; 修回日期: 2006-03-25.
基金项目: 国家自然科学基金项目(69931040).
作者简介: 马清亮(1974—), 男, 河南商水人, 博士, 从事进化计算、鲁棒控制与滤波等研究; 胡昌华(1966—), 男, 湖北罗田人, 教授, 博士生导师, 从事故障诊断、容错控制等研究.

$$
\begin{cases}
\dot{\hat{x}}(t) = A_F\hat{x}(t) + B_F y(t), \\
\hat{z}(t) = C_F\hat{x}(t).
\end{cases} \tag{3}
$$

取状态变量 $\bar{x}(t) = [x^{\mathrm{T}}(t) \quad \hat{x}^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}}$，误差输出 $\bar{z}(t) = z(t) - \hat{z}(t)$，则滤波误差系统的状态方程为

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}\bar{x}(t) + \bar{B}_1 w_1(t) + \bar{B}_2 w_2(t), \\
\bar{z}(t) = \bar{C}\bar{x}(t).
\end{cases} \tag{4}
$$

其中

$$
\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_F C & A_F \end{bmatrix},\ \bar{B}_1 = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_F D_1 \end{bmatrix},
$$

$$
\bar{B}_2 = \begin{bmatrix} B_2 \\ B_F D_2 \end{bmatrix},\ \bar{C} = [L \quad -C_F].
$$

本文研究的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波问题是：在系统矩阵 $(A, B_1, B_2, C, D_1, D_2, L)$ 满足式(2)的情况下，要求确定滤波器(3)的参数矩阵 (A_F, B_F, C_F)，使得对于所有允许的参数不确定性，滤波误差系统(4)鲁棒渐近稳定，同时满足如下性能指标：

1) 鲁棒 H_∞ 性能：从 w_1 到 $\bar{z}(t)$ 的闭环传递函数 $T_{\bar{z}w_1}(s)$，其 H_∞ 范数小于给定的标量 $\gamma(\gamma > 0)$；

2) 鲁棒 H_2 性能：从 w_2 到 $\bar{z}(t)$ 的闭环传递函数 $T_{\bar{z}w_2}(s)$ 的 H_2 范数最小.

上述问题的数学描述为

$$
\begin{cases}
\min\limits_{A_F, B_F, C_F} \max\limits_{M \in \Omega} \| T_{\bar{z}w_2}(s) \|_2, \\
\text{s.t.} \max\limits_{M \in \Omega} \| T_{\bar{z}w_1}(s) \|_\infty < \gamma.
\end{cases} \tag{5}
$$

3　主要结果

3.1　H_2 性能准则

引理 1[6]　给定矩阵 $H = H^{\mathrm{T}} \in R^{n\times n}$，$U \in R^{n\times m}$，$V \in R^{k\times n}$，且 $\mathrm{rank}(U) < n$，$\mathrm{rank}(V) < n$，则存在一个矩阵 $X \in R^{m\times k}$，使得

$$
H + UXV + (UXV)^{\mathrm{T}} < 0, \tag{6}
$$

当且仅当

$$
N_U H N_U^{\mathrm{T}} < 0,\ N_V^{\mathrm{T}} H N_V < 0. \tag{7}
$$

其中：N_U 和 N_V^{T} 分别是 U 和 V^{T} 的正交补，即 $N_U \cdot U = 0$，$N_V^{\mathrm{T}} \cdot V^{\mathrm{T}} = 0$.

引理 2[4]　考虑系统(1)，设 $M \in \Omega$ 为任意确定性常值矩阵，给定 $\eta > 0$，则滤波误差系统(4)渐近稳定，且 $\| T_{\bar{z}w_2}(s) \|_2 < \eta$，其充要条件为存在矩阵 $0 < Y_2 = Y_2^{\mathrm{T}} \in R^{2n\times 2n}$，$0 < Q = Q^{\mathrm{T}} \in R^{r\times r}$，满足

$$
\mathrm{Trace}(Q) < \eta, \tag{8}
$$

$$
-Q + \bar{C} Y_2 \bar{C}^{\mathrm{T}} < 0, \tag{9}
$$

$$
\bar{A} Y_2 + Y_2 \bar{A}^{\mathrm{T}} + \bar{B}_2 \bar{B}_2^{\mathrm{T}} < 0. \tag{10}
$$

