第 22 卷 第 3 期 控 制 与 决 策 2007 年 3 月
Vol. 22 No. 3 Control and Decision Mar. 2007

文章编号: 1001-0920(2007)03-0322-04

一类 Delta 算子不确定时滞系统保性能滤波

刘晓华, 刘 浩
(鲁东大学 数学与信息学院, 山东 烟台 264025)

摘 要: 针对一类具有凸多面体参数不确定性的 Delta 算子时滞系统,研究其保性能滤波问题. 采用线性矩阵不等式(LMI)方法, 给出了滤波器存在的充分条件和显式表达式. 给出的滤波器满足滤波误差动态渐近稳定和保性能方程最小. 所提出的方法可将连续系统和离散系统统一到 Delta 算子框架下. 仿真例子证明了该方法的可行性.

关键词: 保性能滤波; 线性矩阵不等式; 凸多面体不确定性; Delta 算子时滞系统
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Guaranteed cost filtering for a class of Delta-operator uncertain time delay systems

LIU Xiao-hua, LIU Hao
(School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, China. Correspondent: LIU Xiao-hua, E-mail: xhliu_yt@sina.com)

Abstract: For a class of Delta-operator polytypic uncertain linear systems with time delay, the problem of guaranteed cost filtering is investigated. The sufficient conditions for the existence of filter and filter design methods are established by using LMI approach. The guaranteed cost filter guarantes asymptotic stability for filtering error dynamics and minimizing performance measures. The proposed metod brings previous related conclusions of continuous and discrete-time systems into the unified Delta-operator form. A numerical simulation shows the feasibility of the developed algorithms.

Key words: Guaranteed cost filtering; Linear matrix inequality; Polytypic uncertainty; Delta-operator time-delay systems

1 引 言

因为滤波设计能处理模型中的不确定性,所以滤波器被广泛应用于科学和工程的不同分支[1]. Li 和 Fu[2]用线性矩阵不等式(LMI)方法研究了范数有界不确定连续时间系统的鲁棒 H_∞滤波问题. Geromel 等[3]用 LMI 方法处理凸不确定离散时间系统 H_2 和 H_∞鲁棒滤波问题. 由于实际系统中不可避免地存在时滞现象,时滞系统的滤波问题得到了普遍的关注. Wang 和 Mau[4]研究了大范围离散时间延迟干扰系统的稳定状态观测器设计; Hsiao 和 Pan[5]研究了多时滞随机系统的鲁棒卡尔曼滤波问题. Guan 等[6]用 ARE 方法研究了离散时间时滞系统保性能控制,然而,这种方法在求保性能控制器时要预先给定参数值,有一定的保守性; Kim[7]用 LMI 方法设计了时滞不确定系统的保性能滤波; Kim 等[8]用 LMI 方法设计了凸多面体时滞不确定离散时间系统的保性能滤波和 H_∞滤波.

Delta 算子[9]是一种新的离散化方法,它不仅避免了传统移位算子方法在高速采样时引起病态条件问题,而且当采样周期趋于零时,Delta 算子离散化模型趋近于原来的连续模型,所得结果也趋于连续情形的相应结果.

目前,在 Delta 算子系统的鲁棒滤波方面的研究取得了一些成果. 文献[10,11]研究了范数有界不确定 Delta 算子系统在约束条件下的鲁棒滤波问题. 文献[12]研究了范数有界不确定 Delta 算子系统 H_∞鲁棒滤波. 需要指出的是,在以上文献中研究的鲁棒滤波问题均是采用 Riccati 方法.

收稿日期: 2005-11-28; 修回日期: 2006-02-10.
基金项目: 山东省自然科学基金项目(2005G01).
作者简介: 刘晓华(1959—),男,山东烟台人,教授,博士,从事复杂系统控制理论、预测控制等研究; 刘浩(1981—),女,山东威海人,硕士生,从事复杂系统控制理论、鲁棒控制理论等研究.

本文采用 LMI 方法,研究凸多面体不确定性 Delta 算子时滞系统的保性能鲁棒滤波问题,其中,不确定参数属于一个凸有界多面体内. 给出了滤波器存在的充分条件及设计方法,该滤波器使滤波误差动态渐近稳定,保性能方程最小. 本文方法将连续系统和离散系统滤波器统一到 Delta 算子框架下.

