

文章编号: 1001-0920(2007)03-0329-04

## 基于非脆弱控制器设计的不确定模糊系统稳定性研究

张乐<sup>1,2</sup>, 井元伟<sup>1</sup>

(1. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004; 2. 沈阳大学 信息工程学院, 沈阳 110044)

**摘要:** 研究不确定动态模糊系统的稳定性问题. 提出一类不确定 T-S 动态模糊系统的非脆弱控制问题, 并进行了控制器设计. 首先给出不确定 T-S 动态模糊系统的模型; 然后利用 Lyapunov 函数方法, 研究连续不确定动态模糊系统的非脆弱控制器设计, 得到基于 LMI 的不确定动态模糊系统的全局渐近稳定性条件. 通过对一级倒立摆的不确定模糊非脆弱控制器设计的实例, 表明了设计方法的可行性和有效性.

**关键词:** 非线性; 动态补偿控制; 非脆弱控制; T-S 模糊模型; Lyapunov 函数; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

### Stability of a class of uncertain fuzzy systems based on non-fragile controller design

ZHANG Le<sup>1,2</sup>, JING Yuan-wei<sup>1</sup>

(1. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Information and Engineering, Shenyang University, Shenyang 110044, China. Correspondent: ZHANG Le, E-mail: snowise@126.com)

**Abstract:** The stabilization of uncertain dynamical fuzzy systems is studied. A non-fragile control is presented for a class of uncertainty T-S dynamical fuzzy systems, and the controller of this kind of model is designed. A class of uncertainty T-S dynamical fuzzy systems is given using the Lyapunov function method. The non-fragile controller design of continuous uncertain dynamical fuzzy system is given. Moreover, global asymptotic stability conditions of the uncertainty dynamical fuzzy system are given using LMI. An inverted pendulum example of non-fragile controller design of uncertainty T-S fuzzy systems shows the feasibility and the effectiveness of the method.

**Key words:** Nonlinear; Dynamic parallel distributed compensation; Non-fragile control; T-S fuzzy model; Lyapunov function; Linear matrix inequality

### 1 引言

近年来,利用模糊控制方法解决复杂系统中的非线性和不确定性问题得到了广泛研究与应用<sup>[1-4]</sup>. Takagi 和 Sugeno<sup>[5]</sup>提出使用 T-S 模糊技术来表达复杂系统,其模糊规则的后件部分给出了确切的数学描述.非脆弱控制问题也已成为人们感兴趣的课题<sup>[6-8]</sup>. Yang 等<sup>[6,7]</sup>运用 Riccati 不等式方法设计了非脆弱 H 控制器.在传统的最优和鲁棒控制器设计中,对象模型在所允许的范围内变化时,可能会出现控制器的系数发生极微小的偏移,将导致闭环系统的稳定性被破坏(或性能下降),这种现象即为控制器的脆弱性.实际上,控制器实现时受诸多因素的影响,控制器的参数会发生一定变化,而且这种微小

变化还将引起其他性能的恶化.这就要求所设计的控制器必须能够承受某种程度的变化,而且还应具有一定的非脆弱性.因此,非脆弱控制器设计即是对给定对象 P,寻找非脆弱反馈控制器,以保证控制器的参数在所允许的变化范围内变化时,闭环系统稳定,同时还应满足给定的性能指标<sup>[8]</sup>.

现有的文献中,多数都考虑了非脆弱与 H 控制器设计相结合,且所研究的系统多为线性系统.与上述文献不同,本文考虑将动态补偿控制器的状态方程与非脆弱特性相结合,首先给出了非线性不确定模糊系统 T-S 模型以及非脆弱控制器模型;然后利用 LMI 给出了基于非脆弱控制器的 Lyapunov 函数的稳定性分析;最后给出仿真算例.

收稿日期: 2006-03-08; 修回日期: 2006-05-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60274099); 国家 863 计划项目(2004AA412030).

作者简介: 张乐(1975—),男,沈阳人,讲师,博士生,从事非线性控制、模糊系统的稳定性等研究;井元伟(1956—),男,辽宁西丰人,教授,博士生导师,从事复杂系统、相似性结构分析等研究.