若令 $P_2 = Y_2^{-1}$，则式(9)和(10)可等价地表示为

$$
-Q + \bar{C} P_2^{-1} \bar{C}^{\mathrm{T}} < 0, \tag{11}
$$

$$
P_2 \bar{A} + \bar{A}^{\mathrm{T}} P_2 + P_2 \bar{B}_2 \bar{B}_2^{\mathrm{T}} P_2 < 0. \tag{12}
$$

下述定理给出一个与引理 2 等价且具有参数依赖 Lyapunov 函数的 H_2 性能准则.

定理 1　考虑系统(1)，设 $M \in \Omega$ 为任意确定性常值矩阵，给定 $\eta > 0$，则滤波误差系统(4)渐近稳定，且 $\| T_{\bar{z}w_2}(s) \|_2 < \eta$，其充要条件为存在矩阵 $0 < P_2 = P_2^{\mathrm{T}} \in R^{2n\times 2n}$，$0 < Q = Q^{\mathrm{T}} \in R^{r\times r}$，$F_2 \in R^{2n\times 2n}$，$G_2 \in R^{2n\times 2n}$，使得式(8)成立，同时满足

$$
\begin{bmatrix} -Q & \bar{C} \\ \bar{C}^{\mathrm{T}} & -P_2 \end{bmatrix} < 0, \tag{13}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\bar{A}^{\mathrm{T}} F_2 + F_2^{\mathrm{T}} \bar{A} & P_2 - F_2^{\mathrm{T}} + \bar{A}^{\mathrm{T}} G_2 & F_2^{\mathrm{T}} \bar{B}_2 \\
P_2 - F_2 + G_2^{\mathrm{T}} \bar{A} & -G_2 - G_2^{\mathrm{T}} & G_2^{\mathrm{T}} \bar{B}_2 \\
\bar{B}_2^{\mathrm{T}} F_2 & \bar{B}_2^{\mathrm{T}} G_2 & -I
\end{bmatrix} < 0. \tag{14}
$$

证明　由矩阵的 Schur 补引理可知，式(13)等价于式(11). 为证明该定理，只需证明式(14)与(12)等价即可. 为此，将式(14)表示为式(6)的形式，其中

$$
H = \begin{bmatrix} 0 & P_2 & 0 \\ P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{bmatrix},\ U = \begin{bmatrix} \bar{A}^{\mathrm{T}} \\ -I \\ \bar{B}_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},
$$

$$
X = [F_2 \quad G_2],\ V = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}
$$

选择 $N_U = \begin{bmatrix} I & \bar{A}^{\mathrm{T}} & 0 \\ 0 & \bar{B}_2^{\mathrm{T}} & I \end{bmatrix}$，$N_V^{\mathrm{T}} = [0 \quad 0 \quad I]$，则根据引理 1 可知，式(14)与(12)等价. □

3.2　H_∞ 性能准则

应用连续系统的有界实引理[4]，并采用与定理 1 类似的证明方法，可得到一个 Lyapunov 矩阵与系统矩阵之间解耦的 H_∞ 性能准则.

定理 2　考虑系统(1)，设 $M \in \Omega$ 为任意确定性常值矩阵，给定 $\gamma > 0$，则滤波误差系统(4)渐近稳定，且 $\| T_{\bar{z}w_1}(s) \|_\infty < \gamma$，其充要条件为存在矩阵 $0 < P_\infty = P_\infty^{\mathrm{T}} \in R^{2n\times 2n}$，$F_\infty \in R^{2n\times 2n}$，$G_\infty \in R^{2n\times 2n}$ 满足

$$
\begin{bmatrix}
\bar{A}^{\mathrm{T}} F_\infty + F_\infty^{\mathrm{T}} \bar{A} & P_\infty - F_\infty^{\mathrm{T}} + \bar{A}^{\mathrm{T}} G_\infty & F_\infty^{\mathrm{T}} \bar{B}_1 & \bar{C}^{\mathrm{T}} \\
P_\infty - F_\infty + G_\infty^{\mathrm{T}} \bar{A} & -G_\infty - G_\infty^{\mathrm{T}} & G_\infty^{\mathrm{T}} \bar{B}_1 & 0 \\
\bar{B}_1^{\mathrm{T}} F_\infty & \bar{B}_1^{\mathrm{T}} G_\infty & -I & 0 \\
\bar{C} & 0 & 0 & -\gamma^2 I
\end{bmatrix} < 0. \tag{16}
$$

