

文章编号: 1001-0920(2007)04-0428-04

# 一类非自衡对象的最优控制

王建国, 曹广益, 朱新坚

(上海交通大学 燃料电池研究所, 上海 200030)

**摘要:** 对模型不确定性和控制能量约束并存时一类非自衡对象的最优控制问题作了探讨. 首先基于一类随机模型误差的描述, 定义了一个平均意义上的包含跟踪误差和控制能量在内的性能指标; 然后通过谱分解极小化该性能指标, 导出一个最优的控制律, 从而为模型不确定性和控制能量约束并存条件下的一类非自衡对象的最优控制问题提供了一种实用的控制方法. 仿真结果证明了该方法的有效性.

**关键词:** 最优控制; 非自衡对象; 模型不确定性; 控制能量约束

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## Optimal control for integrator and dead time process

WANG Jian-guo, CAO Guang-yi, ZHU Xin-jian

(Institute of Fuel Cell, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200030, China. Correspondent: WANG Jian-guo, E-mail: jgwang@sjtu.edu.cn)

**Abstract:** A optimal control for integrator and dead time process is investigated in the case that plant uncertainty and control effort are existent. An average cost function containing tracking error and plant input energy over a class of stochastic model errors is defined. An optimal control law is obtained by minimizing the average performance through spectral factorization and a practical control method for integrator and dead time plant is presented in the presence of plant uncertainty and control energy constraint. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** Optimal control; Integrator and dead time process; Plant uncertainty; Control energy constraint

### 1 引言

过程控制中存在一类非自衡对象, 其模型中包含一个积分环节<sup>[1,2]</sup>, 所以此类控制对象在阶跃输入的作用下, 其输出不能自动地达到稳定状态, 而是持续地增大或减小. 针对此特点, 文献[3]在内模控制原理基础上, 利用 Taylor 展开讨论了一种 PID 控制器设计方法. 文献[4]在 Ziegler-Nichols 方法基础上, 给出一套整定 PID 控制器的经验公式. 文献[5,6]在鲁棒控制理论的基础上, 根据控制系统性能传递函数的特点得出了两种 PID 控制器的设计方法. 文献[7]提出了一种二自由度 PID 调节器的设计方法, 使得系统的目标值跟随特性和干扰抑制特性与两个调节参数之间具有单调变化的关系.

在实际的控制系统中总是存在模型不确定性. 文献[8]探讨了反馈控制结构可处理的最大模型不确定性. 在此基础上, 文献[9]运用随机嵌入的思想描述模型不确定性, 探讨了反馈控制系统存在模型

不确定性时的性能极限. 并且实际的控制系统中输入被控对象的控制能量一定是有限的. 文献[10]研究了控制能量存在约束时的最优跟踪和调节问题, 发现可达到的最优性能不仅与被控对象的非最小相位零点、时滞和不稳定极点有关, 而且与被控对象在整个频段上的增益有关.

然而到目前为止, 所有关于非自衡对象控制方法的研究大都假设存在一个精确的模型, 并且控制量是不受约束的. 本文探讨其在模型不确定性和控制能量约束并存条件下的最优控制. 首先基于一类随机模型误差的描述, 提出一个平均意义上的包含跟踪误差和控制能量的积分平方性能指标; 然后通过对该性能指标的极小化导出最优控制律, 从而为实际中的一类非自衡对象控制问题提供一个最优的控制方法.

### 2 模型误差描述

相对模型误差定义为

收稿日期: 2005-12-28; 修回日期: 2006-02-25.

基金项目: 国家 863 计划项目(2003AA517020).

