第 22 卷 第 5 期 控 制 与 决 策 2007 年 5 月
Vol. 22 No. 5 Control and Decision May 2007

文章编号: 1001-0920(2007)05-0540-05

不确定离散时间系统的变增益 H_2/H_∞滤波

马清亮, 胡昌华
(第二炮兵工程学院 自动化系, 西安 710025)

摘 要: 研究凸多面体不确定离散时间系统的变增益 H_2/H_∞滤波器设计问题. 通过引入附加松弛变量, 提出一种新的 Lyapunov 矩阵与系统矩阵解耦的混合 H_2/H_∞性能准则. 基于该性能准则, 推导了变增益 H_2/H_∞滤波器存在的充分条件, 并将滤波器设计问题转化为具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题. 仿真结果表明了所提出方法的有效性.

关键词: 混合 H_2/H_∞滤波; 变增益滤波; 凸优化; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Gain-scheduled H_2/H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems

MA Qing-liang, HU Chang-hua
(Department of Automation, The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China. Correspondent: MA Qing-liang, E-mail: mql99@sohu.com)

Abstract: The design problem of gain-scheduled H_2/H_∞ filter for polytopic discrete-time systems is investigated. By introducing additional slack variables, a new mixed H_2/H_∞ performance criterion is proposed, which provides the decoupling between Lyapunov matrix and system matrices. Based on the proposed performance criterion, a sufficient condition for the existence of gain-scheduled H_2/H_∞ filter is derived. Furthermore, the filter design problem is converted into a convex optimization problem with linear matrix inequality constraints. Simulation results show the effectiveness of the proposed design approach.

Key words: Mixed H_2/H_∞ filtering; Gain-scheduled filtering; Convex optimization; Linear matrix inequality

1 引 言

近年来, 不确定系统的 H_2/H_∞滤波问题受到越来越多的关注. 对于范数有界的参数不确定系统, 文献[1,2]研究了基于 Riccati 方程的鲁棒 H_2/H_∞滤波, [3,4]研究了基于线性矩阵不等式的鲁棒 H_2/H_∞滤波. 凸多面体参数不确定性广泛存在于航空航天系统、电路系统等[5-7]. 对于凸多面体不确定离散时间系统, [7,8]给出的基于二次稳定的鲁棒 H_2/H_∞滤波方案, 要求对于所有允许的参数不确定性, 系统存在一个统一的 Lyapunov 函数, 从而导致其设计结果具有较大的保守性. 为此, [9]提出了基于参数依赖 Lyapunov 函数的变增益 H_2/H_∞滤波方法, 对于不同的参数不确定性, 分别采用不同的 Lyapunov 函数, 并能根据当前参数的变化情况, 在线调整滤波器的参数矩阵, 从而在一定程度上降低了设计的保守性.

本文在文献[9]的基础上, 进一步研究凸多面体不确定离散时间系统的变增益 H_2/H_∞滤波问题. 为设计具有更小保守性的 H_2/H_∞滤波器, 借助于投影定理, 提出一种用于离散系统的混合 H_2/H_∞性能准则. 在此基础上, 推导出变增益 H_2/H_∞滤波器存在的充分条件, 并给出了最优化变增益 H_2/H_∞滤波器设计方法.

2 问题描述

考虑如下不确定离散时间系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(\alpha)x(k) + B_2(\alpha)w_2(k) + \\ \qquad B_\infty(\alpha)w_\infty(k), \\ y(k) = C(\alpha)x(k) + D_2(\alpha)w_2(k) + \\ \qquad D_\infty(\alpha)w_\infty(k), \\ z(k) = L(\alpha)x(k). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(k) \in R^n$ 为状态向量, $y(k) \in R^m$ 为测量输出, $w_2(k) \in R^r$ 为白噪声信号, $w_\infty(k) \in R^s$ 为能量有限的噪声信号, $z(k) \in R^p$ 为待估计的信号; 反映系统不确定性的矩阵 $A(\alpha), B_2(\alpha), B_\infty(\alpha), C(\alpha)$,

收稿日期: 2006-04-28; **修回日期**: 2006-08-05.
作者简介: 马清亮(1974—), 男, 河南商水人, 博士, 从事鲁棒控制与滤波、进化计算等研究; 胡昌华(1966—), 男, 湖北罗田人, 教授, 博士生导师, 从事系统故障诊断、容错控制等研究.