3.3　鲁棒 H_2/H_∞ 性能准则

在定理 1 和定理 2 的基础上，根据凸多面体不确定系统的内在特性，可得到保证滤波误差系统(4)渐近稳定的鲁棒 H_2/H_∞ 性能准则.

定理3 考虑系统(1),设 $M \in \Omega$ 代表不确定系统矩阵,给定 $\eta > 0, \gamma > 0$,则滤波误差系统(4)鲁棒渐近稳定,且

$\max\limits_{M \in \Omega} \| T_{\tilde{z}w_2}(s) \|_2 < \eta, \max\limits_{M \in \Omega} \| T_{\tilde{z}w_1}(s) \|_\infty < \gamma$,

其充分条件为存在矩阵 $0 < P_{2i} = P_{2i}^{\mathrm{T}} \in R^{2n \times 2n}$, $0 < P_{\infty i} = P_{\infty i}^{\mathrm{T}} \in R^{2n \times 2n}$, $0 < Q = Q^{\mathrm{T}} \in R^{r \times r}$, $F \in R^{2n \times 2n}$, $G_2 \in R^{2n \times 2n}$, $G_\infty \in R^{2n \times 2n}$,使得式(8)成立,并满足

$$\begin{bmatrix} -Q & \overline{C}_i \\ \overline{C}_i^{\mathrm{T}} & -P_{2i} \end{bmatrix} < 0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_i^{\mathrm{T}} F + F^{\mathrm{T}} \overline{A}_i & P_{2i} - F^{\mathrm{T}} + \overline{A}_i^{\mathrm{T}} G_2 & F^{\mathrm{T}} \overline{B}_{2i} \\ P_{2i} - F + G_2^{\mathrm{T}} \overline{A}_i & -G_2 - G_2^{\mathrm{T}} & G_2^{\mathrm{T}} \overline{B}_{2i} \\ \overline{B}_{2i}^{\mathrm{T}} F & \overline{B}_{2i}^{\mathrm{T}} G_2 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_i^{\mathrm{T}} F + F^{\mathrm{T}} \overline{A}_i & P_{\infty i} - F^{\mathrm{T}} + \overline{A}_i^{\mathrm{T}} G_\infty & F^{\mathrm{T}} \overline{B}_{1i} & \overline{C}_i^{\mathrm{T}} \\ P_{\infty i} - F + G_\infty^{\mathrm{T}} \overline{A}_i & -G_\infty - G_\infty^{\mathrm{T}} & G_\infty^{\mathrm{T}} \overline{B}_{1i} & 0 \\ \overline{B}_{1i}^{\mathrm{T}} F & \overline{B}_{1i}^{\mathrm{T}} G_\infty & -I & 0 \\ \overline{C}_i & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{19}$$

其中,$(\overline{A}_i, \overline{B}_{1i}, \overline{B}_{2i}, \overline{C}_i)$ 为滤波误差系统(4)的顶点矩阵,$F = F_2 = F_\infty$, $\forall i = 1, \cdots, N$.

注1 定理3给出的具有参数依赖Lyapunov矩阵的鲁棒 H_2/H_∞ 性能准则,通过引入松弛变量 F, G_2 和 G_∞,实现了Lyapunov矩阵与系统矩阵之间的解耦,这一特性使得当其应用于凸多面体不确定连续系统时,可得到较低保守性的结果. 而且,定理3在描述系统的 H_2 和 H_∞ 性能指标时,分别采用了不同的Lyapunov矩阵,这将进一步降低设计的保守性. 当 $G_2 = G_\infty = 0$, $F = F^{\mathrm{T}} = P_{2i} = P_{2i}^{\mathrm{T}} = P_{\infty i} = P_{\infty i}^{\mathrm{T}}$ 时,定理3等价于基于二次稳定的鲁棒 H_2/H_∞ 性能准则.

