第 22 卷 第 3 期 控 制 与 决 策 2007 年 3 月
Vol. 22 No. 3 Control and Decision Mar. 2007

文章编号: 1001-0920(2007)03-0345-04

二阶线性系统全维 PI 观测器的参数化设计

王国胜[1], 吕 强[1], 段广仁[2]
(1. 装甲兵工程学院 控制工程系, 北京 100072; 2. 哈尔滨工业大学 控制理论与制导技术研究中心, 哈尔滨 150001)

摘 要: 基于一类广义 Sylvester 矩阵方程的解,提出了二阶线性系统的全维 PI 观测器设计参数化方法,给出了该类观测器的增益矩阵和左特征向量矩阵的参数化表达式. 该观测器设计的参数化方法直接基于二阶线性系统的参数矩阵,不涉及系统的变换或增广. 数值例子表明了所提方法的简单有效性.

关键词: 二阶线性系统; 比例积分观测器; 参数化; 自由度
中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Parameterization of full-order PI observers for second-order linear systems

WANG Guo-sheng[1], *LV Qiang*[1], *DUAN Guang-ren*[2]
(1. Department of Control Engineering, Academy of Armored Force Engineering, Beijing 100072, China; 2. Center for Control Theory and Guidance Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: WANG Guo-sheng, E-mail: gswang@126.com)

Abstract: Based on the solutions to a kind of generalized Sylvester equations, a parametric method to design full-order PI observers is proposed. The parametric expressions for the gain matrices and the left eigenvector matrix of the full-order PI observers are presented. The original system data is utilized directly and manipulations are involves only in 2-dimensional matrices. An example shows the effectiveness and simpleness of the proposed method.

Key words: Second-order linear systems; PI observers; Parameterization; Freedom degrees

1 引 言

在由状态空间表示的定常线性系统理论的研究中,很多控制律都是通过状态和状态函数来实现的,但由于外界干扰等原因使得这些状态不能直接测量. 解决这个问题的方法是通过观测器来构造状态或状态函数,然后再用这些估计状态来实现控制律. 观测器理论[1,2]自提出以来一直备受广大学者的重视,并已得到很多应用,如故障检测、故障诊断和隔离等[3-6],这表明观测器的研究具有重要的理论和应用意义.

二阶线性系统在机器人和空间飞行器等许多机械振动领域的广泛应用,受到很多学者的关注[7-11]. 故本文考虑二阶线性系统的全维比例积分观测器设计问题. 基于文献[10]中提出的一类广义 Sylvester 矩阵方程的解,提出了二阶线性系统的全维比例积分观测器设计参数化方法.

2 问题提出

考虑如下定常二阶线性系统:

$$\begin{cases} E\ddot{q} + A\dot{q} + Cq = Bu, \\ y = C_1 q, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $q \in R^n$, $y \in R^m$ 和 $u \in R^r$ 分别为系统的状态、输出和输入向量; $E, A, C \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$ 和 $C_1 \in R^{m\times n}$ 为已知系统矩阵且满足下述假设条件:

假设 1 矩阵 E 满秩,矩阵 C_1 行满秩;

假设 2 矩阵组 (E, A, C, C_1) 可观,即

$$\mathrm{rank}[s^2 E^{\mathrm T} + A^{\mathrm T} s + C^{\mathrm T} \quad C_1^{\mathrm T}] = n, \quad \forall s \in C.$$

对于二阶线性系统(1), 考虑如下比例积分观测器:

$$\begin{cases} E\ddot{\hat{q}} + A\dot{\hat{q}} + C\hat{q} = Bu + L(y - C_1\hat{q}) + F\varpi, \\ \dot{\varpi} = K(y - C_1\hat{q}). \end{cases} \tag{2}$$

其中: $\hat{q} \in R^n$ 为状态估计向量; $\varpi \in R^p$ 为加权输出

收稿日期: 2005-12-05; **修回日期**: 2006-03-02.
基金项目: 国家杰出青年基金项目(69925308).
作者简介: 王国胜(1975—),男,河北唐山人,讲师,博士,从事鲁棒控制理论及应用等研究; 段广仁(1962—),男,黑龙江桦川人,长江学者特聘教授,博士生导师,从事线性系统、鲁棒控制理论及在航天中应用等研究.

