

文章编号: 1001-0920(2007)05-0554-04

## 基于 BA 生长网络的产品市场演化分析

高齐圣<sup>1</sup>, 耿金花<sup>1</sup>, 方爱丽<sup>1</sup>, 张嗣瀛<sup>1,2</sup>

(1. 青岛大学 复杂性科学研究所, 山东 青岛 266071; 2. 东北大学 信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

**摘要:** 基于 BA 生长网络的形成机理, 提出产品市场和顾客选择的 BA 扩展模型. 基于概率理论证明了主方程与 Polya 过程模型的等价性, 据此探讨了描述顾客选择行为的概率函数类别对产品市场宏观行为的影响, 包括线性概率模型、Logistic 模型和抽样 OC 曲线模型及其不动点分析等. 最后结合实例进行说明和验证.

**关键词:** 产品市场; BA 网络; Polya 过程; 离散选择模型

**中图分类号:** F323 **文献标识码:** A

## Analysis of product market evolution based on BA growing networks

GAO Qi-sheng<sup>1</sup>, GENG Jin-hua<sup>1</sup>, FANG Ai-li<sup>1</sup>, ZHANG Si-ying<sup>1,2</sup>

(1. Institute of Complexity Science, Qingdao University, Qingdao 266071, China; 2. College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: GAO Qi-sheng, E-mail: gao\_qisheng@yahoo.com.cn)

**Abstract:** Based on the development mechanism of BA growing networks, an extended BA model about product market and choice behavior of customers is proposed. The equivalence of master equation and Polya process model is proved by using the theory of probability. According to this, some kinds of probability functions which depict the customers' choice are discussed, including linear probability model, logistic model and OC curve model. With these models and the analysis of their fixed points, the influence to the macroscopical behavior of the market is investigated. At last, several examples are given to illustrate and validate the proposed conclusion.

**Key words:** Product market; BA networks; Polya process; Discrete choice model

### 1 引言

近年来, 复杂网络已成为揭示自然界和人类社会中各种复杂系统结构和行为的重要手段. 产品市场是由生产同类产品的若干企业和顾客组成的网络, 不同企业的产品在市场上受到顾客的选择. 顾客的选择行为各不相同, 有个性化偏好, 也有从众心理, 会表现为正反馈过程. 个别顾客的选择是随机的, 微小随机事件的累积, 在正反馈的作用下会形成一种倾向, 使系统向某一确定性结构演变.

产品市场中最为突出的状态变量是市场份额, 可以用来刻画产品市场的结构. 本文在 BA 生长网络模型的基础上, 结合产品市场中顾客选择的实际情况, 提出一种扩展模型, 并证明了该扩展 BA 网络的主方程与非线性 Polya 过程模型的等价性, 进而给出网络的偏好连接、度分布、不动点类型与系统演

化行为之间的关系, 为产品市场决策提供依据.

### 2 扩展 BA 生长网络模型

#### 2.1 扩展 BA 网络生长过程

结合 Barabasi 等<sup>[1,2]</sup> 提出的 BA 网络生成和产品市场的实际情况, 提出扩展 BA 网络模型的描述如下:

(1) 生长

规定  $N$  个节点分别代表  $N$  个企业, 开始时刻记为  $t_0$ . 假定开始时各节点  $s$  已各有  $K_0^s$  个顾客选择连接,  $s = 1, 2, \dots, N$ , 市场初始规模为  $t_0 = \sum_{s=1}^N K_0^s$ . 每一时刻新增加一个顾客, 与系统中的  $N$  个企业节点中的一个连接, 记为二分类随机变量  $y_t^s$ .  $y_t^s = 1$  说明第  $t$  时刻顾客选择  $s$  企业,  $y_t^s = 0$  说明第  $t$  时刻顾客未选择  $s$  企业.

收稿日期: 2006-03-23; 修回日期: 2006-06-21.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70571041); 高校博士点专项基金项目(20051065002); 山东省“泰山学者”建设工程专项经费项目.

作者简介: 高齐圣(1966—), 男, 山东昌乐人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统、系统工程等研究; 耿金花(1979—), 女, 山西平遥人, 博士生, 从事复杂系统、系统工程等研究.