2 问题描述

Delta(δ)算子[13]定义如下:

$$\delta = (q - 1)/T. \tag{1}$$

其中: T 为采样周期; q 为前向移位算子,即 $qx(t) = x(t+1)$.

考虑如下线性凸多面体不确定 Delta 算子时滞系统:

$$\begin{cases} \delta x(k) = Ax(k) + A_d x(k-d) + Bw(k), \\ y(k) = Cx(k) + Dw(k), \\ x(k) = \phi_1(k), \ -d \le k \le 0. \end{cases} \tag{2}$$

其中: $x(k) \in R^n$ 为状态向量, $y(k) \in R^r$ 为可测输出向量, $w(k) \in R^m$ 为干扰信号且 $\phi_1(k)$ 为初始值方程, $d > 0$ 为时滞. 这里,系统矩阵被认为是未知的,但属于已知的凸多面体紧集内,即

$$(A, A_d, B, C, D) \in \Phi, \tag{3}$$

其中

$$\Phi := \Big\{ (A, A_d, B, C, D) \,\Big|\, (A, A_d, B, C, D) = \sum_{i=1}^{K} \tau_i (A_i, A_{di}, B_i, C_i, D_i), \ \sum_{i=1}^{k} \tau_i = 1 \Big\},$$

并且 $(A_i, A_{di}, B_i, C_i, D_i)\ (i = 1, \cdots, k)$ 指上面的凸多面体的第 $i\ (i = 1, \cdots, k)$ 个向量集.

假设 1 系统(1)是渐近稳定的. 考虑如下线性滤波器:

$$\delta \hat{x}(k) = G\hat{x}(k) + Ky(k), \tag{4}$$

其中 G 和 K 是滤波自变量. 如果取误差状态向量为

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k), \tag{5}$$

则误差动态系统为

$$\begin{cases} \delta e(k) = Ge(k) + (A - KC - G)x(k) + \\ \qquad A_d x(k-d) + (B + KD)w(k), \\ z(k) = Le(k), \end{cases} \tag{6}$$

其中 $z(k)$ 为误差状态输出.

定义增广状态向量

$$x_f(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ e(k) \end{bmatrix}, \tag{7}$$

则滤波误差动态系统为

$$\begin{cases} \delta x_f(k) = A_f x_f(k) + A_{df} x_f(k-d) + D_f w(k), \\ z(k) = C_f x_f(k), \\ x_f(k) = \phi_f(k) = \begin{bmatrix} \phi_1(k) \\ \phi_2(k) \end{bmatrix}, \ -d \le k \le 0. \end{cases} \tag{8}$$

其中: $\phi_2(k)$ 是误差的初始值方程,

$$A_f = \begin{bmatrix} A & 0 \\ A - KC - G & G \end{bmatrix}, \ A_{df} = \begin{bmatrix} A_d & 0 \\ A_d & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_f = \begin{bmatrix} B \\ B - KD \end{bmatrix}, C_f = [0 \quad L]. \tag{9}$$

取性能保指标为

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} z^{\mathrm{T}}(k) z(k). \tag{10}$$

3 保性能滤波

在研究保性能滤波时,假设 $B = 0$ 和 $D = 0$,设计的目的是:确定滤波器变量 G 和 K,使滤波误差动态系统保性能方程最小.

定理 1 对系统(8)和性能指标(10),如果存在对称正定矩阵 P 和 S,使得

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} + C_f^{\mathrm{T}} C_f & TPA_{df} + T^2 A_f^{\mathrm{T}} PA_{df} \\ * & T^2 A_{df}^{\mathrm{T}} PA_{df} - S \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

其中

$$\Pi_{11} = TPA_f + TA_f^{\mathrm{T}} P + T^2 A_f^{\mathrm{T}} PA_f + S,$$

则系统(8)是渐近稳定的且满足

$$J \le \phi_f^{\mathrm{T}}(0) P\phi_f(0) + \sum_{i=-d}^{-1} \phi_f^{\mathrm{T}}(i) S\phi_f(i). \tag{12}$$

证明 定义如下 Lyapunov 方程:

$$V(x_f(k)) = x_f^{\mathrm{T}}(k) Px_f(k) + \sum_{i=k-d}^{k-1} x_f^{\mathrm{T}}(i) Sx_f(i), \tag{13}$$