估计误差的 i 次积分;$L \in R^{n\times m}$, $F \in R^{n\times p}$ 和 $K \in R^{p\times m}$ 为观测器增益矩阵.

令 $e = \hat{q} - q$,由式(1) 和(2) 可得

$$\begin{cases} E\ddot{e} + A\dot{e} + (C + LC_1) e = F\varpi, \\ \dot{\varpi} = - KC_1 e. \end{cases} \quad (3)$$

为使观测器(2) 能观测状态 q,要求

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0, \lim_{t\to\infty} \dot{e}(t) = 0, \lim_{t\to\infty} \varpi(t) = 0, \quad (4)$$

即要求系统(3) 稳定,但系统(3) 是高阶系统. 为便于分析,通过变量变换将(3) 转化为下面一阶系统:

$$\begin{cases} \dot{e} = \dot{e}, \\ E\ddot{e} + A\dot{e} + (C + LC_1) e = F\varpi, \\ \dot{\varpi} = - KC_1 e. \end{cases} \quad (5)$$

由式(5) 可得积分方程

$$\widetilde{E}\begin{bmatrix} \dot{e} \\ \ddot{e} \\ \dot{\varpi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ -(C + LC_1) & -A & F \\ -KC_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \\ \varpi \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中 $\widetilde{E} = \mathrm{diag}(I_n, E, I_p)$. 为方便,称式(6) 为观测器系统,简记为

$$\widetilde{E}\dot{\boldsymbol{\eta}} = A_o\boldsymbol{\eta}, \quad (7)$$

易知系统(7) 的维数为 $d = 2n + p$. 为满足式(4) 中观测器(7) 稳定的充要条件是矩阵对($\widetilde{E}$ A_o) 的所有特征值具有复实部. 综上,二阶线性系统的全维 PI 观测器设计问题可描述如下:

问题 PIO 给定矩阵 $E, A, C \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times r}$, $C_1 \in R^{m\times n}$, 且满足假设 1 和 2,求取适当维数的实矩阵 L, F, K 使得矩阵对($\widetilde{E}$ A_o) 稳定且非退化.

3 准备知识

假设矩阵对($\widetilde{E}$ A_o) 稳定且其对角的 Jordan 标准型为

$$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(s_1, s_2, \cdots, s_d). \quad (8)$$

其中自共轭复数 $s_i (i = 1,2, \cdots, d)$ 的实部为负数(不必互异). 记矩阵对($\widetilde{E}$ A_o) 的特征值 s_i 对应的左特征向量为 $t_i \in C^d$, $i = 1,2, \cdots, d$,并构造左特征向量矩阵 $T = [t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_d]$,将其分块为

$$T^{\mathrm{T}} = [T_e^{\mathrm{T}} \quad T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} \quad T_\varpi^{\mathrm{T}}], \quad (9)$$

其中: $T_e^{\mathrm{T}}, T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} \in C^{n\times d}$, $T_\varpi^{\mathrm{T}} \in C^{p\times d}$. 由左特征向量的定义有

$$\mathrm{rank}\, T = d, \quad (10)$$

$$T^{\mathrm{T}} A_o = \boldsymbol{\Lambda} T^{\mathrm{T}} \widetilde{E}. \quad (11)$$

方程(11) 等价于

$$- T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} (C + LC_1) - T_\varpi^{\mathrm{T}} KC_1 = \boldsymbol{\Lambda} T_e^{\mathrm{T}}, \quad (12)$$

$$T_e^{\mathrm{T}} - T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} A = \boldsymbol{\Lambda} T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} E, \quad (13)$$

$$T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} F = \boldsymbol{\Lambda} T_\varpi^{\mathrm{T}}. \quad (14)$$

将式(13) 代入(12) 可得

$$\boldsymbol{\Lambda}^2 T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} E + \boldsymbol{\Lambda} T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} A + T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} C = - (T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} LC_1 + T_\varpi^{\mathrm{T}} KC_1). \quad (15)$$

令

$$Z^{\mathrm{T}} = - (T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} L + T_\varpi^{\mathrm{T}} K), \quad (16)$$

则方程(17) 变为

$$\boldsymbol{\Lambda}^2 T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} E + \boldsymbol{\Lambda} T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} A + T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} C = Z^{\mathrm{T}} C_1. \quad (17)$$

从而求解问题 PIO 的重点就是求解矩阵方程(17).

