

文章编号: 1001-0920(2007)03-0252-06

期望指标集约束下一类随机系统的满意 PID 控制

李银伢, 盛安冬, 王远钢

(南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘要: 研究一类随机系统具有期望的动态误差系数、稳态输出方差和相对稳定裕度约束的满意 PID 控制问题. 首先应用满意控制思想, 给出期望指标集的相容性定义; 然后分别推导出 PID 控制器满足期望的稳定裕度指标的参数域边界解析式、满足期望的动态误差系数指标和期望的稳态输出方差指标的参数解集的解析式; 最后给出期望指标的相容性判别方法以及相容性解集求取策略. 通过算例验证了所提出方法的有效性.

关键词: 满意控制; PID 控制; 相容性; 稳定裕度; 动态误差系数; 方差

中图分类号: TP273

文献标识码: A

On satisfactory PID control for a class of stochastic systems with desired index set constraints

LI Yin-ya, SHENG An-dong, WANG Yuan-gang

(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: LI Yin-ya, E-mail: lyinya178@126.com)

Abstract: The problem of satisfactory PID control for a class of stochastic systems with constraints on dynamic error coefficient, steady-state output variance and relative stability margin is considered. By using the idea of satisfactory control, the definition of the consistency of desired index set is proposed. The expression of describing the boundaries of PID controller parametric set satisfying the desired relative stability margin is derived. The analytical formulas describing the PID controller parameter sets satisfying the given dynamic error coefficient index and the desired steady-state output variance index are derived, respectively. The criterion to determine whether the given index is consistent with each other or not and the strategy of calculating the consistency set are given. A numerical example shows the validity of the proposed design method.

Key words: Satisfactory control; PID control; Consistency; Stability margin; Dynamic error coefficient; Variance

1 引言

动态误差系数和稳态输出方差是度量随机系统控制精度的重要指标. 在工程实践中, 通常要求设计控制器使随机控制系统的动态误差系数和稳态输出方差小于某一容许值, 除此之外, 为了补偿模型的不确定性, 还要求闭环系统具有一定的稳定裕度. 而同时满足上述指标的控制器是否存在 (即期望指标是否相容), 事先通常是无法知晓的. 因此, 研究随机系统在上述 3 类指标约束下的指标集相容性分析以及控制器设计问题, 具有重要的工程实践意义.

已有学者对基于状态反馈或输出反馈的一类随机系统期望指标集的相容性进行了研究, 并取得了一定的成果^[1-3]. 其主要思路是, 首先运用状态空间

法, 将期望指标约束问题用线性矩阵不等式 (LMI) 进行刻画; 然后将期望指标集的相容性问题转化为某个线性矩阵不等式组 (LMIs) 的数学规划问题. 在指标集相容时运用 Matlab-LMI 工具箱求出一个或若干个满意解.

本文从频域解析的角度出发, 应用满意控制思想^[4], 研究一类随机系统在 PID 控制下期望指标集的相容性问题, 以及在期望指标集相容下控制器的设计问题. 这是因为, 一方面 PID 控制是目前全世界应用最为广泛的一类控制策略^[5], 其结构简单, 易于工程实现; 另一方面, 研究这类系统 PID 控制下期望指标的相容性问题以及在指标相容下 PID 控制器的设计问题, 能为工程论证方和设计人员提供

收稿日期: 2005-11-14; 修回日期: 2006-01-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60174028); 博士点基金项目 (20040288002).

作者简介: 李银伢 (1976—), 男, 湖南衡南人, 博士生, 从事时滞系统、PID 控制等研究; 盛安冬 (1964—), 男, 浙江海盐人, 研究员, 博士生导师, 从事火力控制、满意滤波等研究.

理论依据和参考. 本文方法是, 首先解析地给出描述系统满足期望的稳定裕度指标、动态误差系数指标和稳态输出方差指标的参数集表达式; 然后给出系统在稳定裕度指标约束下动态误差系数的取值范围, 以及系统在稳定裕度指标和动态误差系数指标相容下方差指标的取值范围; 最后给出上述 3 类指标相容时的 PID 控制器设计策略. 本文最大特点是给出了满足期望指标的相容性解集, 弥补了 LMI 方法只能得到一个或有限个满意解的算法限制.

2 问题描述

考虑一类 n 阶单输入单输出线性随机系统的 PID 控制问题, 如图 1 所示.