$D_2(\alpha)$, $D_\infty(\alpha)$ 和 $L(\alpha)$, 可表示为若干个顶点矩阵的凸组合, 即

$$\begin{bmatrix} A(\alpha) & B_2(\alpha) & B_\infty(\alpha) \\ C(\alpha) & D_2(\alpha) & D_\infty(\alpha) \\ L(\alpha) & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \begin{bmatrix} A_i & B_{2i} & B_{\infty i} \\ C_i & D_{2i} & D_{\infty i} \\ L_i & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

其中 $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i = 1$, $i = 1, 2, \cdots, N$.

构造如下形式的全阶滤波器:

$$\begin{cases} x_F(k+1) = A_F(\alpha) x_F(k) + B_F(\alpha) y(k), \\ z_F(k) = C_F(\alpha) x_F(k). \end{cases} \tag{3}$$

取状态向量 $\bar{x}(k) = \{x^{\mathrm{T}}(k), x_F^{\mathrm{T}}(k)\}^{\mathrm{T}}$, 误差输出 $\bar{z}(k) = z(k) - z_F(k)$, 则滤波误差系统的状态方程为

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \bar{A}(\alpha)\bar{x}(k) + \bar{B}_2(\alpha) w_2(k) + \\ \qquad \bar{B}_\infty(\alpha) w_\infty(k), \\ \bar{z}(k) = \bar{C}(\alpha)\bar{x}(k). \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$\bar{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} A(\alpha) & 0 \\ B_F(\alpha) C(\alpha) & A_F(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} B_2(\alpha) \\ B_F(\alpha) D_2(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_\infty(\alpha) = \begin{bmatrix} B_\infty(\alpha) \\ B_F(\alpha) D_\infty(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}(\alpha) = [L(\alpha) \quad -C_F(\alpha)].$$

本文研究的问题是: 对于不确定离散时间系统 (1), 给定 $\beta > 0$, $\gamma > 0$, 要求确定滤波器 (3) 的参数矩阵 $(A_F(\alpha), B_F(\alpha), C_F(\alpha))$, 使得滤波误差系统 (4) 渐近稳定, 并在满足约束 $\max_\alpha \|T_{\bar{z}w_\infty}(\alpha)\|_\infty < \gamma$ 和 $\max_\alpha \|T_{\bar{z}w_2}(\alpha)\|_2^2 < \beta$ 的条件下, 使得性能指标 $\max_\alpha \|T_{\bar{z}w_2}(\alpha)\|_2^2$ 尽可能达到最小. 其中 $T_{\bar{z}w_2}(\alpha)$ 和 $T_{\bar{z}w_\infty}(\alpha)$ 分别为从 $w_2(k)$ 和 $w_\infty(k)$ 到估计误差信号 $\bar{z}(k)$ 的闭环传递函数.

上述问题的数学描述为

$$\begin{cases} \min\limits_{A_F(\alpha), B_F(\alpha), C_F(\alpha)} \max_\alpha \|T_{\bar{z}w_2}(\alpha)\|_2^2; \\ \text{s.t.} \ \max_\alpha \|T_{\bar{z}w_\infty}(\alpha)\|_\infty < \gamma, \\ \qquad \max_\alpha \|T_{\bar{z}w_2}(\alpha)\|_2^2 < \beta. \end{cases} \tag{5}$$

3　主要结果

3.1　H_2 性能准则

引理 1[10]　给定矩阵 $H = H^{\mathrm{T}} \in R^{n\times n}$, $U \in R^{n\times m}$, $V \in R^{k\times n}$, 且 $m, k < n$. 则存在矩阵 $x \in R^{m\times k}$, 使得

$$H + UXV + (UXV)^{\mathrm{T}} < 0, \tag{6}$$

当且仅当

$$N_U H N_U^{\mathrm{T}} < 0, \ N_V^{\mathrm{T}} H N_V < 0. \tag{7}$$

其中 N_U 和 N_V^{T} 分别为 U 和 V^{T} 的正交补.