4 问题求解

4.1 矩阵 T, K 和 L 的解

将方程(17) 取转置可得广义 Sylvester 方程

$$E^{\mathrm{T}} T_{\dot{e}} \boldsymbol{\Lambda}^2 + A^{\mathrm{T}} T_{\dot{e}} \boldsymbol{\Lambda} + C^{\mathrm{T}} T_{\dot{e}} = C_1^{\mathrm{T}} Z, \quad (18)$$

并作如下右互质分解:

$$(s^2 E^{\mathrm{T}} + sA^{\mathrm{T}} + C^{\mathrm{T}})^{-1} C_1^{\mathrm{T}} = N(s) D^{-1}(s). \quad (19)$$

其中: $N(s) \in R^{n\times m}[s]$, $D(s) \in R^{m\times m}[s]$ 为右互质多项式矩阵.

引理 1 如果假设 1 和 2 成立,那么满足方程(17) 的所有矩阵 $T_{\dot{e}}$ 和 Z 可参数化表示为

$$T_{\dot{e}} = [N(s_1) g_1 \quad N(s_2) g_2 \quad \cdots \quad N(s_d) g_d], \quad (20)$$

和

$$Z = [D(s_1) g_1 \quad D(s_2) g_2 \quad \cdots \quad D(s_d) g_d]. \quad (21)$$

其中: $g_i \in C^m (i = 1,2, \cdots, d)$ 为一组自由参数向量; $N(s) \in R^{n\times m}[s]$ 和 $D(s) \in R^{m\times m}[s]$ 为满足右互质分解(19) 的右互质多项式矩阵.

证明 由式(19) 可得

$$(s^2 E + sA + C)^{\mathrm{T}} N(s) - C_1^{\mathrm{T}} D(s) = 0.$$

将上式中 s 换为 s_i,并于其两端同时右乘向量 $g_i \in C^m$ 可得

$$(s_i^2 E + s_i A + C)^{\mathrm{T}} N(s_i) g_i - C_1^{\mathrm{T}} D(s_i) g_i = 0.$$

将上式两端相加,并注意到式(20) 和(21),便得式(18),即由式(20) 和(21) 给出的向量组$\{t_{\dot{e}i}\}$ 和$\{z_i\}$ 满足式(18). □

由式(20) 给出 $T_{\dot{e}}$ 的表达式和(14) 可得 $T_\varpi = F^{\mathrm{T}} T_{\dot{e}} \boldsymbol{\Lambda}^{-1}$,即

$$T_\varpi = [s_1^{-1} F^{\mathrm{T}} N(s_1) g_1 \quad \cdots \quad s_d^{-1} F^{\mathrm{T}} N(s_d) g_d], \quad (22)$$

其中 F 可看作表达式 T_i 中的参数,其所含参数 F 以及 $s_i, g_i (i = 1,2, \cdots, d)$ 应满足式(10),即:

约束 1 $\mathrm{rank}\, T(F, s_i, g_i, i = 1,2, \cdots, d) = d$.

得到了满足约束 1 的 $T_{\dot{e}}$, Z 和 T_ϖ,由(16) 可得

$$Z^{\mathrm{T}} = - \overline{T}^{\mathrm{T}} \widetilde{L}. \quad (23)$$

其中

$$\overline{T}^{\mathrm{T}} = [T_{\dot{e}}^{\mathrm{T}} \quad T_\varpi^{\mathrm{T}}], \quad \widetilde{L}^{\mathrm{T}} = [L^{\mathrm{T}} \quad K^{\mathrm{T}}]. \quad (24)$$

于是在约束 1 的条件下,观测器增益矩阵 $\widetilde{L}$ 的解为

$$\widetilde{L} = -(\overline{TT}^{\mathrm{T}})^{-1}\overline{TZ}^{\mathrm{T}}, \tag{25}$$

从而获得了增益矩阵 L 和 K. 为使观测器增益矩阵 F, L 和 K 是实矩阵,还应有如下约束:

约束 2　$g_i = \overline{g_j}$ 当且仅当 $s_i = \overline{s_j}$, $i, j = 1, 2, \cdots, d$.

由引理 1 以及式(13) 和(25) 可得

$$T_e^{\mathrm{T}} = \Lambda T_e^{\mathrm{T}} E + T_e^{\mathrm{T}} A. \tag{26}$$

故由式(20), (22) 和(26), 可得左特征向量矩阵 $T = [T_e^{\mathrm{T}} \quad T_e^{\mathrm{T}} \quad T_\varpi^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$ 的参数化表达式.