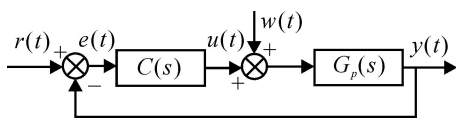


图 1 PID 反馈控制系统方框图

图 1 中, $r(t)$ 为参考输入, $u(t)$ 为控制信号, $w(t)$ 为零均值、强度为 $W > 0$ 且与初值无关的高斯白噪声 (即 $w(t) \sim N(0, W)$), $y(t)$ 为系统输出, $e(t) = r(t) - y(t)$ 为控制误差. $G_p(s)$ 为被控系统

$$G_p(s) = \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (1)$$

式中: $N(s), D(s)$ 为互质实多项式, 即

$$\begin{cases} N(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \\ D(s) = s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0, \end{cases} \quad (2)$$

式中 $a_0 > 0$.

注 1 PID 控制器含有一积分环节, 为保证闭环系统稳定, 其中一必要条件是闭环特征多项式各系数不等于零, 可得 $a_0 k_i > 0$, 由此可得 $a_0 > 0$.

$C(s)$ 为 PID 控制器

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s, \quad (3)$$

从 $w(t)$ 到 $y(t)$ 的传递函数和误差传递函数分别为

$$\begin{cases} T_{yw}(s) = \frac{G_p(s)}{1 + C(s)G_p(s)}, \\ e(s) = \frac{1}{1 + C(s)G_p(s)}. \end{cases} \quad (4)$$

随机系统在闭环稳定的前提下, 其精度通常用动态误差系数 ω, c_1, c_2 和稳态输出方差 σ_y^2 的大小来描述. 同时, 在工程实际中还要求闭环系统是无静差的, 即 $\omega = 0$. 若被控系统不包含积分环节, 则在 PID 控制下, 系统的开环传函恰好有一个积分环节, 所以在 PID 控制下系统都是无静差的. 另一方面, 为了保证被控系统具有一定的鲁棒性, 系统的闭环极点分布必须使对应的闭环系统满足一定的稳定裕度指标.

综上所述, 随机系统 PID 控制器设计的期望指标集定义如下:

1) 稳定裕度指标

$$\text{Re}(\lambda) < -\sigma, \quad \sigma > 0, \quad (5)$$

式中: λ 为闭环系统特征根, $-\sigma$ 为期望的稳定裕度约束上界.

2) 动态误差系数指标

$$\omega = 0, \quad |c_1| < \sigma_1, \quad |c_2| < \sigma_2, \quad \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 > 0, \quad (6)$$

式中: σ_1, σ_2 为期望的动态误差系数约束上界.

3) 稳态输出方差指标

$$\sigma_y^2 < \sigma^2, \quad \sigma > 0, \quad (7)$$

式中 σ^2 为期望的稳态输出方差约束上界.

随机系统期望指标之间可能存在竞争关系, 下面给出各个期望指标的相容性定义.

定义 1 对给定的稳定裕度指标 σ , 动态误差系数指标 σ_1 和 σ_2 以及稳态输出方差指标 σ^2 , 若图 1 系统存在 PID 控制器增益 $q = [k_p \quad k_i \quad k_d]$, 使对应的闭环系统同时满足期望指标约束 (5) ~ (7), 则称稳定裕度指标 σ , 动态误差系数指标 σ_1 和 σ_2 以及稳态输出方差指标 σ^2 相对系统 (1) 的 PID 控制是相容的. 由 q 构成的集合记为 Q_c , 称 Q_c 为期望指标的相容性解集.

具有上述期望性能指标集约束的随机系统的满意 PID 控制问题可以归结为: 寻求相容性解集 Q_c , 对给定的稳定裕度指标 σ , 动态误差系数指标 σ_1 和 σ_2 以及稳态输出方差指标 σ^2 , 使得对 $\forall q \in Q_c$, 同时满足式 (5) ~ (7).

3 主要结论

在本节中, 将首先推导描述 PID 控制器的参数稳定域边界、满足期望的稳定裕度指标约束的参数边界的解析表达式; 再根据动态误差系数的定义, 给出求解满足期望的动态误差系数指标约束的 PID 参数解集表达式; 对具有期望的稳态输出方差约束问题, 给出求取 PID 控制器满足期望的稳态输出方差约束的参数解集的解析式; 最后给出求解随机系统的相容性解集策略.