引理 2[9]　考虑系统 (1) 和滤波器 (3), 给定 $\beta > 0$, 则滤波误差系统 (4) 渐近稳定, 且 $\|T_{\bar{z}w_2}(\alpha)\|_2^2 < \beta$, 当且仅当存在矩阵 $0 < P_2(\alpha) = P_2^{\mathrm{T}}(\alpha) \in R^{2n\times 2n}$, $0 < Q(\alpha) \in R^{r\times r}$, 使得

$$\mathrm{Trace}(Q(\alpha)) < \beta, \tag{8}$$

$$\bar{B}_2^{\mathrm{T}}(\alpha) P_2(\alpha) \bar{B}_2(\alpha) < Q(\alpha), \tag{9}$$

$$-P_2(\alpha) + \bar{A}^{\mathrm{T}}(\alpha) P_2(\alpha) \bar{A}(\alpha) + \bar{C}^{\mathrm{T}}(\alpha)\bar{C}(\alpha) < 0. \tag{10}$$

下述定理给出了一个扩展的离散系统 H_2 性能准则:

定理 1　考虑系统 (1) 和滤波器 (3), 给定 $\beta > 0$, 则滤波误差系统 (4) 渐近稳定, 且 $\|T_{\bar{z}w_2}(\alpha)\|_2^2 < \beta$, 当且仅当存在矩阵 $0 < P_2(\alpha) = P_2^{\mathrm{T}}(\alpha) \in R^{2n\times 2n}$, $0 < Q(\alpha) \in R^{r\times r}$, $E(\alpha) \in R^{2n\times 2n}$, $G_2(\alpha) \in R^{2n\times 2n}$, $F_2(\alpha) \in R^{2n\times 2n}$, 使得式 (8) 成立, 同时满足

$$\begin{bmatrix} P_2(\alpha) - E(\alpha) - E^{\mathrm{T}}(\alpha) & * \\ \bar{B}_2^{\mathrm{T}}(\alpha) E(\alpha) & -Q(\alpha) \end{bmatrix} < 0, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} P_2(\alpha) - G_2(\alpha) - G_2^{\mathrm{T}}(\alpha) & * & * \\ -F_2^{\mathrm{T}}(\alpha) + \bar{A}^{\mathrm{T}}(\alpha) G_2(\alpha) & \Gamma_1 & * \\ 0 & \bar{C}(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

其中

$$\Gamma_1 = -P_2(\alpha) + F_2^{\mathrm{T}}(\alpha)\bar{A}(\alpha) + \bar{A}^{\mathrm{T}}(\alpha) F_2(\alpha), \tag{13}$$

* 表示由矩阵的对称性得到的矩阵块 (下同).

证明　只需证明式 (11) 与式 (9) 等价、式 (12) 与式 (10) 等价即可. 为此, 将式 (11) 改写为式 (6) 的形式, 其中

$$H = \begin{bmatrix} P_2(\alpha) & 0 \\ 0 & -Q(\alpha) \end{bmatrix}, \ U = \begin{bmatrix} -I \\ \bar{B}_2^{\mathrm{T}}(\alpha) \end{bmatrix},$$

$$V = [I \quad 0], \ X = E(\alpha).$$

选取 $N_U = [\bar{B}_2^{\mathrm{T}}(\alpha) \quad I]$, $N_V = [I \quad 0]$, 则有 $N_U H N_U^{\mathrm{T}} < 0$, $N_V^{\mathrm{T}} H N_V < 0$. 由引理 1 知, 存在矩阵 $Q(\alpha)$, $P_2(\alpha)$ 和 $E(\alpha)$, 使得式 (11) 成立的充要条件为式 (9) 成立, 即式 (11) 与式 (9) 等价.

同理, 可证式 (12) 与式 (10) 等价. □

3.2　H_∞ 性能准则

基于离散系统的有界实引理[9], 可得到一个扩展的离散系统 H_∞ 性能准则.