则式(13)的差分可表示为

$$\begin{aligned} \Delta V = {} & Tx_f^{\mathrm{T}}(k) P\delta x_f(k) + T^2(\delta x_f(k))^{\mathrm{T}} P\delta x_f(k) + \\ & T(\delta x_f(k))^{\mathrm{T}} Px_f(k) + x_f^{\mathrm{T}}(k) Sx_f(k) - \\ & x_f^{\mathrm{T}}(k-d) Sx_f(k-d). \end{aligned} \tag{14}$$

定义

$$\eta(k) = [x_f^{\mathrm{T}}(k) \quad x_f^{\mathrm{T}}(k-d)],$$

则式(14)可写为

$$\Delta V = \eta^{\mathrm{T}}(k) X\eta(k), \tag{15}$$

其中

$$X = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & TPA_{df} + T^2 A_f^{\mathrm{T}} PA_{df} \\ * & T^2 A_{df}^{\mathrm{T}} PA_{df} - S \end{bmatrix}. \tag{16}$$

由式(11)知 $X < 0$,由文献[7]的 Lyapunov-Krasovski 稳定性结果知, $X < 0$ 导致滤波误差动态是渐近稳定的,则有 $x_f(k) \to 0$,当 $k \to \infty$ 时.

采用 Lyapunov 方程(13),并利用式(11)可以得到

$$\Delta V < -z^{\mathrm{T}}(k) z(k) < 0.$$

对上式两边从 $k = 0$ 到 ∞ 求和,并利用 $x_f(k) \to 0$,当 $k \to \infty$ 时,得

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} z^{\mathrm T}(k)\, z(k) \le$$

$$\phi_f^{\mathrm T}(0)\, P\phi_f(0) + \sum_{i=-d}^{-1} \phi_f^{\mathrm T}(i)\, S\phi_f(i). \qquad \square$$

定理 2 如果存在正定对称矩阵 P_1, P_2, S_1, S_2, S_3 和矩阵 M_1, M_2 满足下面的优化问题:

$$\min\{\alpha + \mathrm{tr}(Q)\},$$

$$\text{s.t.}\ 1)\begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ * & \phi_{22} \end{bmatrix} < 0,$$

$$2)\ -\alpha + \phi_1^{\mathrm T}(0)\, P_1 \phi_1(0) + \phi_2^{\mathrm T}(0)\, P_2 \phi_2(0) < 0,$$

$$3)\ -Q + N_1^{\mathrm T} S_1 N_1 + N_2^{\mathrm T} S_2 N_1 + N_1^{\mathrm T} S_2 N_2 + N_2^{\mathrm T} S_3 N_2 < 0. \qquad (17)$$

其中

$$\phi_{11} = \begin{bmatrix} -P_1 & 0 & TP_1A_i \\ * & -P_2 & TP_2A_i - TM_2C_i - TM_1 \\ * & * & TP_1A_i + TA_i^{\mathrm T}P_1 + S_1 \end{bmatrix},$$

$$\phi_{12} = \begin{bmatrix} 0 & TP_1A_{di} & 0 \\ TM_1 & TP_2A_{di} & 0 \\ TA_i^{\mathrm T}P_2 - TC^{\mathrm T}M_2^{\mathrm T} - TM_1^{\mathrm T} + S_2 & TP_1A_{di} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\phi_{22} = \begin{bmatrix} TM_1 + TM_1^{\mathrm T} + S_3 + L^{\mathrm T}L & TP_2A_{di} & 0 \\ * & -S_1 & -S_2 \\ * & * & -S_3 \end{bmatrix},$$

$$(A_i, A_{di}, C_i) \in \Lambda(\Phi),\ M_1 = P_2G,\ M_2 = P_2K,$$

$$\sum_{i=-d}^{-1} \phi_f(i)\,\phi_f^{\mathrm T}(i) = NN^{\mathrm T} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} [N_1^{\mathrm T} \quad N_2^{\mathrm T}].$$

则式(4) 是 Delta 算子保性能滤波器,且 $J^* = \alpha + \mathrm{tr}(Q)$ 是保性能方程的上界.