定理 1 给定被控系统 $G_p(s)$, PID 控制器的参数空间 $k_p - k_i - k_d$ 被平面 a), 可能的平面 b) 和曲面 c) 分割成若干个区域, 对应闭环系统特征多项式

$$\Delta(s) = sD(s) + (k_d s^2 + k_p s + k_i)N(s), \quad (8)$$

每一区域内的点 $q = [k_p \quad k_i \quad k_d]$ 所对应的 $\Delta(s)$ 具有不变的右半复平面 (RHP) 极点个数.

a) $k_i = 0$;

b) 若 $a_n > 0, k_d = 0$, 若 $a_n = 0$ 且 $a_{n-1} > 0, k_d = -1/a_{n-1}$; 其他情形, 平面不存在;

$$c) \begin{cases} k_p = -I(\cdot)/\dots, \\ k_i = k_d^2 - R(\cdot), \\ R(\cdot) + jI(\cdot) = \frac{jD(j\cdot)}{N(j\cdot)}, \end{cases} \quad (0, \cdot).$$

证明 令 $s = j$, 由闭环系统特征多项式 (s) 得

$$(j) = j D(j) + (-k_d^2 + j k_p + k_i) N(j). \quad (9)$$

根据边界穿越定理^[6], 可得如下3个边界:

1) $\partial D_0: = 0$, 实根穿越原点

由 $(0) = 0$ 可得 $a_0 k_i = 0$. 因 $a_0 > 0$, 可得 $k_i = 0$.

2) $\partial D : s = \dots$, 实根穿越无穷

由式(8)知, 若 $a_n = 0$ 时, 特征多项式 (s) 的最高次幂系数 $d = a_n k_d$, 令 $d = 0$ 可得 $k_d = 0$; 若 $a_n = 0$ 且 $a_{n-1} = 0$ 时, 令特征多项式 (s) 的最高次幂系数 $d = 1 + k_d a_{n-1}$ 为零, 可得 $1 + k_d a_{n-1} = 0$, 因 $a_{n-1} > 0$, 则 $k_d = -1/a_{n-1}$. 在其他情形下, 特征多项式 (s) 的最高次幂系数 $d = 1 = 0$ 恒成立, 则不存在实根穿越无穷, 此时边界不存在.

3) $\partial D : s = j \dots$, $(0, \cdot)$, 复根穿越虚轴

由 $(j) = 0$ 得 $j D(j) + (-k_d^2 + j k_p + k_i) N(j) = 0$, 令 $R(\cdot) + jI(\cdot) = j D(j)/N(j)$, 得

$$R(\cdot) + jI(\cdot) - k_d^2 + j k_p + k_i = 0. \quad (10)$$

令式(10)左边实部与虚部均等于零, 解得

$$\begin{cases} k_p = -I(\cdot)/\dots, \\ k_i = k_d^2 - R(\cdot). \end{cases} \quad (11)$$

综合1)~3), PID控制器的参数空间 $k_p - k_i - k_d$ 被平面 a), 可能的平面 b) 和曲面 c) 分割成若干个区域, 每一区域内的点所对应的 (s) 具有不变的 RHP 极点个数.

定理2 给定被控系统 $G_p(s)$ 和稳定裕度指标, PID控制器的参数空间 $k_p - k_i - k_d$ 被平面 a), 可能的平面 b) 和曲面 c) 分割成若干个区域, 对应特征多项式

$$\tilde{\sim}(s) = (s - \dots) D(s - \dots) + (\tilde{k}_d s^2 + \tilde{k}_p s + \tilde{k}_i) N(s - \dots), \quad (12)$$

每一区域内的点 $q = [k_p \ k_i \ k_d]^T$ 所对应的 $\tilde{q}^T = Kq^T$ 所对应的 $\tilde{\sim}(s)$ 具有不变的 RHP 极点个数,

$$\tilde{q} = [\tilde{k}_p \ \tilde{k}_i \ \tilde{k}_d]^T, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ - & 1 & ^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) 若 $N(\cdot) = 0$, $\cdot = k_p + k_i - k_d^2 = 0$, 则 $D(\cdot)/N(\cdot) = 0$; 若 $N(\cdot) \neq 0$, 无此平面;

b) 若 $a_n = 0, k_d = 0$; 若 $a_n = 0$ 且 $a_{n-1} = 0, k_d = -1/a_{n-1}$; 其他情形, 平面不存在;

$$c) \begin{cases} k_p = 2 k_d - I(\cdot)/\dots, \\ k_i = (\dots + \dots) k_d - I(\cdot)/\dots - R(\cdot), \\ R(\cdot) + jI(\cdot) = \frac{(j\cdot - \dots) D(j\cdot - \dots)}{N(j\cdot - \dots)}, \end{cases} \quad (0, \cdot).$$

证明 根据边界穿越定理, 仿定理1证明易得该定理.