作者简介: 王建国(1974—), 男, 山西文水人, 博士生, 从事复杂过程控制、最优控制等研究; 曹广益(1940—), 男, 上海人, 教授, 博士生导师, 从事燃料电池、复杂过程控制等研究.

$$G(s) = \frac{G(s)}{G_o(s)} = \frac{G(s) - G_o(s)}{G_o(s)}, \quad (1)$$

其中  $G(s)$ ,  $G_o(s)$  和  $G(s)$  分别是相加模型误差、标称模型和实际被控对象. 由于标称模型的表示精度总在高频段变差, 文献[9]通过分析 3 类典型的情况发现  $|G(j)|$  的大小有一个共同边界, 该边界是一个常数项与一个随频率线性增大的项之和. 应用随机嵌入的思想<sup>[11,12]</sup> 描述这些特点, 相对模型误差可写为

$$G(s) = G^0 + sG^1,$$

其中  $G^0$  和  $G^1$  是满足以下条件的独立随机变量:

$$E\{G^0\} = 0, \quad E\{G^1\} = 0, \quad (2)$$

$$E\{G(j)\} = E\{G^0 + jG^1\} = 0 \quad (3)$$

$$E\{|G(j)|^2\} =$$

$$E\{|G^0|^2\} + 2E\{G^0 G^1\} + E\{|G^1|^2\} = 1/a^2 + 2/b^2. \quad (4)$$

对于一类非自衡对象, 其标称模型可表示为

$$G_o(s) = \frac{k_o}{s} e^{-sT_o},$$

实际的被控对象模型可根据未建模的时滞和直流增益表示为

$$G(s) = (1 + K_u) e^{-sT_u} G_o(s).$$

### 3 鲁棒重新设计

单位反馈控制系统如图 1 所示. 假设被控对象为一类非自衡对象, 系统具有阶跃参考输入和零初始状态.

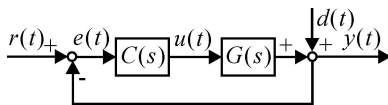


图 1 单位反馈控制系统

被控对象包含有一个积分项, 可使标称闭环系统稳定的控制器表示为

$$C(s) = \frac{Q_o(s)}{1 - G_o(s) Q_o(s)},$$

其中:  $Q_o(s) = sQ_o(s)$ ,  $Q_o(s)$  是一个稳定且严格正则的传递函数. 基于这一参数化, 标称的敏感度函数可写为

$$\begin{cases} T_o(s) = G_o(s) Q_o(s), \\ S_o(s) = 1 - G_o(s) Q_o(s), \\ S_w(s) = Q_o(s), \end{cases} \quad (5)$$

其中  $S_w(s)$  是标称的控制敏感度函数.

为了处理模型误差的影响, 将  $Q_o(s)$  变为  $Q_1(s)$ , 此时敏感度函数变为

$$S_1(s) = \frac{1 - G_o(s) Q_1(s)}{1 + G_o(s) G(s) Q_1(s)}, \quad (6)$$

$$S_{w1}(s) = \frac{Q_1(s)}{1 + G_o(s) G(s) Q_1(s)}, \quad (7)$$

其中  $G(s)$  是相对模型误差.

类似于相对模型误差的描述方法, 将  $Q_1(s)$  写为

$$Q_1(s) = Q_o(s) (1 + Q(s)). \quad (8)$$

将上式代入式(6)和(7), 敏感度函数写为

$$S_1(s) = \frac{S_o(s) - T_o(s) Q(s)}{1 + T_o(s) (1 + Q(s)) G(s)},$$

$$S_{w1}(s) = \frac{Q_o(s) (1 + Q(s))}{1 + T_o(s) (1 + Q(s)) G(s)}.$$

为使  $Q(s)$  在  $s = 0$  时为零, 假设

$$Q(s) = sQ(s). \quad (9)$$

由于控制能量约束和随机模型误差的存在, 本文采用以下形式的性能指标:

$$J = E\left\{ \int_0^\infty e(t)^2 dt + \int_0^\infty u(t)^2 dt \right\}, \quad (10)$$

其中  $\int_0^\infty$  用来作为跟踪目标和限制控制能量的相对重要性权重. 应用 Parseval 定理并假设具有互换积分和期望两操作符的规则性, 则基于一类随机模型误差的平均性能指标可写为

$$J = E\left\{ (1 - \frac{1}{2}) \int \frac{|S_1(j)|^2}{2} d\omega + \frac{1}{2} \int \frac{|S_{w1}(j)|^2}{2} d\omega \right\} = (1 - \frac{1}{2}) \int \frac{E\{|S_1(j)|^2\}}{2} d\omega + \frac{1}{2} \int \frac{E\{|S_{w1}(j)|^2\}}{2} d\omega. \quad (11)$$