4.2　主要结果

总结上面结果, 可以得到如下关于求解问题 PIO 的定理.

定理 1　给定满足假设1和2的二阶线性系统, 问题 PIO 中形如式(2) 的比例积分观测器的增益阵通过式(20) ～ (22), 由式(25) 给出, 其中参数 F 以及 $s_i, g_i (i = 1, 2, \cdots, d)$ 满足约束 1 和 2, 而矩阵对 $(\widetilde{E} \quad A_0)$ 的左特征向量矩阵 T 的参数化表达式由式(20) ～ (22) 组合而成, 形如式(9).

注 1　由定理 1 可以看出, 参数 F 及 $s_i, g_i (i = 1, 2, \cdots, d)$ 为系统设计提供了全部自由度, 可进一步选取这些参数满足某些希望的系统性能, 如干扰解耦, LTR 和鲁棒性等.

5　数值算例

考虑二阶线性系统(1), 其系数矩阵为

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -2.5 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -10 & 5 & 0 \\ 5 & -25 & 20 \\ 0 & 20 & -20 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

根据定理 1 求得满足右互质分解式(20) 的右互质多项式矩阵分别为

$$N(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{40}s + \frac{1}{100}s^2 & -4 \\ \frac{1}{200}s - \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{100}s^4 - \frac{1}{20}s^3 - \frac{29}{100}s^2 + \frac{33}{40}s + \frac{9}{4} & -4s^2 + 10s + 40 \\ -\frac{1}{100}(s+10)^2 & -s^2 - 2s - 20 \end{bmatrix}.$$

下面对系统设计形如式(2) 的观测器, 其中 $p = 2$, 则观测器的维数为 $d = 6 + 2$. 为简单起见, 限制特征值 $s_i (i = 1, 2, \cdots, 8)$ 为负实数, 同时参量 $g_i (i = 1, 2, \cdots, 8)$ 也为实数, 这样约束 1 自然满足.

记

$$g_i = \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots, 8, \quad F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \\ f_{31} & f_{32} \end{bmatrix},$$

由式(20) 和(21) 可得矩阵 Z 和 T_e 的列向量为

$$z_i = \begin{bmatrix} \left(\frac{29}{100}s_i^2 - \frac{33}{40}s_i - \frac{9}{4} + \frac{1}{20}s_i^3 - \frac{1}{100}s_i^4\right) a_i + (4s_i^2 - 10s_i - 40) b_i \\ \frac{1}{100}(s_i + 10)^2 a_i + (s_i^2 + 2s_i + 20) b_i \end{bmatrix},$$

$$t_{ei} = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{40}s_i + \frac{1}{100}s_i^2\right) a_i - 4b_i \\ \left(-\frac{1}{200}s_i - \frac{1}{20}\right) a_i \\ b_i \end{bmatrix},$$

$i = 1, 2, \cdots, 8.$

由式(22) 可得 T_ϖ 为

$$T_\varpi = [s_1^{-1} F^{\mathrm{T}} N(s_1) g_1 \quad \cdots \quad s_8^{-1} F^{\mathrm{T}} N(s_8) g_8].$$

特别选取

$f_{11} = f_{22} = f_{32} = 1,$

$f_{12} = f_{21} = f_{31} = 0,$

$s_i = -i, i = 1, 2, \cdots, 8,$

$a_1 = a_3 = a_7 = b_2 = b_4 = b_6 = 1,$

$a_2 = a_4 = a_8 = b_3 = b_5 = b_7 = -1,$

$b_1 = b_8 = a_6 = a_5 = 0,$

可以得到

$$L = 10^3 \begin{bmatrix} 0.2006 & 0.208 \\ 1.8743 & 0.3036 \\ 0.5793 & 0.0300 \end{bmatrix},$$

$$K = 10^3 \begin{bmatrix} 0.3763 & 0.0517 \\ 1.1249 & 0.1495 \end{bmatrix}.$$

6　结　　论

基于一类广义 Sylvester 矩阵方程的解, 给出了二阶线性系统的全维比例积分观测器设计参数化方法. 其所含参数为控制系统设计提供了全部自由度, 并可通过优化等手段适当选择这些参数来满足某些性能要求, 如干扰解耦, LTR 和鲁棒性等. 该观测器设计的参数化方法直接基于二阶线性系统的参数矩阵, 不涉及系统的变换或增广, 表明了所提方法是简单且有效的.