由定理1和定理2可得如下推论:

推论1 记对应闭环系统(1)的特征多项式 (s) 的 RHP 极点个数为零的区域为 Q_s , 则对任一 $q \in Q_s$, 有 $\text{Re}(\cdot) < 0$; 记特征多项式 $\tilde{\sim}(s)$ 的 RHP 极点个数为零的区域为 Q , 则对任一 $q \in Q$, 有 $\text{Re}(\cdot) < -\dots$, 且满足 $Q \subset Q_s$.

注2 确定 Q_s, Q 区域时, 可以分别在 PID 控制器的参数空间 $k_p - k_i - k_d$ 上被稳定边界分割的区域中选一个测试点 q , 根据 Nyquist 判据确定该区域是否为稳定区域. 还有一种更为简单的判定方法: 在解方程(10)时, 对应的 Jacob 行列式 $J = 1 > 0$, 对每一固定的 k_d 值, 则在 $k_p - k_i$ 平面上, 沿 \dots 增加的方向, 曲线 c) 右边区域比左边区域具有更少的 RHP 极点个数. 再由线性定常系统稳定的必要条件知, 特征多项式各系数必须大于零(设特征多项式最高次幂系数大于零), 对 Q_s 而言, 由 $a_0 k_i > 0$ 可知, 若 $a_0 > 0$, 如果 Q_s 存在, 则 Q_s 一定在直线 $k_i = 0$ 的上边; 若 $a_0 < 0$, 如果 Q_s 存在, 则 Q_s 一定在直线 $k_i = 0$ 的下边. 确定 Q 的方法与此类似.

定理3 给定被控系统 $G_p(s)$ 和期望的动态误差系数指标 γ_1, γ_2 , 定义集合

$$Q_e = Q_{\gamma_1} \cap Q_{\gamma_2}. \quad (13)$$

式中, 若 $b_0 = 0$, 则

$$\begin{cases} Q_{\gamma_1} = \{ q: k_i > \left| \frac{b_1}{a_0} \right| \text{ 或 } k_i < - \left| \frac{b_1}{a_0} \right| \} \cap Q_s, \\ Q_{\gamma_2} = \{ q: | - a_0 b_0 k_p + (a_0 b_1 - a_1 b_0) k_i - b_0^2 | < | a_0^2 k_i^2 | \} \cap Q_s. \end{cases} \quad (14)$$

若 $b_0 \neq 0$, 则

$$\begin{cases} Q_{\gamma_1} = Q_s, \\ Q_{\gamma_2} = \left\{ q: k_i > \left| \frac{b_1}{a_0} \right| \text{ 或 } k_i < - \left| \frac{b_1}{a_0} \right| \right\} \cap Q_s. \end{cases} \quad (15)$$

若 $Q_e \neq \emptyset$, 则对 $\forall q \in Q_e$, 满足式(6).

证明 由图1知, 由 $r(t)$ 到 $e(t)$ 的误差传递函数为

$$e(s) = \frac{1}{1 + C(s)G_p(s)} = \frac{N_e(s)}{D_e(s)}, \quad (16)$$

式中

$$\begin{cases} N_e(s) = s^{n+1} + b_{n-1}s^n + \dots + b_1s^2 + b_0s, \\ D_e(s) = a_nk_d s^{n+2} + \dots + \\ \quad (a_0k_p + a_1k_i + b_0)s + a_0k_i. \end{cases} \quad (17)$$

由文献[7]知动态误差系数的计算公式为

$$c_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i}{ds^i} e^{(j)}(s) \right|_{s=0}, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

根据式(18),求得动态误差系数 c_0, c_1, c_2 分别为

$$\begin{cases} c_0 = 0, \\ c_1 = b_0 / (a_0 k_i), \\ c_2 = \{ - a_0 b_0 k_p + (a_0 b_1 - \\ \quad a_1 b_0) k_i - b_0^2 \} / (a_0^2 k_i^2). \end{cases} \quad (19)$$

显然,若 $b_0 = 0$,令 $|c_1| < 1, |c_2| < 2$,再联系稳定域 Q_s ,易得式(14).若 $b_0 = 0, |c_1| = 0 < 1$ 恒成立,只需令 $|c_2| < 2$,再联系稳定域 Q_s ,易得式(15).若 $Q_e = Q_{c_1} \cap Q_{c_2} = \emptyset$,则对 $\forall q \in Q_e$,满足 $c_0 = 0, |c_1| < 1, |c_2| < 2$,式(6)成立.