然后确定使式(11)最小化的  $Q(s)$  值. 由于闭环稳定性要求  $|1 + Q| < 1$ , 可将  $(1 + Q)G$  作 Taylor 级数展开, 则敏感度函数  $S_1(s)$  和  $S_{w1}(s)$  写为

$$S_1 = [S_o - T_o Q] / [1 - T_o(1 + Q)G] = S_o - T_o Q - S_o T_o(1 + Q)G + T_o^2(1 + Q)Q G, \quad (12)$$

$$S_{w1} = [Q_o + Q_o Q] / [1 - T_o(1 + Q)G] = Q_o + Q_o Q - Q_o T_o(1 + Q)G - Q_o T_o(1 + Q)Q G. \quad (13)$$

以上两式中的最后一项大小都由  $(1 + Q)$ ,  $Q$  和  $G$  的乘积决定. 从文献[9]中可知,  $(1 + Q)$ ,  $Q$  和  $G$  的组合可确保以上两式中的最后一项大小相对于其他各项都很小, 于是可进一步将  $S_1(s)$  和  $S_{w1}(s)$  近似为

$$S_1 \approx (S_o - T_o Q) - S_o T_o(1 + Q)G,$$

$$S_{w1} \approx Q_o(1 + Q) - Q_o T_o(1 + Q)G.$$

将以上近似代入式(11)并运用相对模型误差描述的特性(3)和(4), 平均性能指标可进一步写为

$$J \approx (1 - \frac{1}{2}) \int \frac{|S_o - T_o Q|^2}{2} d\omega +$$

$$\left[ \frac{S_o / 2 + T_o / 2 + 1 + Q / 2}{b^2} \left( \frac{2 + b^2 / a^2}{2} \right) \right] d + \frac{1}{2} \left[ \frac{Q_o (1 + Q) / 2}{b^2} + \frac{Q_o / 2 + T_o / 2 + 1 + Q / 2}{b^2} \left( \frac{2 + b^2 / a^2}{2} \right) \right] d. \quad (14)$$

#### 4 最小化性能指标

对非自衡对象的时滞部分作一阶 Padé 近似处理, 有

$$e^{-sT_o} \left( 1 - \frac{a}{2}s \right) / \left( 1 + \frac{a}{2}s \right) = \frac{-s+c}{s+c},$$

其中  $c = 2/a$ , 则标称模型可写为

$$G_o(s) = \frac{-s+c}{s+c} \frac{k_o}{s} = B_T(s) \frac{k_o}{s}. \quad (15)$$

最优的标称控制器可表示为

$$Q_o(s) = \frac{s}{k_o(s+1)}, \quad (16)$$

其中  $0 < a < 1$ , 将  $T_o(s) = B_T(s)$ ,  $S_o(s) = 1 - B_T(s)$  和  $Q_o(s)$  代入式(14), 并利用式(9) 将  $j$  写为

$$j = (1 - a) \frac{1}{2} \left[ \frac{2 - (-j+c)Q / 2}{j+c/2} + \frac{4/1+j Q / 2 + j + b^2/a^2}{b^2/j+c/2} \right] d + \frac{1}{2} \left[ \frac{1+j Q / 2 + j + \sqrt{b^2+b^2/a^2}}{b^2 k_o / j + 1} \right] d.$$

对上式完成平方运算后, 发现  $|Q(j)|^2$  的系数项有一个谱分解, 将其记为  $H$ , 按照文献[13]的方法,  $J$  可写为

$$J = \frac{1}{2} \left[ |Q(j)H(j) + \frac{F(j)}{H(-j)}|^2 + D(j) \right] d, \quad (17)$$

其中

$$F(j) = (1 - a) \frac{-2b^2(j+c) - 4/j + b^2/a^2 j}{b^2/j+c/2} + \frac{-j/j + \sqrt{b^2+b^2/a^2}}{b^2 k_o / j + 1},$$

$$D(j) = (1 - a) \frac{4(b^2 + j + b^2/a^2)}{b^2/j+c/2} + \frac{j + \sqrt{b^2+b^2/a^2}}{b^2 k_o / j + 1}.$$

可见, 式(17)的大小仅仅取决于第1项, 所以其最小化可通过  $Q(s)$  作以下取值来实现:

$$Q(s) = - \frac{1}{H(s)} \left[ \frac{F(s)}{H(-s)} \right]_{\text{stable part}}. \quad (18)$$

这样便能实现最小的平均性能, 而重新设计的最优控制器可由式(8)和(9)得到.