(2) 优先连接

记  $t$  时刻顾客选择  $s$  企业的概率为  $q_t^s$ , 按照优先连接的思想,  $q_t^s$  应与节点  $s$  的度数  $K_t^s$  成正比, 与节点  $s$  的相对度数  $X_t^s = K_t^s / \sum_{s=1}^N K_t^s$  也成正比, 即  $q_t^s = p\{y_t^s = 1 / X_t^s\} = q_t(X_t^s)$ . 仿照初始时刻  $t_0$  的处理,  $t = N$  时,  $K_t^s$  因而  $X_t^s = K_t^s / t$ . 此时  $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^s, \dots, X_t^N)^T$  是  $t$  时刻市场份额, 它代表了产品市场状态强度或者网络密度.

2.2 理论方法

研究 BA 网络动力学常用的方法有两种<sup>[1,2]</sup>: 基于连续性理论的动力学方法(包括平均场和率方程)和基于概率理论的主方程方法. Krapivsky 等验证了在相同参数条件下, 用主方程与用率方程是等价的, 它们对于度分布提供同样的渐近解. Dorogovtsev 等<sup>[3]</sup>研究了连接概率  $q_t^s = K_t^s / t$  时度分布的渐近解(简称 DMS 模型). Krapivsky 等<sup>[4]</sup>研究了连接概率  $q_t^s = (K_t^s)^\alpha$  时,  $\alpha = 0, 0 < \alpha < 1, \alpha = 1, \alpha > 1$  这 4 种情况下网络的演化结果, 得到  $\alpha = 0$  是 ER 模型,  $\alpha = 1$  是能够涌现 Scale-free 特征的 BA 模型<sup>[5]</sup>.

以下说明主方程方法等价于概率论中的 Polya 过程模型<sup>[5]</sup>, 这为研究 BA 生长网络提出了新的研究方法, 借助于它可对产品市场演化进行深入分析.

设  $t$  时刻企业  $s$  有  $k$  个顾客相连接的概率为  $p(k, s, t)$ , 概率  $p(k, s, t)$  满足如下主方程:

$$p(k, s, t + 1) = p(k - 1, s, t) q(k - 1, t) + p(k, s, t) (1 - q(k, t)), \quad (1)$$

其中  $q(k, t)$  表示在  $t$  时刻度数为  $k$  时, 下一时刻顾客选择该点的概率.

记  $t$  时刻选择企业  $s$  的顾客数量期望值为  $K_t^s$ , 则

$$K_{t+1}^s = \sum_{k=1}^{t+1} k p(k, s, t + 1) = \sum_{k=1}^{t+1} k p(k, s, t) + \sum_{k=1}^{t+1} k p(k - 1, s, t) q(k - 1, t) - \sum_{k=1}^{t+1} k p(k, s, t) q(k, t) = K_t^s + \sum_{k=0}^t p(k, s, t) q(k, t). \quad (2)$$

记  $q_t^s = \sum_{k=0}^t p(k, s, t) q(k, t)$ , 它表示  $k$  时刻一位顾客连接到第  $s$  企业的概率, 可得

$$K_{t+1}^s = K_t^s + q_t^s. \quad (3)$$

考虑到  $K_t^s = t X_t^s$ , 得到如下 Polya 过程描述:

$$X_{t+1}^s = X_t^s + \frac{1}{t+1} (q_t^s - X_t^s), s = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

由此可见, BA 生长网络主方程方法与 Polya 过程模型是等效的, 可以考虑顾客选择概率函数、不动点类型和系统演化结果.

3 离散选择模型与市场演化分析

3.1 顾客选择行为的影响因素

在标准 BA 网络及其扩展模型中, 顾客选择概率函数都假定

$$q_t^s = p\{y_t^s = 1 / X_t^s\} = q_t(X_t^s). \quad (5)$$

这意味着顾客选择企业  $s$  的概率只取决于该企业的市场份额  $X_t^s$ . 事实上, 它与其他企业的市场份额有关, 即与整个网络的状态强度有关<sup>[6]</sup>. 正确的设置是  $q_t^s = p\{y_t^s = 1 / X_t\} = q_t(X_t)$ , 这里  $X_t = (X_t^1, X_t^2, \dots, X_t^N)^T$ . 但从顾客的角度很难获取整个市场份额的信息, 能够掌握的主要还是局部信息, 如某一企业市场份额  $X_t^s$  的信息. 这也是目前有关 BA 网络主方程讨论中都假定式(5)的主要原因. 对式(5)作一般扩展, 有

$$X_{t+1} = X_t + \frac{1}{t+1} (q_t(X_t) - X_t), \quad (6)$$

其不动点向量由  $q_t(X_t) = X_t$  确定.