定理 4 给定被控系统 $G_p(s)$,期望的稳态输出方差约束指标 σ_y^2 和均值为零,强度为 $W > 0$ 的与初值无关的高斯白噪声 $w(t)$,定义集合

$$Q = \{q: f(q) < \sigma_y^2\} \cap Q_s, \quad (20)$$

若 $Q = \emptyset$,则对 $\forall q \in Q$,满足式(7).式(20)中

$$f(q) = W \frac{(-1)^{n-1} / |d|}{2^n / |d|}, \quad (21)$$

$$T_{yw}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} i(q) s^i}{\sum_{i=0}^n i(q) s^i}, \quad (22)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 5 & 4 & 3 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n-2 & n-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n & n-1 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & d_1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 5 & 4 & 3 & \dots & \dots & \dots & d_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & n-2 & d_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n & d_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$d_m = \frac{(-1)^{i+j}}{i!j!}, \quad i+j = 2m, m = 0, 1, \dots, n-1. \quad (25)$$

证明 定义 $T_{yw}(s)$ 的 H_2 范数为

$$T_{yw}^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_{yw}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}, \quad (26)$$

由式(2)知,若闭环系统稳定, $T_{yw}(s)$ 必是严格正则的,则 T_{yw}^2 一定有界.设由 $w(t)$ 到 $y(t)$ 的状态空间实现为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (27)$$

根据文献[8,9],在单位强度零均值白噪声输入下,系统的稳态输出方差满足

$$\sigma_y^2 = T_{yw}^2 = \text{tr}(CQC^T). \quad (28)$$

式中 $Q = Q^T > 0$,且满足 Riccati 方程

$$AQ + QA^T + BB^T = 0. \quad (29)$$

若噪声强度为 $W > 0$,则 $\sigma_y^2 = \text{tr}(C\tilde{Q}C^T), \tilde{Q} = \tilde{Q}^T > 0$,满足 $A\tilde{Q} + \tilde{Q}A^T + BWB^T = 0$.令 $\tilde{B} = \sqrt{WB}$,则对应的闭环系统传函

$$\begin{aligned} \overline{T}_{yw}(s) &= C(sI - A)^{-1}\tilde{B} = \\ &= \sqrt{W}C(sI - A)^{-1}B = \sqrt{W}T_{yw}(s). \end{aligned} \quad (30)$$

由此可得在零均值噪声强度为 $W > 0$ 的白噪声输入下,系统的稳态输出方差

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \overline{T}_{yw}^2 = \sqrt{W} T_{yw}^2 = W T_{yw}^2 = \\ &= \frac{W}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |T_{yw}(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \frac{W}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_{yw}(s) T_{yw}(-s) ds = \\ &= \frac{W}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} T_{yw}(s) T_{yw}(-s) ds = W. \end{aligned} \quad (31)$$

为复平面虚轴与包围左半平面的无穷大半圆所组成的封闭曲线.则 $T_{yw}(s) T_{yw}(-s) ds$ 是沿虚轴向上,然后沿包围左半平面的无穷大半圆的回路积分.闭环传函 $T_{yw}(s)$ 是严格正则的,故沿无穷大半圆积分等于零.根据留数定理,等于 $T_{yw}(s) T_{yw}(-s)$ 在其左半平面极点上的留数之和.由文献[10]的结果可得

$$= \frac{(-1)^{n-1} / |d|}{2^n / |d|}, \quad (32)$$

如式(23), (24) 所定义.则

$$\sigma_y^2 = W = W \frac{(-1)^{n-1} / |d|}{2^n / |d|} = f(q). \quad (33)$$

显然,若 $\exists q \in Q_s$,使得 $f(q) < \sigma_y^2$,则式(7)成立.记此时由 q 构成的集合为 Q ,则对 $\forall q \in Q$,满足式(7).