3.4 鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器设计

为便于运用线性矩阵不等式(LMI)方法设计 H_2/H_∞ 滤波器,令

$$G_2 = \Lambda_2 F, \quad G_\infty = \Lambda_\infty F. \tag{20}$$

其中

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} \delta_1 I & 0 \\ 0 & \delta_2 I \end{bmatrix}, \quad \Lambda_\infty = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 I & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 I \end{bmatrix}.$$

将上式分别代入式(18),(19),经过简单的矩阵运算,并结合定理3,可得如下结论:

定理4 考虑系统(1),设 $M \in \Omega$ 代表不确定系统矩阵,给定 $\eta > 0, \gamma > 0, \delta_1, \delta_2, \varepsilon_1$ 和 ε_2,则存在滤波器(3),使得滤波误差系统(4)鲁棒渐近稳定,且 $\max\limits_{M \in \Omega} \| T_{\tilde{z}w_2}(s) \|_2 < \eta, \max\limits_{M \in \Omega} \| T_{\tilde{z}w_1}(s) \|_\infty < \gamma$,其充分条件为存在矩阵 $Q \in R^{r \times r}$, $R \in R^{n \times n}$, $S \in R^{n \times n}$, $T \in R^{n \times n}$, $\overline{A}_F \in R^{n \times n}$, $\overline{B}_F \in R^{n \times m}$, $\overline{C}_F \in R^{r \times n}$, $0 < \overline{P}_{21i} = \overline{P}_{21i}^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$, $\overline{P}_{22i} \in R^{n \times n}$, $0 < \overline{P}_{23i} = \overline{P}_{23i}^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$, $0 < \overline{P}_{\infty 1i} = \overline{P}_{\infty 1i}^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$, $\overline{P}_{\infty 2i}^{\mathrm{T}} \in R^{n \times n}$, $0 < \overline{P}_{\infty 3i} = \overline{P}_{\infty 3i} \in R^{n \times n}$,使得式(8)成立,同时满足如下条件:

$$\begin{bmatrix} -Q & * & * \\ \overline{C}_F^{\mathrm{T}} & -\overline{P}_{21i} & * \\ L_i^{\mathrm{T}} - \overline{C}_F^{\mathrm{T}} & -\overline{P}_{22i}^{\mathrm{T}} & -\overline{P}_{23i} \end{bmatrix} < 0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix} -\overline{A}_F - \overline{A}_F^{\mathrm{T}} & * & * & * & * \\ A_i^{\mathrm{T}} S + C_i^{\mathrm{T}} \overline{B}_F^{\mathrm{T}} + \overline{A}_F^{\mathrm{T}} & A_1^{\mathrm{T}} R + R^{\mathrm{T}} A_i & * & * & * \\ \overline{P}_{21i} - \delta_2 \overline{A}_F + T^{\mathrm{T}} & \Gamma_1 & \delta_2 T + \delta_2 T^{\mathrm{T}} & * & * \\ \overline{P}_{22i}^{\mathrm{T}} - S - T^{\mathrm{T}} & \overline{P}_{23i} + \delta_1 R^{\mathrm{T}} A_i - R & -\delta_1 S - \delta_2 T^{\mathrm{T}} & -\delta_1 R - \delta_1 R^{\mathrm{T}} & * \\ B_{2i}^{\mathrm{T}} S + D_{2i}^{\mathrm{T}} \overline{B}_F^{\mathrm{T}} & B_{2i}^{\mathrm{T}} R & \delta_1 B_{2i}^{\mathrm{T}} S + \delta_2 D_{2i}^{\mathrm{T}} \overline{B}_F^{\mathrm{T}} & \delta_1 B_{2i}^{\mathrm{T}} R & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix} -\overline{A}_F - \overline{A}_F^{\mathrm{T}} & * & * & * & * & * \\ A_i^{\mathrm{T}} S + C_i^{\mathrm{T}} \overline{B}_F^{\mathrm{T}} + \overline{A}_F^{\mathrm{T}} & A_i^{\mathrm{T}} R + R^{\mathrm{T}} A_i & * & * & * & * \\ \overline{P}_{\infty 1i} - \varepsilon_2 \overline{A}_F + T^{\mathrm{T}} & \Gamma_2 & \varepsilon_2 T + \varepsilon_2 T^{\mathrm{T}} & * & * & * \\ \overline{P}_{\infty 2i}^{\mathrm{T}} - S - T^{\mathrm{T}} & \overline{P}_{\infty 3i} + \varepsilon_1 R^{\mathrm{T}} A_i - R & -\varepsilon_1 S - \varepsilon_2 T^{\mathrm{T}} & -\varepsilon_1 R - \varepsilon_1 R^{\mathrm{T}} & * & * \\ B_{1i}^{\mathrm{T}} S + D_{1i}^{\mathrm{T}} \overline{B}_F^{\mathrm{T}} & B_{1i}^{\mathrm{T}} R & \varepsilon_1 B_{1i}^{\mathrm{T}} S + \varepsilon_2 D_{1i}^{\mathrm{T}} \overline{B}_F^{\mathrm{T}} & \varepsilon_1 B_{1i}^{\mathrm{T}} R & -I & * \\ \overline{C}_F & L_i - \overline{C}_F & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \tag{23}$$