3.2 线性概率模型与不动点分析

相对于产品市场份额信息而言, 顾客更容易获取的往往是对产品市场中各个企业产品质量(或声望)的评价信息. 利用这些信息可以构造反映  $N$  个企业(节点)之间质量声望的判断矩阵  $A$ , 用以反映顾客选择的个性化偏好. 这里提供两种矩阵  $A$  的构造方法.

(1) 层次分析法(AHP)<sup>[7]</sup>

设  $A$  是成对比较判断矩阵,  $a_{sj}$  表示企业  $s$  与企业  $j$  的质量水平比较, 通常按 1 ~ 9 比例标度赋值, 且  $a_{ji} = 1/a_{ij}, a_{ii} = 1$ .

选取顾客选择概率函数

$$q_t(X_t) = \frac{1}{\max} A X_t, \quad (7)$$

则系统不动点变为

$$A X^* = \max X^*. \quad (8)$$

由判断矩阵  $A$  的性质可知, 此时系统的不动点  $X^* = (X^{*1}, X^{*2}, \dots, X^{*N})^T$  是稳定的.

(2) 马尔科夫链法<sup>[8]</sup>

取  $a_{sj} = p\{y_t^s = 1 / y_t^j = 1\}, s, j = 1, 2, \dots, N$ . 此时把顾客的选择行为看成一个马尔科夫链, 则  $A$  就是相应的一步转移概率矩阵. 于是

$$q_t(X_t) = A X_t. \quad (9)$$

在该顾客选择概率下, 系统的不动点变成

$$X^* = A X^*. \quad (10)$$

关于上述不动点的求解, 当矩阵  $A$  为正则马尔

科夫链的一步转移矩阵时,不动点  $X^* = (X^1, X^2, \dots, X^N)^T$  也是稳定的,且为马尔科夫链的平稳分布<sup>[8]</sup>.

从 Polya 过程模型可以得到,在(1)和(2)的情况下,不管系统的初始状态如何,系统最终趋于稳定的不动点  $X^*$ ,  $X^*$  代表市场达到均衡时的市场份额.可见在此网络生成过程中,顾客选择偏好是由企业的质量声望决定的,与初始状态无关.企业应在提高产品质量水平、增强质量声望方面下功夫.特别是当  $A$  取单位矩阵时,  $q_i^s = X_i^s, s = 1, 2, \dots, N$ , DMS 的主方程中取  $q(k, t) = k/t$  即可得到此结果.在该选择函数下,  $X_i^s$  的任意值都是不动点,有无穷多个.于是系统演化方程变为

$$X_{t+1} = X_t = \dots = X_0. \quad (11)$$

在这种情况下,系统演化可以锁定在任一不动点.至于锁定在哪一点,则完全取决于初始状态.对于这种演化过程,初始阶段的竞争是非常重要的,企业应抢占先机.

### 3.3 非线性概率模型<sup>[9]</sup>与不动点分析

面对产品市场中的  $N$  个企业,顾客选择是一个多分类离散选择模型. Fair 等因此方面的工作而获得 2000 年度诺贝尔经济学奖.由于市场信息的不完备,顾客不能掌握整个市场份额情况,只能了解企业  $s$  的局部信息  $X_i^s$ . 以下主要讨论在已知局部信息下顾客的非线性选择问题.

非线性概率选择函数  $q_i^s = q(X_i^s)$  取哪种形式,取决于顾客的选择行为和企业的措施.令  $u_i^s$  代表第  $t$  时刻到达顾客的偏好差别,它是  $X_i^s$  和随机误差  $\epsilon_t$  的函数.  $\epsilon_t$  代表其他未考虑因素的综合影响,有

$$u_i^s = \epsilon_t + \epsilon_s X_i^s + \epsilon_t. \quad (12)$$

当顾客的偏好差别值超过一个临界点  $c$  (比如  $c = 0$ ) 时,便导致事件  $\{y_i^s = 1\}$  发生.于是有

$$y_i^s = \begin{cases} 1, & u_i^s > 0; \\ 0, & u_i^s \leq 0. \end{cases} \quad (13)$$

假定误差项  $\epsilon_t$  分布函数为  $F(\cdot)$ , 则有

$$q(X_i^s) = p\{y_i^s = 1 \mid X_i^s\} = F(\epsilon_s + \epsilon_s X_i^s). \quad (14)$$

1) 选择  $F(\cdot)$  是  $[0, 1]$  上的均匀分布,即

$$q(X_i^s) = F(\epsilon_s + \epsilon_s X_i^s) = \begin{cases} \epsilon_s + \epsilon_s X_i^s, & 0 \leq \epsilon_s + \epsilon_s X_i^s \leq 1; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (15)$$

这是一个线性概率模型,通常有一个稳定不动点.