证明 令正定对称矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},\quad S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_3 \end{bmatrix},$$

由 Schur 补引理,则式(10) 等价于

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & TA_f & TA_{df} \\ * & TPA_f + TA_F^{\mathrm T}P + S + C_f^{\mathrm T}C_f & TPA_{df} \\ * & * & -S \end{bmatrix} < 0. \qquad (18)$$

对上式两边分别左乘右乘 $\mathrm{diag}(P, I, I)$,并由式(10),则上式等价于

$$\begin{bmatrix} \bar\Phi_{11} & \bar\Phi_{12} \\ * & \bar\Phi_{22} \end{bmatrix} < 0. \qquad (19)$$

其中

$$\bar\Phi_{11} = \begin{bmatrix} -P_1 & 0 & TP_1A \\ * & -P_2 & TP_2A - TP_2KC - TP_2G \\ * & * & TP_1A + TA^{\mathrm T}P_1 + S_1 \end{bmatrix},$$

$$\bar\Phi_{12} = \begin{bmatrix} 0 & TP_1A_d & 0 \\ TP_2G & TP_2A_d & 0 \\ (TP_2A - TP_2KC - TP_2G)^{\mathrm T} + S_2 & TP_1A_d & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar\Phi_{22} = \begin{bmatrix} TM_1 + TM_1^{\mathrm T} + S_3 + L^{\mathrm T}L & TP_2A_d & 0 \\ * & -S_1 & -S_2 \\ * & * & -S_3 \end{bmatrix}.$$

令 $M_1 = P_2G, M_2 = P_2K$,由凸多面体紧集的性质,则得式(17) 的 1).

由

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{\mathrm T}(k)\, z(k) \le \phi_f^{\mathrm T}(0)\, P\phi_f(0) + \sum_{i=-d}^{-1} \phi_f^{\mathrm T}(i)\, S\phi_f(i), \qquad (20)$$

则式(20) 右边第 1 项可改写为 $-\alpha + \phi_f^{\mathrm T}(0)\, P\phi_f(0) < 0$. 即得式(17) 的 2).

同理式(20) 右边第 2 项有下列关系:

$$\sum_{i=-d}^{-1} \phi_f^{\mathrm T}(i)\, S\phi_f(i) = \sum_{i=-d}^{-1} \mathrm{tr}(\phi_f^{\mathrm T}(i)\, S\phi_f(i)) = \mathrm{tr}(NN^{\mathrm T}S) = \mathrm{tr}(N^{\mathrm T}SN) < \mathrm{tr}(Q).$$

所以 $-Q + N^{\mathrm T}SN < 0$ 等价于式(17) 的 3). □

注 1 Delta 算子不确定系统(2) 的采样周期作为式(17) 的显式参数,便于观察和分析不同的采样周期对于闭环系统的保性能滤波的影响.

注 2 令 $T = 0$,可得文献[7] 连续情形的判定结果;在式(17) 中令 $T = 1, A = A + I$,可得文献[8] 离散情形的判别结果.

4 仿真实例

下面通过例子说明如何用上述步骤设计凸多面体不确定 Delta 算子时滞系统的保性能滤波器.

考虑如下凸多面体不确定性 Delta 算子时滞系统:

$$\begin{cases} \delta x(k) = \begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 1 & -5 + \Delta_1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.1 & -0.3 \end{bmatrix} x(k-d) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w(k), \\ y(k) = [1 + \Delta_2 \quad 0]\, x(k) + w(k), \\ z(k) = [1 \quad 1]\, e(k), \\ \phi_f(k) = [e^{k+1} \quad 0 \quad 0.1 \quad 1]^{\mathrm T}, \\ d = 2. \end{cases}$$

这里,取 $-0.1 \le \Delta_1 \le 0.1$ 且 $0 \le \Delta_2 \le 1$, $T = 0.01$.