其中

$$\Gamma_1 = \overline{P}_{22i} + \delta_1 S^{\mathrm{T}} A_i + \delta_2 \overline{A}_F + \delta_2 \overline{B}_F C_i,$$
$$\Gamma_2 = \overline{P}_{\infty 2i} + \varepsilon_1 S^{\mathrm{T}} A_i + \varepsilon_2 \overline{A}_F + \varepsilon_2 \overline{B}_F C_i,$$
$$\forall i = 1, \cdots, N.$$

进而,若矩阵不等式(8),(21)～(23)存在一个可行解 $Q^*, R^*, S^*, T^*, \overline{A}_F^*, \overline{B}_F^*, \overline{C}_F^*, \overline{P}_{21i}^*, \overline{P}_{22i}^*, \overline{P}_{23i}^*, \overline{P}_{\infty 1i}^*, \overline{P}_{\infty 2i}^*$ 和 $\overline{P}_{\infty 3i}^*$,则鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器(3)的参数矩阵可由下式得到:

$$A_F = (T^*)^{-1} \overline{A}_F^*, \; B_F = (T^*)^{-1} \overline{B}_F^*, \; C_F = \overline{C}_F^*. \tag{24}$$

限于篇幅,证明略.

推论 1　给定 $\gamma > 0$,若优化问题

$$\begin{cases} \min\limits_{\delta_1,\delta_2,\varepsilon_1,\varepsilon_2} \eta, \\ \text{s.t.}\ (8),(21) \sim (23) \end{cases} \tag{25}$$

有解,则结合定理 4 和式(24),利用该优化问题的最优解 $\delta_1,\delta_2,\varepsilon_1$ 和 ε_2,可以得到系统(1)的最优鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器,相应的鲁棒 H_2 性能的上界是 η.

注 2　给定 $\delta_1,\delta_2,\varepsilon_1$ 和 ε_2,则式(8),(21)～(23)是关于 $Q,R,S,T,\overline{A_F},\overline{B_F}$ 和 $\overline{C_F}$ 等矩阵变量的 LMI系统,可运用 Matlab 中的 LMI Toolbox 判断其可行性. 因此,问题(25)是具有 LMI约束的参数 δ_1, δ_2,ε_1 和 ε_2 的优化问题,可以借助于数值优化算法,如 Matlab Toolbox 中的 fminsearch 函数等,方便地进行求解.

4　仿真示例

考虑式(1)描述的不确定系统,其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 1.2 - a & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.35 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C = [0.35 + b \quad -0.65],$$

$$D_1 = 0.4,\ D_2 = 1.3,\ L = [0.2 \quad 0].$$

式中的不确定参数 $0 \le a \le 0.5$,$0 \le b \le 1$.