综上所述,可得如下推论:

推论 2 对给定的稳定裕度指标 σ , 动态误差系数指标 γ_1 和 γ_2 以及稳态输出方差指标 σ^2 , 若 $Q_c = Q_s, Q_1, Q_2, Q_e, Q_f, Q_g, Q_h, Q_i, Q_j, Q_k, Q_l, Q_m, Q_n, Q_o, Q_p, Q_q, Q_r, Q_s, Q_t, Q_u, Q_v, Q_w, Q_x, Q_y, Q_z, Q_{\infty}$, 则对任一 $q \in Q_c$, 式(5) ~ (7) 同时成立. Q_c 为相容性解集.

控制系统设计的期望指标集中各个单一指标之间可能存在竞争关系. 可将各个单一指标分成不同优先级, 先求解优先级高的指标解集, 再求解优先级稍低的指标上确界或下确界, 根据上确界或下确界来判断该指标与优先级稍高的指标是否相容, 其余依此类推. 在这里不妨设各个指标的排列顺序为: 稳定裕度指标, 动态误差系数指标, 稳态输出方差指标. 下面给出求解相容性解集的步骤:

Step1: 根据定理 1 和推论 1, 求出 Q_s .

Step2: 求解以下约束优化问题:

$$\begin{cases} \max & \sigma \\ \text{s. t. } & q \in Q_s. \end{cases} \quad (34)$$

Step3: 记 Step2 求得稳定裕度极值为 σ_{\max} . 若 $\sigma < \sigma_{\max}, Q_c = Q_s \cap \{q | \sigma(q) \geq \sigma\}$, 根据定理 2 和推论 1 求出 Q_c ; 若 $\sigma \geq \sigma_{\max}$, 则 $Q_c = \emptyset$, 此时满足式(5) 的 PID 控制器不存在, 停止计算, 退出.

Step4: 求解以下约束优化问题:

$$\begin{cases} \min & \gamma_1 \\ \text{s. t. } & q \in Q_c. \end{cases} \quad (35)$$

Step5: 记 Step4 中求得的动态误差系数极值为 γ_1^{\min} , 若 $\gamma_1 > \gamma_1^{\min}$, 则 $Q_{c_1} = Q_c \cap \{q | \gamma_1(q) \leq \gamma_1\}$, 根据定理 3 求出 Q_{c_1} ; 若 $\gamma_1 \leq \gamma_1^{\min}$, 则 $Q_{c_1} = Q_c$, 此时同时满足式(5) 和式(6) 的 PID 控制器不存在, 停止计算, 退出.

Step6: 求解以下约束优化问题:

$$\begin{cases} \min & \sigma^2 \\ \text{s. t. } & q \in (Q_{c_1}, Q_c). \end{cases} \quad (36)$$

Step7: 记 Step6 中求得的动态误差系数极值为 σ^2_{\min} , 若 $\sigma^2 > \sigma^2_{\min}$, 则 $Q_{c_2} = Q_{c_1} \cap \{q | \sigma^2(q) \leq \sigma^2\}$, 根据定理 3 求出 Q_{c_2} , 记 $Q_t = Q_{c_2} \cap Q_e$; 若 $\sigma^2 \leq \sigma^2_{\min}$, 则 $Q_{c_2} = Q_{c_1}$, 同时满足式(5) 和式(6) 的 PID 控制器不存在, 停止计算, 退出.

Step8: 求解以下约束优化问题:

$$\begin{cases} \min & \sigma^2 \\ \text{s. t. } & q \in Q_t. \end{cases} \quad (37)$$

Step9: 记 Step8 中求得的稳态输出方差极值为 σ^2_{\min} , 若 $\sigma^2 > \sigma^2_{\min}$, 则 $Q_c = Q_t \cap \{q | \sigma^2(q) \leq \sigma^2\}$, 根据定理 4 求出 Q_c ; 若 $\sigma^2 \leq \sigma^2_{\min}$, 则 $Q_c = Q_t$, 同时满足式(5) ~ (7) 的 PID 控制器不存在, 停止计算, 退出.

Step10: 求相容性解集 $Q_c = Q_c \cap Q_i$.

注 3 上述约束优化问题是通过 Matlab7.0 优化工具箱进行求解的. 若同时满足式(5) ~ (7) 的 PID 控制器不存在, 有以下两种处理方案: 一是采用

除 PID 外的其他控制策略; 二是降低所提的期望指标要求. 上述相容性解集求解步骤已给出期望指标的取值范围, 若所给指标在相容指标范围内, 则满足对应指标要求的 PID 控制器肯定存在.