## 2 问题描述

### 2.1 T-S 模糊模型

考虑由  $m$  条规则构成的连续 T-S 模糊模型描述的非线性系统<sup>[9]</sup>

$$R^i: \text{if } z_1(t) \text{ is } F_1^i \dots \text{and } z_n(t) \text{ is } F_n^i, \\ \text{then } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t),$$

$$y(t) = C_i x(t), \quad i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

其中:  $R^i$  为第  $i$  条模糊规则,  $m$  为模糊规则的个数,  $F_j^i$  为模糊子集,  $z(t)$  为前件变量,  $x(t)$  为状态向量,  $u(t)$  为输入向量,  $y(t)$  为输出向量. 另外, 隶属度函数可表示为

$$w^i(x(t)) = \prod_{j=1}^n F_j^i, \quad (2)$$

规范化隶属度为

$$h_i(x(t)) = \frac{w_i(x(t))}{\sum_{i=1}^m w_i(x(t))}. \quad (3)$$

易知,  $h_i(x(t)) > 0$ , 并且  $\sum_{i=1}^m h_i(x(t)) = 1$ .

如果考虑不确定因素, 则全局模型可描述为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m h_i [(A_i + \Delta A_i) x(t) + (B_i + \Delta B_i) u(t)], \\ y(t) = \sum_{i=1}^m h_i C_i x(t). \quad (4)$$

### 2.2 基于非脆弱特性的 DPDC 控制器

如果考虑与非脆弱控制特性<sup>[7]</sup>相结合, 根据式 (4), 动态补偿控制 (DPDC) 控制器状态方程可描述为

$$\dot{x}_c(t) = \sum_{i=1}^m h_i [(A_c^i + \Delta A_c^i) x_c(t) + (B_c^i + \Delta B_c^i) y] = \\ \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^m h_i h_r [(A_c^i + \Delta A_c^i) x_c(t) + \\ (B_c^i + \Delta B_c^i) C_r x(t)], \quad (5)$$

动态控制器可描述为

$$u_c(t) = \sum_{i=1}^m h_i C_c^i x_c(t). \quad (6)$$

现取闭环系统

$$\dot{x}_{cl} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^m h_i h_r \begin{bmatrix} A_i + \Delta A_i & (B_i + \Delta B_i) C_c^r \\ (B_c^i + \Delta B_c^i) C_r & (A_c^i + \Delta A_c^i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} = \\ \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^m h_i h_r \left\{ \begin{bmatrix} A_i & B_i C_c^r \\ B_c^i C_r & A_c^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} + \right. \\ \left. \begin{bmatrix} \Delta A_i & \Delta B_i C_c^r \\ \Delta B_c^i C_r & \Delta A_c^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \right\} +$$

$$\left. \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_c^i & A_c^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_r & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix} \right\}, \quad (7)$$

$$\text{令 } \dot{x}_{cl} = \sum_{i=1}^m h_i \sum_{r=1}^m h_r [A_{cl} + \Delta A_{cl} D_c^{cl} + A_c^{cl} D_{cl}] x_{cl}.$$

## 3 主要结果

假设 1 考虑的不确定参数范数有界, 具有如下形式:

$$\begin{bmatrix} A_i & B_i \\ A_c^i & B_c^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_i & F_i & M_i & G_i \\ E_c^i & F_c^i & M_c^i & G_c^i \end{bmatrix}, \\ i = 1, 2, \dots, m.$$

其中:  $E_i, E_c^i, F_i, F_c^i, M_i, M_c^i, G_i$  和  $G_c^i$  是具有适当维数的已知常数实矩阵;  $\Delta \cdot(t)$  是未知时变矩阵, 且满足  $\|\Delta \cdot(t)\| \leq I$ .

引理 1<sup>[10]</sup> 对于所有适当维数的实矩阵  $a$  和  $b$ , 任取  $\epsilon > 0$ , 下面不等式成立:

$$a^T b + b^T a - \epsilon a^T a - \epsilon^{-1} b^T b.$$

现取 Lyapunov 函数  $V = x_{cl}^T P x_{cl}$ , 则

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m h_i \sum_{r=1}^m h_r x_{cl}^T [(A_{cl} + \Delta A_{cl} D_c^{cl} + A_c^{cl} D_{cl})^T P + \\ P (A_{cl} + \Delta A_{cl} D_c^{cl} + A_c^{cl} D_{cl})] x_{cl}. \quad (8)$$