给定 $\gamma = 0.5$,采用本文方法设计鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器. 首先,运用 fminsearch 函数求解优化问题(25),得到 η 的最小值为 0.193 5,相应的最优解为 $\delta_1 = 1.271\ 5$,$\delta_2 = 1.267\ 9$,$\varepsilon_1 = 0.719\ 3$,$\varepsilon_2 = 0.778\ 2$; 然后,利用问题(25)的最优解,并结合定理 4,可得构造 H_2/H_∞ 滤波器(3)所需的参数矩阵为

$$T^* = \begin{bmatrix} -0.282\ 2 & 0.173\ 9 \\ -0.182\ 3 & -0.463\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\overline{A_F^*} = \begin{bmatrix} 0.121\ 0 & 0.259\ 8 \\ -0.114\ 4 & 0.326\ 3 \end{bmatrix},$$

$$\overline{B_F^*} = \begin{bmatrix} -0.055\ 8 \\ -0.282\ 5 \end{bmatrix},$$

$$\overline{C_F^*} = [0.084\ 4 \quad 0.018\ 8]. \tag{26}$$

于是,由式(24)可得 H_2/H_∞ 滤波器(3)的参数矩阵为

$$A_F = \begin{bmatrix} -0.222\ 6 & -1.090\ 6 \\ 0.334\ 7 & -0.275\ 4 \end{bmatrix},\ B_F = \begin{bmatrix} 0.461\ 8 \\ 0.428\ 2 \end{bmatrix},$$

$$C_F = [0.084\ 4 \quad 0.018\ 8]. \tag{27}$$

相应滤波误差系统(4)的实际鲁棒 H_∞ 性能和鲁棒 H_2 性能分别为 0.367 2 和 0.189 3.

为进一步检验本文方法的有效性,对于不同的干扰抑制水平 γ,重复以上步骤,可得到相应的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器. 表 1 给出了本文方法与文献[3,4]给出的基于二次稳定方法的结果对比.

表 1　相应的鲁棒 H_2 性能

干扰抑制水平 γ	文献[3,4]	本文方法	干扰抑制水平 γ	文献[3,4]	本文方法
0.31	—	0.225 9	0.50	2.267 1	0.189 3
0.35	—	0.205 3	0.55	0.215 1	0.189 2
0.40	—	0.192 6	0.60	0.209 5	0.189 2
0.45	—	0.190 0	0.65	0.208 4	0.189 2

由表 1 可以看出:

1) 与基于二次稳定的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器设计方法相比,本文方法具有较小的保守性,同时进一步验证了第 3 节的理论分析结果;

2) 在 $0.31 \le \gamma \le 0.45$ 的情况下,运用基于二次稳定的方法难以得到可行的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器,而采用本文方法仍能设计出满足要求的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器.

5　结　论

本文提出了一种具有参数依赖 Lyapunov 函数的鲁棒 H_2/H_∞ 性能准则,并将其应用于凸多面体不确定连续系统的鲁棒 H_2/H_∞ 滤波器优化设计. 与传统的基于二次稳定的设计方法相比,该方法具有较小的保守性.

参考文献(References)

[1] Wang Z, Huang B. Robust H_2/H_∞ filtering for linear systems with error variance constraints[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2000, 48(8): 2463-2467.

[2] Wang Z, Unbehauen H. Robust H_2/H_∞-state estimation for systems with error variance constraints: The continuous-time case[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(5): 1061-1065.

[3] Palhares R M, Peres P L D. LMI approach to the mixed H_2/H_∞ filtering design for discrete-time uncertain systems[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2001, 37(1): 292-296.

[4] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Yu L. Robust control — Linear matrix inequality method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[5] Gao H, Lam J, Xie L, et al. New approach to mixed H_2/H_∞ filtering for polytopic discrete-time systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2005, 53(8): 3183-3192.

[6] Mehdi D, Boukas E K, Bachelier O. Static output feedback design for uncertain linear discrete-time systems[J]. IMA J of Mathematical Control and Information, 2004, 21(1): 1-13.