定理 2　考虑系统 (1) 和滤波器 (3), 给定 $\gamma > 0$, 则滤波误差系统 (4) 渐近稳定, 且 $\|T_{\bar{z}w_\infty}(\alpha)\|_\infty < \gamma$, 当且仅当存在矩阵 $0 < P_\infty(\alpha) = P_\infty^{\mathrm{T}}(\alpha) \in$

$R^{2n\times 2n}$, $G_\infty(\alpha)\in R^{2n\times 2n}$, $F_\infty(\alpha)\in R^{2n\times 2n}$,使得

$$\begin{bmatrix} P_\infty(\alpha)-G_\infty(\alpha)-G_\infty^{\mathrm T}(\alpha) & * & * & * \\ -F_\infty^{\mathrm T}(\alpha)+\overline{A}^{\mathrm T}(\alpha)G_\infty(\alpha) & \Gamma_2 & * & * \\ \overline{B}_\infty^{\mathrm T}(\alpha)G_\infty(\alpha) & \overline{B}_\infty^{\mathrm T}(\alpha)F_\infty(\alpha) & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \overline{C}(\alpha) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{14}$$

其中

$$\Gamma_2=-P_\infty(\alpha)+F_\infty^{\mathrm T}(\alpha)\overline{A}(\alpha)+\overline{A}^{\mathrm T}(\alpha)F_\infty(\alpha).$$

其证明过程类似于定理 1,此略.

3.3 混合 H_2/H_∞ 性能准则

基于定理 1 和定理 2, 可得到一种新的 Lyapunov 矩阵与系统矩阵解耦的混合 H_2/H_∞ 性能准则.

定理 3 考虑系统(1) 和滤波器(3) ,给定 $\beta>0$, $\gamma>0$, 则滤波误差系统(4) 渐近稳定, 且 $\|T_{\tilde z w_2}(\alpha)\|_2^2<\beta$, $\|T_{\tilde z w_\infty}(\alpha)\|_\infty<\gamma$. 其充分条件为存在矩阵 $0<Q(\alpha)\in R^{r\times r}$, $0<P_2(\alpha)=P_2^{\mathrm T}(\alpha)\in R^{2n\times 2n}$, $0<P_\infty(\alpha)=P_\infty^{\mathrm T}(\alpha)\in R^{2n\times 2n}$, $E(\alpha)\in R^{2n\times 2n}$, $G(\alpha)\in R^{2n\times 2n}$, $F_2(\alpha)\in R^{2n\times 2n}$ 和 $F_\infty(\alpha)\in R^{2n\times 2n}$,使得式(8) 和(11) 成立,同时满足

$$\begin{bmatrix} P_2(\alpha)-G(\alpha)-G^{\mathrm T}(\alpha) & * & * \\ -F_2^{\mathrm T}(\alpha)+\overline{A}^{\mathrm T}(\alpha)G(\alpha) & \Gamma_1 & * \\ 0 & \overline{C}(\alpha) & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} P_\infty(\alpha)-G(\alpha)-G^{\mathrm T}(\alpha) & * & * & * \\ -F_\infty^{\mathrm T}(\alpha)+\overline{A}^{\mathrm T}(\alpha)G(\alpha) & \Gamma_2 & * & * \\ \overline{B}_\infty^{\mathrm T}(\alpha)G(\alpha) & \overline{B}_\infty^{\mathrm T}(\alpha)F_\infty(\alpha) & -\gamma^2 I & * \\ 0 & \overline{C}(\alpha) & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{16}$$

其中 Γ_1 和 Γ_2 的意义同前.

注 1 与文献[9] 提出的命题 1 相比,定理 3 中除了引入附加矩阵 $G(\alpha)$ 之外,还引入了松弛变量 $E(\alpha)$, $F_2(\alpha)$ 和 $F_\infty(\alpha)$. 若令 $E(\alpha)=G(\alpha)$, $F_2(\alpha)=F_\infty(\alpha)=0$,则定理 3 等价于[9] 中的命题 1. 进一步令 $E(\alpha)=G(\alpha)=P_2(\alpha)=P_\infty(\alpha)$, $F_2(\alpha)=F_\infty(\alpha)=0$,则定理 3 等价于[9] 中的引理 3. 由于引入了较多的附加松弛变量,基于定理 3 设计 H_2/H_∞ 滤波器,有利于得到具有较低保守性的结果.