令

$$R_{cl} = \begin{bmatrix} E_i & M_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_c^{cl} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ E_c^i & M_c^i \end{bmatrix},$$

$$S_{cl} = \begin{bmatrix} F_i & 0 \\ 0 & G_i \end{bmatrix}, \quad S_c^{cl} = \begin{bmatrix} F_c^i & 0 \\ 0 & G_c^i \end{bmatrix},$$

$$D_c^{cl} = D_{cl} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

$$A_{cl} = R_{cl} D_{cl} S_{cl}, \quad A_c^{cl} = R_c^{cl} D_{cl} S_c^{cl},$$

根据引理 1 及假设 1 可得

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^m h_i h_r x_{cl}^T [A_{cl}^T P + P R_{cl} K_{cl}^T P + \\ D_c^{clT} S_{cl}^T S_{cl} D_c^{cl} + P R_c^{cl} R_c^{clT} P + \\ D_{cl}^T S_c^{clT} S_c^{cl} D_{cl} + P A_{cl}] x_{cl}. \quad (9)$$

令

$$P = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^T & W \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^T & Z \end{bmatrix},$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^T & 0 \end{bmatrix},$$

若

$$F_1^T (A_{cl}^T P + P R_{cl} R_{cl}^T P + D_c^{clT} S_{cl}^T S_{cl} D_c^{cl} + \\ P R_c^{cl} R_c^{clT} P + D_{cl}^T S_c^{clT} S_c^{cl} D_{cl} + P A_{cl}) F_1 < 0,$$

则  $\dot{V} < 0$ . 将上式展开转化为

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

令

$$A_i = Y^T A_i X + Y^T B_i C_c^T M^T + NB_c^i C_r X + NA_c^i M^T, \tag{11}$$

$$B_i = Y^T A_i + NB_c^i C_r, \tag{12}$$

$$C_i = C_c^T M^T. \tag{13}$$

将式(11) ~ (13) 代入式(10), 可得

$$E_{ir} = \begin{bmatrix} (A_i X)^T + A_i X + (F_i X)^T + (G_i C_i)^T + E_i E_i^T + M_i M_i^T + (F_c^i C_r X)^T + (B_i C_i)^T + B_i C_i & (G_c^i M^T)^T \\ * & -4I \\ * & * \\ * & * \\ A_i^T + E_i E_i^T Y + M_i M_i^T Y + X^T F_i^T F_i + X^T C_r^T F_c^{iT} F_c^i C_r + A_i & 0 \\ 0 & 0 \\ B_i^T + B_i + Y^T E_i + Y^T M_{ii} + C_r^T F_c^{iT} F_c^i C_r + F_i^T F & N E_c^i + N M_c^i \\ * & -4I \end{bmatrix} < 0. \tag{14}$$

不难看出, 式(14) 是关于  $A_i, B_i, C_i, X, Y, M$  和  $N$  的一个线性矩阵不等式, 因此控制器的参数矩阵可通过以下公式得到:

$$C_c = C_i (M^T)^{-1}, \tag{15}$$

$$B_c^i = N^{-1} (B_i - Y^T A_i) C_r^{-1}, \tag{16}$$

$$A_c^i = N^{-1} (A_i - B_i X - Y^T B_i C_i) (M^T)^{-1}. \tag{17}$$

**定理 1** 通过使用式(5) 和(6) 所描述的 DPDC 控制器, 假设存在正定矩阵  $P$  满足线性矩阵不等式条件(10), 则模糊控制系统(4) 是渐近稳定的, 控制器参数通过式(15), (16) 和(17) 给出.

### 4 仿真结果

考虑小车倒立摆的稳定问题<sup>[11]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{g \sin x_1 - a m l x_2^2 \sin(2x_1) / 2 - a u \cos x_1}{4l/3 - a m l \cos^2 x_1}. \end{aligned}$$

其中:  $x_1$  和  $x_2$  分别为夹角和角速度;  $u$  为驱动力;  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$  为重力加速度;  $a = 1/(M + m)$ ;  $M = 8 \text{ kg}$  为小车重量;  $m = 2 \text{ kg}$  为摆杆重量;  $l = 0.5 \text{ m}$  为长度.