4 算 例

某一随机系统的简化传递函数为

$$G_p(s) = \frac{-5.5136s^2 + 6.4324s + 61.0346}{s^4 + 4.6715s^3 + 12.912s^2 + 18.299s + 2.627} \quad (38)$$

噪声强度 $W = 0.1$, PID 控制器设计的期望指标为:

- 1) 稳定裕度指标 $\sigma = 0.2$;
- 2) 动态误差系数指标 $\gamma_1 = 0.2, \gamma_2 = 2$;
- 3) 稳态输出方差指标 $\sigma^2 = 5$.

根据第 3 节相容性解集求解步骤, 首先判断相容性解集的存在性. 由定理 1 和推论 1, 求出 Q_s , 如图 2 所示. 在 Q_s 上存在 $q^* = [0.1373 \ 0.0593 \ -0.0532]$ 所对应的稳定裕度极值为 $\sigma_{\max} = 0.9928 > 0.2$, 则 Q_c 非空, 根据定理 2 和推论 1 求出 Q_c . 在 Q_c 上求得的动态误差系数极值 $\gamma_1^{\min} = 0.0422 < \gamma_1 = 0.2$, 此时 $q_1^* = [0.4171 \ 1.0201 \ 0.2351]$. 则 $Q_{c_1} = Q_c \cap \{q | \gamma_1(q) \leq 0.2\}$, 根据定理 3 求出 Q_{c_1} . 同理在 Q_{c_1} 上存在 $q_2^* = [0.4131 \ 1.0027 \ 0.2344]$ 所对应的动态误差系数极值 $\gamma_2^{\min} = 0.2750 < \gamma_2 = 2$, 则 $Q_{c_2} = Q_{c_1} \cap \{q | \gamma_2(q) \leq 2\}$, 可求得对应的 Q_{c_2} . 最后在 Q_{c_2} 上求得 $q^* = [0.2051 \ 0.2152 \ 0.2020]$ 所对应的稳态输出方差极值为 $\sigma^2_{\min} = 1.5757 < \sigma^2 = 5$, 则 $Q_c = Q_{c_2} \cap \{q | \sigma^2(q) \leq 5\}$, 相容性解集 Q_c 存在.

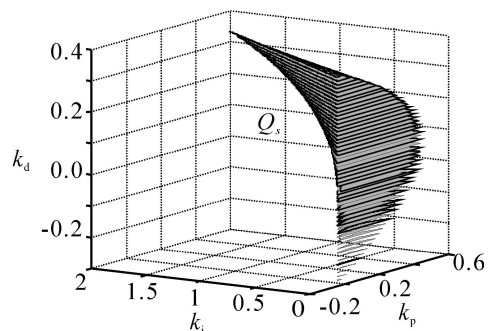


图 2 PID 控制器稳定域 Q_s

取稳定域 Q_s 内一固定的 $k_d^* = 0.1$, 在 $k_p - k_i$ 平面上所对应的区域 $Q_s(k_d^*), Q_c(k_d^*)$ 如图 3 所示. 在图 3 中由粗实线围成的闭区域即为 $Q_s(k_d^*)$, 在 $Q_s(k_d^*)$ 内部由等 $\sigma^2 = 5$ 的细实线围成的闭区域为 $Q_c(k_d^*)$. 图 4 中阴影部分即 Q_c 所围成的闭区域是对应 $k_d^* = 0.1$ 时的相容性解集 $Q_c(k_d^*)$.