3.4 变增益 H_2/H_∞ 滤波器设计

基于定理 3,可推导出不确定系统(1) 的变增益 H_2/H_∞ 滤波器(3) 存在的充分条件.

定理 4 考虑不确定系统(1) ,给定 $\beta>0$, $\gamma>0$,以及 δ_{1i}, δ_{2i}, ε_{1i}, ε_{2i}, τ_{1i}, τ_{2i},则存在滤波器(3) ,使得滤波误差系统(4) 渐近稳定,且 $\|T_{\tilde z w_2}(\alpha)\|_2^2<\beta$, $\|T_{\tilde z w_\infty}(\alpha)\|_\infty<\gamma$. 其充分条件为存在矩阵

$$0<Q_i,\ 0<\overline{P}_{2i}=\begin{bmatrix}\overline{P}_{21i} & \overline{P}_{22i}\\ \overline{P}_{22i}^{\mathrm T} & \overline{P}_{23i}\end{bmatrix},$$

$$0<\overline{P}_{\infty i}=\begin{bmatrix}\overline{P}_{\infty 1i} & \overline{P}_{\infty 2i}\\ \overline{P}_{\infty 2i}^{\mathrm T} & \overline{P}_{\infty 3i}\end{bmatrix},$$

以及 R_i, S_i, T_i, $\overline{A_{Fi}}$, $\overline{B}_{Fi}$, $\overline{C}_{Fi}$, Λ_{ij}, Σ_{ij}, Ξ_{ij}, 满足如下条件:

$$\mathrm{Trace}(Q_i)<\beta,\ i=1,2,\cdots,N, \tag{17}$$

$$\Phi_{ij}+\Phi_{ji}-\Lambda_{ij}-\Lambda_{ij}^{\mathrm T}\le 0,\ 1\le j<i\le N, \tag{18}$$

$$\Psi_{ij}+\Psi_{ji}-\Sigma_{ij}-\Sigma_{ij}^{\mathrm T}\le 0,\ 1\le j<i\le N, \tag{19}$$

$$\Theta_{ij}+\Theta_{ji}-\Xi_{ij}-\Xi_{ij}^{\mathrm T}\le 0,\ 1\le j<i\le N, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11} & * & \cdots & * \\ \Lambda_{21} & \Phi_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \Lambda_{N1} & \Lambda_{N2} & \cdots & \Phi_{NN}\end{bmatrix}<0, \tag{21}$$

$$\begin{bmatrix}\Psi_{11} & * & \cdots & * \\ \Sigma_{21} & \Psi_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \Sigma_{N1} & \Sigma_{N2} & \cdots & \Psi_{NN}\end{bmatrix}<0, \tag{22}$$

$$\begin{bmatrix}\Theta_{11} & * & \cdots & * \\ \Xi_{21} & \Theta_{22} & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ \Xi_{N1} & \Xi_{N2} & \cdots & \Theta_{NN}\end{bmatrix}<0. \tag{23}$$

进而,若以上矩阵不等式系统存在可行解,则变增益 H_2/H_∞ 滤波器(3) 的参数矩阵可由下式构造:

$$\begin{bmatrix}A_F(\alpha) & B_F(\alpha)\\ C_F(\alpha) & 0\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i^{1}T_i^{-1} & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\overline{A_{Fi}} & \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\overline{B}_{Fi}\\ \sum_{i=1}^{N}\alpha_i\overline{C}_{Fi} & 0\end{bmatrix}. \tag{24}$$