2) 选择  $F(\cdot)$  是标准 Logistic 分布,即

$$q(X_i^s) = F(\epsilon_s + \epsilon_s X_i^s) = \frac{1}{1 + e^{-(a_s + \epsilon_s X_i^s)}}. \quad (16)$$

这是一个 S 型非线性概率模型,不动点数目为 1 个或 3 个.

在不动点处线性化,可得到 Jacobian 矩阵  $A$  为对角矩阵.对角线上的元素为

$$a_{ss} = \left. \frac{\partial q_i^s}{\partial X_i^s} \right|_{X_i^s} = \frac{e^{-(a_s + \epsilon_s X_i^s)}}{1 + e^{-(a_s + \epsilon_s X_i^s)}} \frac{1}{1 + e^{-(a_s + \epsilon_s X_i^s)}}, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (17)$$

如果满足  $|a_{ss}| < 1, s = 1, 2, \dots, N$ , 则不动点  $X^* = (X^1, X^2, \dots, X^N)^T$  是稳定的.

3) 选择  $F(\cdot)$  是抽样方案的 OC 曲线,即

$$q(X_i^s) = L(1 - X_i^s) = \sum_{r=0}^c C_n^r (1 - X_i^s)^r X_i^{n-r}. \quad (18)$$

其中:  $(n, c)$  为一次抽样方案的设计参数<sup>[10]</sup>;  $L(\cdot)$  为抽样特性曲线(简称 OC 曲线),是递减的 S 型曲线.选用  $L(1 - X_i^s)$  可变为随  $X_i^s$  递增的 S 型曲线,符合分布函数  $F(\cdot)$  的要求.

这也是一个 S 型非线性概率模型,不动点数目为 1 个或 3 个.在多个不动点中,有稳定的,也有不稳定的.系统的演化将趋向于某个稳定的不动点,于是是哪个稳定的不动点,则与初始阶段的随机路径有关.

### 4 实例探讨

例 1 以  $N = 3$  为例,通过对整个产品市场竞争性评估,得到反映企业产品质量声望的成对判断矩阵.这里  $A$  的元素按 1(相等), 3(较强), 5(明显强), 7(很强), 9(绝对强) 比例标度赋值,即

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

按照 AHP 方法,可求得最大特征值  $\lambda_{max} = 3.0385$ , 其对应的特征向量为

$$X^* = (0.6370, 0.2583, 0.1047)^T.$$

此时,顾客选择概率函数可取  $q_i = 0.3291AX_t$ , 产品市场份额的演化方程为

$$X_{t+1} = X_t + \frac{1}{t+1} (0.3291AX_t - X_t).$$

在此线性概率模型下,不论市场状态初始值  $X_0$  如何,产品市场最终都能达到均衡点  $X^*$ .

例 2 以  $N = 3$  为例,通过对整个产品市场竞争性评估,得到反映企业产品质量声望的转移概率矩阵.这里  $A$  的元素是按一步转移概率  $a_{sj} = p\{y_{t+1}^s = 1 \mid y_t^j = 1\}$  进行统计,有

$$A = \begin{bmatrix} 0.90 & 0.04 & 0.15 \\ 0.02 & 0.87 & 0.12 \\ 0.08 & 0.09 & 0.73 \end{bmatrix}.$$

显然,矩阵  $A$  对应的马尔科夫链是正则链<sup>[7]</sup>,存在平稳分布,  $X^* = (0.4718, 0.2912, 0.2369)^T$ .

此时,顾客选择概率函数可取  $q_t = AX_t$ , 产品市场份额的演化方程为

$$X_{t+1} = X_t + \frac{1}{t+1}(AX_t - X_t).$$

在此线性概率模型下,不论市场状态初始值  $X_0$  如何,产品市场最终都能达到均衡点  $X^*$ .