此系统可表示为如下模糊不确定 T-S 模型:

$$\begin{aligned} R^1: & \text{if } x_1 \text{ is about } 0, \\ & \text{then } \dot{x}(t) = (A_1 + \Delta A_1) x + (B_1 + \Delta B_1) u; \\ R^2: & \text{if } x_2 \text{ is about } \pm /2, \\ & \text{then } \dot{x} = (A_2 + \Delta A_2) x + (B_2 + \Delta B_2) u. \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{4l/3 - a m l} & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{(4l/3 - a m l b^2)} & 0 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{a}{4l/3 - a m l} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{ab}{4l/3 - a m l b^2} \end{bmatrix}, \\ E_1 &= [-0.9 \quad 10.1], E_2 = [-0.7 \quad 7.1], \\ F_1 &= [1.75 \quad 0.04], F_2 = [1.65 \quad 0.02], \\ M_1 &= [0.1 \quad -0.15], M_2 = [0.13 \quad -0.1], \\ G_1 &= [0.24], G_2 = [0.14], \\ \varphi_1(t) &= \varphi_2(t) = \sin(t). \end{aligned}$$

相应的隶属度函数为

$$h_1 = 1 - \frac{2}{|x_1|}, h_2 = 1 - h_1.$$

根据式(5) 和式(7) 可描述系统全局模型, 其中

$$\begin{aligned} E_c^1 &= [0.37 \quad 11.75], E_c^2 = [0.57 \quad 6.1], \\ F_c^1 &= [0.81 \quad -0.31], G_c^1 = [0.15 \quad 0.1], \\ F_c^2 &= [0.71 \quad -0.41], M_c^1 = [0.9 \quad 5.5], \\ M_c^2 &= [1.5 \quad 7.5], G_c^2 = [0.09 \quad 0.1], \\ \varphi_1(t) &= \varphi_2(t) = \sin(t). \end{aligned}$$

由定理 1, 通过求解 Matlab 中 LMI, 可得

$$\begin{aligned} A_c^1 &= \begin{bmatrix} 6.542 \ 0 & 55.642 \ 5 \\ -89.130 \ 6 & -638.753 \ 1 \end{bmatrix}, \\ C_c^1 &= [-0.501 \ 7 \quad 0.250 \ 7], \\ B_c^1 &= 1.0e + 003 * \begin{bmatrix} 5.548 \ 0 & -0.491 \ 3 \\ 6.283 \ 9 & 3.064 \ 3 \end{bmatrix}, \\ A_c^2 &= \begin{bmatrix} 7.358 \ 9 & 55.318 \ 7 \\ -86.798 \ 8 & -630.831 \ 5 \end{bmatrix}, \\ C_c^2 &= [-0.420 \ 2 \quad -0.246 \ 9], \\ B_c^2 &= 1.0e + 003 * \begin{bmatrix} 4.928 \ 0 & -0.686 \ 0 \\ 5.486 \ 2 & 2.883 \ 5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$P = \begin{bmatrix} 17.652 \ 8 & 1.392 \ 1 & 0.097 \ 2 & 0.008 \ 5 \\ 1.392 \ 1 & 0.1109 & 0.008 \ 5 & 0 \\ 0.097 \ 2 & 0.008 \ 5 & 0.006 & -0.002 \ 3 \\ 0.008 \ 5 & 0 & -0.002 \ 3 & 0.019 \ 7 \end{bmatrix}.$$

采取非脆弱控制器, 初始条件为  $x(0) = [1.2 \quad 3.5]$ ,  $x_c(0) = [0.5 \quad 1.5]$  时, 状态响应曲线如图 1 所示. 不采取非脆弱控制器时, 同样选取初始条件  $x(0) = [1.2 \quad 3.5]$ , 状态响应曲线如图 2 所示. 可以看出, 采取非脆弱控制器的状态响应曲线的超调以及收敛速度与不采取非脆弱控制的曲线相差不多. 但本文所考虑的非脆弱与 DPDC 相结合的控