其中

$$\Phi_{ij}=\begin{bmatrix}\overline{P}_{21i}-\delta_{1i}R_i-\delta_{1i}R_i^{\mathrm T} & * & * \\ \overline{P}_{22i}^{\mathrm T}-\delta_{1i}S_i^{\mathrm T}-\delta_{2i}T_i^{\mathrm T} & \overline{P}_{23i}-\delta_{2i}T_i-\delta_{2i}T_i^{\mathrm T} & * \\ \delta_{1i}B_{2j}^{\mathrm T}R_i+\delta_{2i}D_{2j}^{\mathrm T}\overline{B}_{Fi}^{\mathrm T} & \delta_{1i}B_{2j}^{\mathrm T}S_i+\delta_{2i}D_{2j}^{\mathrm T}\overline{B}_{Fi}^{\mathrm T} & -Q_i\end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\overline{P}_{21i}-R_i-R_i^{\mathrm T} & * \\ \overline{P}_{22i}^{\mathrm T}-S_i^{\mathrm T}-T_i^{\mathrm T} & \overline{P}_{23i}-T_i-T_i^{\mathrm T} \\ A_j^{\mathrm T}R_i+C_j^{\mathrm T}\overline{B}_{Fi}^{\mathrm T}-\varepsilon_{1i}R_i^{\mathrm T} & A_j^{\mathrm T}S_i+C_j^{\mathrm T}\overline{B}_{Fi}^{\mathrm T}-\varepsilon_{2i}T_i \rightarrow \\ \overline{A}_{Fi}^{\mathrm T}-\varepsilon_{1i}S_i^{\mathrm T} & \overline{A}_{Fi}^{\mathrm T}-\varepsilon_{2i}T_i \\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ \leftarrow\Gamma_3 & * & * \\ \Gamma_4 & -\overline{P}_{23i}+\varepsilon_{2i}(\overline{A_{Fi}}+\overline{A}_{Fi}^{\mathrm T}) & * \\ L_i & -\overline{C}_{Fi} & -I\end{bmatrix},$$

$$
\boldsymbol{\Xi}_{ij}=\begin{bmatrix}
\bar{P}_{\infty1i}-R_i-R_i^{\mathrm{T}} & * & * & * & * & * \\
\bar{P}_{\infty2i}^{\mathrm{T}}-S_i^{\mathrm{T}}-T_i^{\mathrm{T}} & \bar{P}_{\infty3i}-T_i-T_i^{\mathrm{T}} & * & * & * & * \\
A_j^{\mathrm{T}}R_i+C_j^{\mathrm{T}}\bar{B}_{Fi}^{\mathrm{T}}-\tau_{1i}R_i^{\mathrm{T}} & A_j^{\mathrm{T}}S_i+C_j^{\mathrm{T}}\bar{B}_{Fi}^{\mathrm{T}}-\tau_{2i}T_i & \boldsymbol{\Gamma}_5 & * & * & * \\
\overline{A}_{Fi}^{\mathrm{T}}-\tau_{1i}S_i^{\mathrm{T}} & \overline{A}_{Fi}^{\mathrm{T}}-\tau_{2i}T_i & \boldsymbol{\Gamma}_6 & -\bar{P}_{\infty3i}+\tau_{2i}(\overline{A}_{Fi}+\overline{A}_{Fi}^{\mathrm{T}}) & * & * \\
B_{\infty j}^{\mathrm{T}}R_i+D_{\infty j}^{\mathrm{T}}\bar{B}_{Fi}^{\mathrm{T}} & B_{\infty j}^{\mathrm{T}}S_i+D_{\infty j}^{\mathrm{T}}\bar{B}_{Fi}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{\Gamma}_7 & \tau_{1i}B_{\infty j}^{\mathrm{T}}S_i+\tau_{2i}D_{\infty j}^{\mathrm{T}}\bar{B}_{Fi}^{\mathrm{T}} & -\gamma^2 I & * \\
0 & 0 & L_i & -\bar{C}_{Fi} & 0 & -I
\end{bmatrix}.
$$

其中

$$\boldsymbol{\Gamma}_3=-\bar{P}_{21i}+\varepsilon_{1i}(R_i^{\mathrm{T}}A_j+A_j^{\mathrm{T}}R_i)+\varepsilon_{2i}(\bar{B}_{Fi}C_j+C_j^{\mathrm{T}}\bar{B}_{Fi}^{\mathrm{T}}),$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_4=-\bar{P}_{22i}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_{1i}S_i^{\mathrm{T}}A_j+\varepsilon_{2i}(\overline{A}_{Fi}^{\mathrm{T}}+\bar{B}_{Fi}C_j),$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_5=-\bar{P}_{\infty1i}+\tau_{1i}(R_i^{\mathrm{T}}A_j+A_j^{\mathrm{T}}R_i)+\tau_{2i}(\bar{B}_{Fi}C_j+C_j^{\mathrm{T}}\bar{B}_{Fi}^{\mathrm{T}}),$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_6=-\bar{P}_{\infty2i}^{\mathrm{T}}+\tau_{1i}S_i^{\mathrm{T}}A_j+\tau_{2i}(\overline{A}_{Fi}^{\mathrm{T}}+\bar{B}_{Fi}C_j),$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_7=\tau_{1i}B_{\infty j}^{\mathrm{T}}R_i+\tau_{2i}D_{\infty j}^{\mathrm{T}}\bar{B}_{Fi}^{\mathrm{T}}.$$

该定理的证明可参阅文献[9,11,12],此略.