在图 4 中, 由 ABC 围成的封闭区域为 $Q_s(k_d^*)$, 由 DEF 围成的封闭区域为 $Q_c(k_d^*)$, 由 GBH 围成的

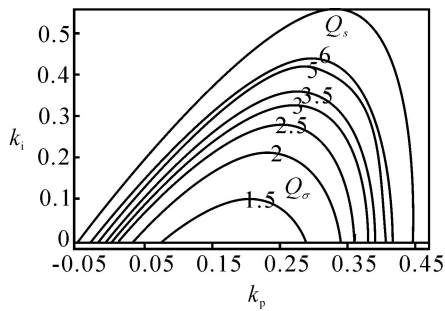


图 3 当 $k_d^* = 0.1$ 时 $k_p - k_i$ 平面上的等 2 线

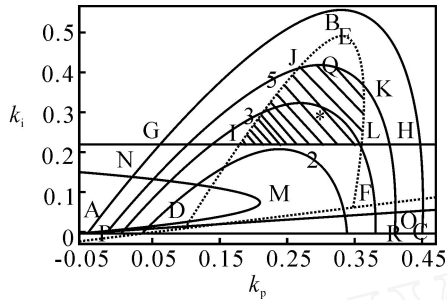


图 4 对应 $k_d^* = 0.1$ 时相容性解集 Q_c

闭区域为 $Q_{c_1}(k_d^*)$, 由 AMNBO 围成的闭区域为 $Q_{c_2}(k_d^*)$, 由 PQR 围成的闭区域为 $Q(k_d^*)$. 取一定步长如 $h = 0.1$ 扫描 Q_s 内的 k_d 值区间, 重复上述工作, 就可以求得相容性解集 Q_c , 对 $\forall q \in Q_c$, 式(5) ~ (7) 同时成立. 取 $q^* = [0.3 \ 0.3 \ 0.1]$ $Q_c(k_d^* = 0.1)$ (图 4 中标 * 号的点), 对应的 $Re(\lambda) = -0.4091, \omega = 0, c_1 = 0.1435, c_2 = 0.8202, \sigma_y = 2.9059$, 满足式(5) ~ (7).

5 结 语

在工程实践中, 所设计的控制器通常要满足多个性能指标, 人们所期望的控制策略应是相容区域尽可能大的满意解集, 这样为控制器进一步设计和物理实现留有更大的自由度. 本文对一类随机系统的 PID 控制所涉及的上述问题, 给出了一种有效的解决方法.

参考文献(References)

[1] 王远钢, 郭治. 状态反馈中圆形极点和状态方差约束的

相容性[J]. 自动化学报, 2001, 27(2): 207-213.

(Wang Y G, Guo Z. Consistency of circular pole and state variance constraints in state-feedback control [J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(2): 207-213.)

[2] 程相权, 郭治, 王远钢. 满足 H 区域极点和方差指标约束的动态输出反馈控制研究[J]. 控制与决策, 2002, 17(3): 282-286.

(Cheng X Q, Guo Z, Wang Y G. On dynamic output control with constraints on H , pole placement and covariance[J]. Control and Decision, 2002, 17(3): 282-286.)

[3] 王远钢, 郭治. 反馈控制系统多性能约束指标的相容性[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 423-426.

(Wang Y G, Guo Z. Consistency of multiple performance indices of feedback control systems [J]. Control Theory and Applications, 2003, 20(3): 423-426.)

[4] Guo Z. A Survey of satisfying control and estimation [C]. Proc of the 14th IFAC World Congress. Beijing, 1999: 443-447.

[5] Åström K J, Häggglund T. PID controllers: Theory, design, and tuning [M]. NC: Instrument Society of American, 1995.

[6] Bhattacharyya S P, Chapellat H, Keel L H. Robust control: The parametric approach [M], NJ: Prentice Hall PTR, 1995.

[7] 胡寿松. 自动控制原理 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2000.

(Hu S S. Principles of automatic control [M]. Beijing: National Deference Industry Press, 2000.)

[8] Skelton R E, Iwasaki T. Lyapunov and covariance controllers[J]. Int J Control, 1993, 57(3): 519-536.

[9] Laurent E G, Silviu-Iulian N. Advances in linear matrix inequality methods in control [M]. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

[10] Jury E I, Dewey A G. A general formulation of the total square integral for continuous systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1965, 10(1): 119-120.

(上接第 251 页)

[11] Reeves C R, Yamada T. Genetic algorithms, path relinking, and the flowshop sequencing problem[J]. Evolutionary Computation, 1998, 6(1): 45-60.

[12] Zegordi S H, Itoh K, Enkawa T. Minimizing makespan for flow shop scheduling by combining simulated annealing with sequencing knowledge [J]. European J of Operational Research, 1995, 85(3): 515-531.

[13] Taillard E. Some efficient heuristic methods for the flow shop sequencing problem [J]. European J of

Operational Research, 1990, 47(1): 65-74.

[14] 贾永基, 谷寒雨, 席裕庚. 求解 PDPTW 问题的一种快速禁忌搜索算法[J]. 控制与决策, 2004, 19(1): 57-60.

(Jia Y J, Gu H Y, Xi Y G. Quick taboo search algorithm for solving PDPTW problem[J]. Control and Decision, 2004, 19(1): 57-60.)

[15] Taillard E. Benchmarks for basic scheduling problems [J]. European J of Operational Research, 1993, 64(2): 278-285.