参考文献(References)

[1] Luenberger D G. An introduction to observers [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1971, 16(6): 596-602.

[2] Krishna K B, Kabore P. On the design of integral and proportional integral observers [C]. Proc of the American Control Conferrence. Chicago, 2000: 3725-3729.

[3] Duan G R, Pattoton R J. Robust fault detection using Luenberger-type unknown input observers: A parametric approach[J]. Int J System Science, 2001, 32(4): 533-540.

[4] Shafai B, Nork S. Simutaneous disturbance attenuation and fault detection using proportional integral obsevers [C]. Proc of the American Control Conf. Alaska, 2002: 1647-1649.

[5] Chu D L. Disturbance decoupled observer design for linear time-invariant systems: A matrix pencil approach [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(8): 1569-1575.

[6] Magham P G. Model refinement using eigensystem assignment[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2000, 23(4): 683-692.

[7] Duan G R, Wang G S, Liu G P. Eigenstructure assignment in a class of second-order linear systems: A complete parametric approach [C]. Proc of the CACSCUK. Manchester, 2002: 89-96.

[8] Wang G S, Duan G R. Robust pole assignment via P-D feedback in a class of second-order dynamic systems [C]. Int Conf of Automation, Robots and Computer Vision. Kunming, 2004: 1152-1156.

[9] Wang G S, Liang B, Duan G R. Reconfiguring second-order dynamic systems via state feedback eigenstructure assignment[J]. Int J of Control, Automation, and Systems, 2005, 3(1): 109-116.

[10] Duan G R, Wang G S. Two analytical general solutions of equation $EVJ^2 - AVJ - CV = BW$[J]. J of Harbin Institute of Technology, 2005, 37(1): 1-4.

[11] Duan G R, Wang G S. Eigenstructure assignment in a class of second-order descriptor linear systems: A complete parametric approach[J]. Int J of Automation and Computing, 2005, 2(1): 1-5.

(上接第 336 页)

[5] 刘永清, 谢胜利. 滞后分布参数系统的稳定与变结构控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
(Liu Y Q, Xie S L. Stability and variable structure control of distributed parameter systems with time delay [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)

[6] 崔宝同, 邓飞其. 时滞分布参数系统的指数渐近稳定性[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(5): 579-583.
(Cui B T, Deng F Q. Exponential asymptotical stability for distributed parameter systems with time delays[J]. Systems Engineering and Electronics, 2003, 25(5): 579-583.)

[7] 崔宝同, 邓飞其. 不确定时滞分布参数系统的滑动模控制[J]. 计算技术与自动化, 2003, 122(12): 21-24.
(Cui B T, Deng F Q. Sliding mode control for uncertain distributed parameter systems with delays [J]. Computing Technology and Automation, 2003, 122(12): 21-24.)

[8] 周国鹏, 邓飞其. 一类时滞分布参数系统的指数渐近稳定性[J]. 武汉科技大学学报, 2004, 27(2): 211-213.
(Zhou G P, Deng F Q. Exponential asymptotical stability for a class of distributed parameter systems with time delays[J]. J of Wuhan University of Science and Technology, 2004, 27(2): 211-213.)

(上接第 340 页)

[10] Hafeez K, Zhang Y B, Malak N. Core competence for sustainable competitive advantage: A structured methodology for identifying core competence[J]. IEEE Trans on Engineering Management, 2002, 49(1): 28-35.

[11] 朱剑英. 智能系统非经典数学方法[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001.
(Zhu J Y. Non-classical mathematics for intelligent systems[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2001.)

(上接第 344 页)

[6] 苏玉鑫, 段宝岩. 一种新型非线性 PID 控制器[J]. 控制与决策, 2003, 18(1): 126-128.
(Su Y X, Duan B Y. A new class of nonlinear PID controller[J]. Control and Decision, 2003, 18(1): 126-128.)

[7] 鄂加强. 铜精炼炉操作优化与智能控制应用研究[D]. 长沙: 中南大学, 2004.
(E J Q. Application and study on operation optimum and intelligent control of the copper refining anode furnace [D]. Changsha: Central South University, 2004.)