注 2　当 $\delta_{1i}=\delta_{2i}=1,\varepsilon_{1i}=\varepsilon_{2i}=\tau_{1i}=\tau_{2i}=0$ 时,定理 4 与文献[9]的定理 1 等价. 与[9]的定理 1 相比,定理 4 通过引入 $6N$ 个附加松弛变量,即 δ_{1i}, δ_{2i}, ε_{1i}, ε_{2i}, τ_{1i} 和 $\tau_{2i}(1\le i\le N)$,能为 H_2/H_∞ 滤波器的设计提供更多的自由度,从而有利于进一步降低设计的保守性.

推论 1　给定 $\gamma>0$,若如下的凸优化问题:

$$
\begin{cases}
\min\limits_{\substack{Q_i,\bar{P}_{21i},\bar{P}_{22i},\bar{P}_{23i},\bar{P}_{\infty1i},\bar{P}_{\infty2i},\bar{P}_{\infty3i},R_i,S_i,\\ T_i,\overline{A}_{Fi},\bar{B}_{Fi},\bar{C}_{Fi},\delta_{1i},\delta_{2i},\varepsilon_{1i},\varepsilon_{2i},\tau_{1i},\tau_{2i}}}\beta, \\
\text{s.t. } (17)\sim(23).
\end{cases}
\tag{25}
$$

有解(其中 $\forall i=1,2,\cdots,N$),则结合定理 4,利用该优化问题的最优解,由式(24)可设计系统(1)的最优化变增益 N_2/H_∞ 滤波器,相应的 H_2 性能的上界为 β.

注 3　矩阵变量 T_i, $\overline{A}_{Fi}$, $\bar{B}_{Fi}$ 和 $\bar{C}_{Fi}$ 的最优解可通过离线求解优化问题(25)得到,因此基于推论 1 设计变增益 H_2/H_∞ 滤波器,需要进行实时计算的只有式(24),在线计算量小,实现简便.

4　示例仿真

考虑由式(1)描述的不确定离散系统[9],其中

$$A=\begin{bmatrix}0 & -0.8\\ 1.2+0.1d & -0.5\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

$$B_\infty=\begin{bmatrix}-0.45\\0.35\end{bmatrix},\ C=[0.35\quad -0.65],$$

$$D_2=1.3,\ D_\infty=0.4,\ L=[0.2\quad 0].$$

其中不确定参数 d 满足 $|d|\le\bar{d}(\bar{d}\ge0$ 已知).

给定 $\gamma=0.2$, $\bar{d}=0.1$,运用本文方法设计变增益 H_2/H_∞ 滤波器. 通过求解凸优化问题(25),可得 H_2 性能指标的最小上界 $\beta=0.032\,4$,以及 T_i, $\overline{A}_{Fi}$, $\bar{B}_{Fi}$ 和 $\bar{C}_{Fi}$ 的最优解

$$T_1=\begin{bmatrix}0.057\,3 & 0.007\,0\\ 0.007\,5 & 0.030\,8\end{bmatrix},$$

$$T_2=\begin{bmatrix}0.058\,4 & 0.006\,8\\ 0.010\,3 & 0.030\,5\end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_{F1}=\begin{bmatrix}-0.003\,7 & -0.027\,7\\ 0.020\,3 & 0.007\,7\end{bmatrix},$$

$$\overline{A}_{F2}=\begin{bmatrix}-0.004\,0 & -0.027\,5\\ 0.020\,7 & 0.006\,8\end{bmatrix},$$