制器更多地考虑了非脆弱性,因此牺牲了一定的超调以及收敛速度性能。

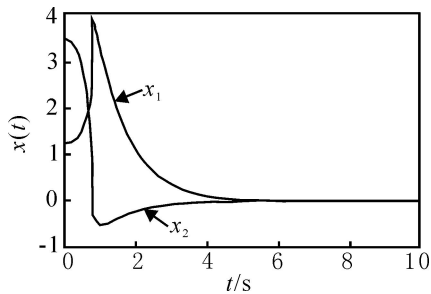


图1 使用非脆弱控制器的状态响应曲线

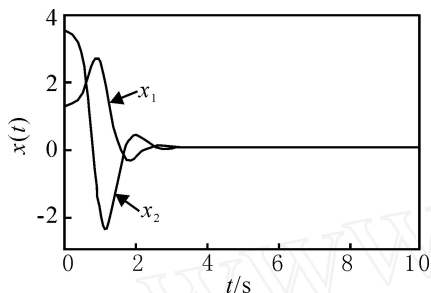


图2 不使用非脆弱控制器的状态响应曲线

## 5 结 论

本文研究一类不确定模糊非线性系统结合非脆弱特性的 DPDC 控制器设计问题. 在给出不确定模糊系统及 DPDC 控制器模型的基础上,把不确定模糊非线性系统和基于非脆弱特性的 DPDC 控制结合起来考虑,给出了不确定模糊系统渐近稳定的充分条件. 仿真结果表明了该设计方法的可行性和有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Takagi T, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2) : 135-196.
- [2] Liu X D, Zhang Q L. New approach to  $H$  controller designs based on observers for T-S fuzzy systems via LMI[J]. Automatica, 2003, 39(9) : 1571-1582.
- [3] Tanaka K, Wang H O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2003, 11(4) : 582-589.
- [4] Cao S G, Rees N W, Feng G. Lyapunov-like stability theorems for discrete-time fuzzy control systems[J]. Int J of Systems Science, 1997, 28(3) : 229-241.
- [5] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control [J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1) : 116-132.
- [6] Yang G H, Wang J L, Lin C.  $H$  control for linear systems with additive controller gain variations[J]. Int J Control, 2000, 73(16) : 1500-1506.
- [7] Yang G H, Wang J L. Non-fragile  $H$  control for linear systems with multiplicative controller gain variations [J]. Automatica, 2001, 37(4) : 727-737.
- [8] 林瑞全, 杨富文. 基于  $H$  控制理论的非脆弱控制的研究[J]. 控制与决策, 2004, 19(5) : 598-600. (Lin R Q, Yang F W. On non-fragile control based on  $H$  control theory[J]. Control and Decision, 2004, 19(5) : 598-600.)
- [9] Li J, Wang H O, Niemann David, et al. Dynamic parallel distributed compensation for Takagi-Sugeno fuzzy systems: AN LMI approach [J]. Information Science, 2000, 123(2) : 201-221.
- [10] Mahmoud M S, Mohamed Z. Stabilizing controllers using observers for uncertain systems with delays[J]. Int J of Systems Science, 2001, 32(6) : 767-773.
- [11] Cannon R H. Dynamics of Physical Systems[M]. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [2] Mazar E, Averbuch A, Bar-Shalom Y, et al. Interacting multiple model methods in target tracking: A survey[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1998, 34(1) : 103-123.
- [3] Li X R. Model-set design for multiple-model method: Part I [C]. Proc of Int Conf on Information Fusion. Annapolis, 2002: 26-33.
- [4] Li X R, Zhao Z L, Zhang P, et al. Model-set design for multiple-model method: Part [C]. Proc of Int Conf on Information Fusion. Annapolis, 2002: 1347-1354.
- [5] Li X R, Zhao Z L, Li X B. General model-set design methods for multiple-model approach [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(9) : 1260-1276.
- [6] 徐建豪, 高彦杰, 杨国庆. 交互式多模型算法中模型集选择的分析研究[J]. 航空学报, 2004, 25(4) : 352-356. (Xu J H, Gao Y J, Yang G Q. Analysis and study of model set selection in interacting multiple model algorithm[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2004, 25(4) : 352-356.)
- [7] 何衍, 郭智疆, 蒋静坪. 自适应交互多模型跟踪算法的模型集设计[J]. 电光与控制, 2002, 9(2) : 26-29. (He Y, Guo Z J, Jiang J P. Model set design of the adaptive interacting multiple model tracking algorithm [J]. Electronics Optics and Control, 2002, 9(2) : 26-29.)
- [8] Li X R, Zhang Y M, Zhi X R. Multiple-model estimation with variable structure—Part IV: Design and model-group switching algorithm [J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 1999, 35(1) : 242-254.

(上接第 328 页)