**例 3** 以  $N = 2$  为例,考虑顾客的概率选择函数为标准 Logistic 分布

$$q(X_i^s) = F(s + sX_i^s) = 1/(1 + e^{-(a_s + sX_i^s)}).$$

取  $s = -0.5, s = 1$ . 此时顾客选择规则是当  $X_i^s > 0.5$  时选择该企业的产品,否则选择另一企业的产品.此时,系统的不动点为  $(0.5, 0.5)$ , 且是稳定的.这类现象通常发生在差别化极小且价值较低的产品市场.

取  $s = -2\ln 3, s = 4\ln 3$ . 此时系统有 3 个不动点,由式 (17) 可以验证,  $(0.25, 0.75)$  和  $(0.75, 0.25)$  是稳定的不动点,分别表示 2 企业占优和 1 企业占优.  $(0.5, 0.5)$  是不稳定的不动点,代表了企业由市场劣势(优势)转变为市场优势(劣势)的相变点.

**例 4** 以  $N = 2$  为例,考虑顾客的概率选择函数是抽样方案的 OC 曲线,即式 (18),取  $n = 5$  (代表每次抽取的顾客样本数).考虑到顾客的从众心理,  $c < [n/2] + 1$ , 可分别取  $c = 0, 1, 2$ , 得到

$$q_i^s = X_i^{s^5}, \tag{19}$$

$$q_i^s = X_i^{s^5} + 5(1 - X_i^s) X_i^{s^4}, \tag{20}$$

$$q_i^s = X_i^{s^5} + 5(1 - X_i^s) X_i^{s^4} + 10(1 - X_i^s)^2 X_i^{s^3}. \tag{21}$$

类似于式 (17) 可以验证:在式 (19) 和 (20) 的情况下,系统有两个稳定不动点  $(0, 1)$  和  $(1, 0)$ ; 在式 (21) 的情况下,系统增加到 3 个不动点,多了一个  $(0.5, 0.5)$  不稳定的不动点,代表了企业由市场劣势(优势)转变为市场优势(劣势)的相变点.

### 5 结 语

BA 生长网络是复杂网络研究中一个重要类型,现实生活中许多复杂系统都可用 BA 生长网络及其扩展模型来描述和研究.本文针对  $N$  个企业、

若干顾客形成的产品市场,基于 BA 生长网络提出了产品市场选择的扩展模型,并证明了 BA 生长网络研究中常用的主方程与概率论中 Polya 过程模型的等价性;借助于离散选择模型刻画产品市场中的顾客选择行为,并对选择函数类别对产品市场的演化影响作了理论探讨;最后给出几个典型例子,验证了本文所提出理论与方法的正确性.

### 参考文献(References)

- [1] Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks [J]. Science, 1999, 286: 509-512.
- [2] Barabasi A L, Albert R, Jeong H. Mean-field theory for scale-free random networks [J]. Physica A, 1999, 272: 173-187.
- [3] Dorogovtsev S N, Mendes J F F, Samukhin A N. Structure of growing networks: Exact solution of the Barabasi-Albert model [J]. Physical Review Letter, 2000, 85: 4633-4636.
- [4] Krapivsky P L, Redner S, Leyvraz F. Connectivity of growing random networks [J]. Physical Review Letter, 2000, 85: 629-632.
- [5] 郑维敏. 正反馈 [M]. 北京:清华大学出版社,1998. (Zheng W M. Positive feedback [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998.)
- [6] 罗家德. 社会网络分析讲义 [M]. 北京:社会科学文献出版社, 2005. (Luo J D. Social network analysis course [M]. Beijing: Social Science Literature Press, 2005.)
- [7] 孙东川, 林福永. 系统工程引论 [M]. 北京:清华大学出版社, 2004. (Sun D C, Lin F Y. System process introduction [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)
- [8] 孙荣恒. 随机过程及应用 [M]. 北京:清华大学出版社, 2004. (Sun R H. Stochastic process and application [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)
- [9] Pindyck R S, Rubinfeld D L. Econometric model and economic forecast [M]. Beijing: Mechanical Industry Press, 1999.
- [10] 张公绪. 新编质量管理学 [M]. 北京:高等教育出版社, 1998. (Zhang G X. New edition of quality control [M]. Beijing: High Education Press, 1998.)