$$\bar{B}_{F1}=\begin{bmatrix}-0.037\,7\\ -0.044\,7\end{bmatrix},\ \bar{B}_{F2}=\begin{bmatrix}-0.035\,3\\ -0.046\,3\end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_{F1}=[-0.201\,2\quad 0.000\,6],$$

$$\bar{C}_{F2}=[-0.198\,8\quad 0.001\,0].$$

基于 T_i, $\overline{A}_{Fi}$, $\bar{B}_{Fi}$ 和 $\bar{C}_{Fi}$ 的最优解,根据式(24)可设计系统(1)的变增益 H_2/H_∞ 滤波器(3). 进一步计算可知,相应滤波误差系统(4)的实际 H_∞ 和 H_2 性能指标的上界分别为 0.198 5 和 0.027 1,满足给定的 H_∞ 性能约束条件,从而表明了本文方法的可行性.

对于不同的 $\bar{d}$ 取值,图 1 给出了本文方法与文献[8,9]的设计结果对比.

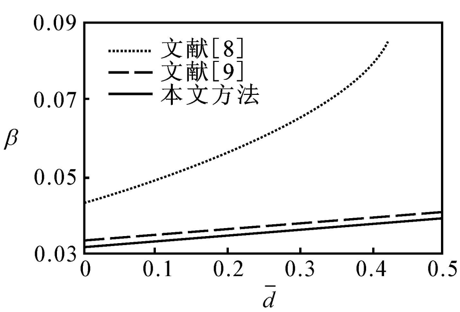

图 1　3 种方法的设计结果

由图 1 可以看出,与文献[8,9]相比,本文方法能够得到具有更小保守性的设计结果.

5　结　　语

本文通过引入附加松弛变量,提出一种新的 Lyapunov 矩阵与系统矩阵解耦的混合 H_2/H_∞ 性能准则,并将其应用于凸多面体不确定离散系统的变增益 H_2/H_∞ 滤波器优化设计. 仿真结果表明,本文方法具有较低的保守性,且实现简便.

参考文献(References)

[1] Wang Z, Huang B. Robust H_2/H_∞ filtering for linear systems with error variance constraints [J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2000, 48(8): 2463-2467.

[2] Wang Z, Unbehauen H. Robust H_2/H_∞ state estimation for systems with error variance constraints: The continuous-time case [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(5): 1061-1065.

[3] Yang F, Wang Z, Hung Y S, et al. Mixed H_2/H_∞ filtering for uncertain systems with regional pole assignment [J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2005, 41(2): 438-448.

[4] Yang F. Hung Y S. Robust mixed H_2/H_∞ filtering with regional pole assignment for uncertain discrete-time systems [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems —I: Fundamental Theory and Applications, 2002, 49(8): 1236-1241.

[5] Montagner V F, Oliveira R C L, Leite V J S, et al. LMI approach for H_∞ linear parameter-varying state feedback control [J]. IEE Proc: Control Theory and Applications, 2005, 152(2): 195-201.

[6] Goncalves E N, Palhares R M, Takahashi R H C. Multiobjective optimization applied to robust H_2/H_∞ state-feedback control synthesis[C]. Proc of the 2004 American Control Conf. Boston, 2004, 5: 4619-4624.

[7] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Yu L. Robust control: Linear matrix inequality method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[8] Palhares R M, Peres P L D. LMI approach to the mixed H_2/H_∞ filtering design for discrete-time uncertain systems[J]. IEEE Trans on Aerospace and Electronic Systems, 2001, 37(1): 292-296.

[9] Gao H, Lam J, Xie L, et al. New approach to mixed H_2/H_∞ filtering for polytopic discrete-time systems[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2005, 53(8): 3183-3192.

[10] Mehdi D, Boukas E K, Bachelier O. Static output feedbck design for uncertain linear discrete-time systems [J]. IMA J of Mathematical Control and Information, 2004, 21(1): 1-13.

[11] He L, Wu A, Duan G. Improved mixed H_2/H_∞ filtering for uncertain continuous-time systems [C]. Proc of the 6th World Congress on Control and Automation. Dalian, 2006, 3: 2412-2416.

[12] Apkarian P, Tuan H D, Bernussou J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment and H_2 synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(12): 1941-1946.

下 期 要 目