研究保性能滤波问题时,取 $B = 0, D = 0$. 通过

仿真 ,所得解为

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.0529 & 0.2876 \\ 0.2876 & 10.3218 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1.0101 & 0.0001 \\ 0.0001 & 1.0100 \end{bmatrix},$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0.0011 & -0.004 \\ -0.004 & 0.0247 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = 10^{-6} * \begin{bmatrix} 0.0017 & 0.0003 \\ 0.0003 & 0.2070 \end{bmatrix},$$

$$S_3 = 10^{-4} * \begin{bmatrix} 0.2430 & -0.0175 \\ -0.0175 & 0.0028 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = 1.4110,$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} -101.0062 & 0.0008 \\ 0.0008 & -100.9999 \end{bmatrix},$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 2.8352 \\ 0.1891 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0002 & 0.0004 & 0 & 0 \\ 0.0004 & 0.0011 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00013 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.00011 \end{bmatrix}.$$

因此 ,仿真得到的鲁棒保性能滤波和最优保性能为

$$\delta\hat{x}(k) = \begin{bmatrix} -0.1062 & 0.0005 \\ -0.0003 & -0.9859 \end{bmatrix} \hat{x}(k) + \begin{bmatrix} 2.8070 \\ 0.1872 \end{bmatrix} y(k),$$

$$J = 1.4123.$$

5　结　　论

本文采用 LMI 方法 ,给出了满足滤波设计目标的 Delta 算子时滞凸不确定系统最优保性能滤波. 滤波参数 $G, K(G = P_2^{-1}M_1, K = P_2^{-1}M_2)$ 和保性能方程上界 $(J^* = \alpha + \mathrm{tr}(Q))$ 可以用 LMI 控制工具箱直接解出. 仿真算例说明了该设计方法的可行性.

参考文献(References)

[1] Mahmoud M S ,Xie L ,Soh Y C. Robust kalman filtering for discrete state-delay systems [J]. IEE Proc Control Theory Appication ,2000 ,147 (6) : 613-618.

[2] Li H , Fu M. A linear matrix inequality approach to robust H_∞ filtering [J]. IEEE Trans on Signal Processing ,1997 ,45 (9) : 2338-2350.

[3] Geromel J C ,Bernussou J , Garcia G, et al. H_2 and H_∞ robust filtering for discrete-time linear systems[C]. Proc of IEEE Conf on Decision and Control. Tampa ,1998 : 632-637.

[4] Wang W J , Mau L G. Stabilization and estimation for perturbed discrete time-delay large-scale systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control , 1997 , 42 (9) : 1277-1282.

[5] Hsiao F H , Pan S T. Robust kalman filter synthesis for uncertain multiple time-delay stochastic systems[J].J of Dynamic Systems , Measurement and Control ,1996 ,118 (4) : 803-808.

[6] Guan X, Lin Z, Duan G. Robust guaranteed cost control for discrete-time uncertain systems with time delay[J]. IEE Proc Control Theory Application , 1999 , 146 (6) : 598-602.

[7] Kim J H. Robust guaranteed cost filtering for uncertain systems with time-varying delay via LMI approach[J]. Trans on Control Automation and Systems Engineering , 2001 , 13 (1) : 27-31.

[8] Kim J H , Ahn S J. Guaranteed cost and H_∞ filtering for discrete-time poly topic uncertain systems with time delay[J]. J of the Franklin Institute , 2005 , 342 (1) : 365-378.

[9] Goodwin G C , Middleton R H , Poor H V. High-speed digital signal processing and control [J]. Proc of the IEEE , 1992 , 80 (2) : 240-259.

[10] 张端金 , 王忠勇 , 吴捷. Delta 算子描述的离散系统鲁棒滤波[J]. 系统工程与电子技术 , 2003 , 25 (1) : 71-73.
(Zhang D J , Wang Z Y, Wu J. Robust filtering for delta operator-formulated discrete time systems [J]. Systems Engineering and Electronics ,2003 , 25 (1) : 71-73.)

[11] 张端金 , 吴捷. 具有区域极点和方差约束的 Delta 算子系统鲁棒 H_∞ 滤波[J]. 控制与决策 , 2004 ,19 (1) : 12-16.
(Zhang D J , Wu J. Robust H_∞ filtering for delta operator formulated systems with circular pole and error variance constraints [J]. Control and Decision , 2004 ,19 (1) : 12-16.)

[12] Zhang D J , Gao Y, Wu J. Robust H_∞ filter for the delta operator formulated systems with parameter uncertainty[C]. Proc of the 2003 IEEE Int Conf on Robotics , Intelligent Systems and Signal Processing. Changsha , 2003 : 1168-1173.

[13] Middleton R H , Goodwin G C. Improved finite word length characteristics in digital control using delta operators [J]. IEEE Trans on Automatic Control , 1986 , 31 (11) : 1015-1021.