敏感度函数同时描述了跟踪误差对参考输入及系统输出对外部扰动的响应, 而控制量对参考输入和外部扰动的响应都由控制敏感度函数来表达, 所以在外部阶跃扰动的作用下, 系统同样具有以上最优的控制性能.

#### 5 仿真研究

为了进一步说明以上结论, 本文首先考虑一个精馏塔控制系统<sup>[5]</sup>. 设被控对象具有以下标称模型:

$$G_o(s) = \frac{0.2}{s} e^{-7.4s},$$

则最优的标称控制器为

$$Q_o(s) = \frac{s}{0.2(s+1)}, \quad 0.$$

然后, 考虑模型不确定性和控制能量约束并存时的情形. 假设实际的被控对象具有以下形式:

$$G(s) = (1 + K_u) \frac{0.2}{s} e^{-s(7.4+T_u)},$$

其中  $K_u$  和  $T_u$  为分别在区间  $[-p_1, +p_1]$  和  $[-p_2, +p_2]$  上均匀分布的独立随机变量 (这里取  $p_1 = 0.5, p_2 = 1$ ), 则

$$E\{K_u^2\} = \frac{1}{2p_1} \int_{-p_1}^{p_1} K_u^2 dK_u = \frac{p_1^2}{2},$$

$$a = \sqrt{3}/p_1. \quad (19)$$

同理可得

$$b = \sqrt{3}/p_2. \quad (20)$$

将式(19), (20),  $k_o = 0.2, a = 0.1, c = 2/a$  和的3个不同取值  $0, 1/3$  和  $2/3$  代入式(18), 可得3个相应的最优  $Q(s)$  值, 进而得到3个不同重新设计的最优控制器  $Q_1(s)$ .

##### 5.1 时间响应

本文对摄动的被控对象和重新设计的控制器所构成闭环系统的鲁棒性能及抗干扰性能进行仿真研究. 在参考输入  $r(t) = 1(t-0)$  和外部扰动  $d(t) = 0.2(t-100)$  的作用下, 被控对象 (取  $K_u = 0.5$  和  $T_u = 1$ ) 由不同重新设计的控制器控制时闭环系统控制输入和系统输出的时间响应分别如图2和图3所示.

由仿真曲线可见, 尽管被控对象摄动很大, 但3个重新设计的控制器仍能将其镇定, 闭环系统呈现良好的动态性能, 且对外部扰动具有很好的抑制作用. 而最优的标称控制器是根据标称模型设计, 用来获取极限性能的, 对模型摄动不具有鲁棒性, 因而不能镇定该摄动对象 (仿真曲线中虚线、实线和粗实线分别对应于的3个不同取值  $0, 1/3$  和  $2/3$ ).

##### 5.2 最优平均性能

在区间  $[-p_1, +p_1]$  和  $[-p_2, +p_2]$  上分别均

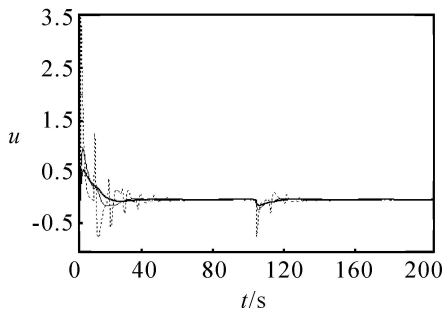


图 2 闭环系统控制输入的时间响应

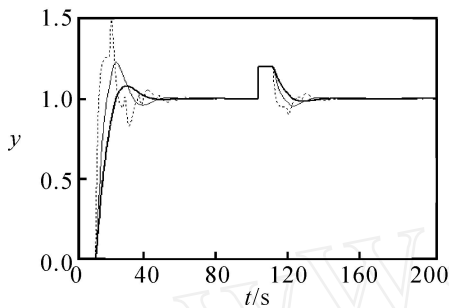


图 3 闭环系统输出的时间响应

匀地取  $K_u$  和  $T_u$  的  $10^2$  个确定的数值,产生  $10^4$  个摄动的被控对象.从时间  $t = 0$  到 200,对每个摄动被控对象和重新设计的控制器所构成的闭环系统在没有外部扰动时的跟踪误差  $e(t)$  和控制变量  $u(t)$  进行数字平方积分,可得到对应于不同重新设计的控制器平均跟踪性能  $\bar{P}_e$  和控制能量  $\bar{P}_u$ ,如表 1 所示.

表 1 对应于不同重新设计的控制器的平均性能

性 能	= 0	= 1/3	= 2/3
跟踪性能 $\bar{P}_e$	9.239 3	10.899 5	12.713 6
控制能量 $\bar{P}_u$	10.558 6	2.975 4	1.651 8

由表 1 可知,随着  $\alpha$  的增大,平均控制能量在减小,而平均跟踪误差在增大.显然,良好的跟踪性能是以大的控制能量为代价的,而控制能量约束相对重要性的提高将会导致较差的跟踪性能.这样,在控制系统设计过程中,便可根据模型摄动的程度和对跟踪性能与控制能量的实际要求来选择合适的值,由本文所给的方法得到重新设计的最优控制器.

## 6 结 论

在实际控制系统设计中,存在模型摄动和控制能量都需进行考虑的情形.本文将最优方法应用于控制器的设计,对模型不确定性和控制能量约束并存条件下一类非自衡被控对象的控制问题给出了一种最优的控制方法,可兼顾模型摄动和控制能量,对于实际控制系统的设计具有一定的指导意义和应用价值.

## 参考文献(References)

- [1] 蒋慰孙,俞金寿. 过程控制工程[M]. 北京: 烃加工出版社,1988.  
(Jiang W S, Yu J S. Process control engineering [M]. Beijing: Publishing Company of Hydrocarbon Process, 1988.)
- [2] 金以慧. 过程控制[M]. 北京:清华大学出版社,1993.  
(Jin Y H. Process control [M]. Beijing: Publishing Company of Tsinghua University, 1993.)
- [3] Chien I, Fruehauf P S. Consider IMC tuning to improve controller performance [J]. Chemical Engineering Program, 1990, 86(10): 33-41.
- [4] Tyreus B D, Luyben W L. Tuning PI controllers for integrator and dead time processes[J]. Ind Eng Chem Res, 1992, 31(10): 2625-2628.
- [5] 张卫东,孙优贤,许晓鸣. 一类非自衡对象 PID 控制[J]. 自动化学报,1999, 25(4): 518-523.  
(Zhang W D, Sun Y X, Xu X M. PID control for integrator and dead time processes[J]. Acta Automatica Sinica, 1999, 25(4): 518-523.)
- [6] Zhang W D. Quantitative performance design for integrating processes with time delay[J]. Automatica, 1999, 35(7): 719-723.
- [7] 张井岗,刘志远,裴润. 一类非自衡对象的二自由度 PID 控制[J]. 控制与决策, 2002, 17(6): 886-889.  
(Zhang J G, Liu Z Y, Pei R. Two-degree-of-freedom PID control for integrator and dead time process[J]. Control and Decision, 2002, 17(6): 886-889.)
- [8] Xie L, Guo L. How much uncertainty can be dealt with by feedback [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(12): 2203-2217.
- [9] Goodwin G C, Salgado M E, Yuz J I. Performance limitations for linear feedback systems in the presence of plant uncertainty [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(8): 1312-1319.
- [10] Chen J, Hara S, Chen G. Best tracking and regulation performance under control energy constraint[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(8): 1320-1336.
- [11] Goodwin G C, Salgado M E. A stochastic embedding approach for quantifying uncertainty in the estimation of restricted complexity models [J]. Int J Adapt Control Signal Processing, 1989, 3(4): 333-356.
- [12] Goodwin G C, Braslavsky J H, Serón M M. Non-stationary stochastic embedding for transfer function estimation[J]. Automatica, 2002, 38(1): 47-62.
- [13] Goodwin G C, Graebe S F, Salgado M E. Control system design[M]. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.