

文章编号: 1001-0920(2007)05-0589-04

线性系统频响特征指标集下的状态反馈控制

臧文利^{1,2}, 郭治¹

(1. 南京理工大学 自动化学院, 南京 210094; 2. 中国兵器装备研究院, 北京 100089)

摘要: 首先以闭环幅频特性的零频特性、固有频率、平面积和最大幅值 4 项特征作为控制系统的期望指标集, 将状态反馈转化为一组矩阵不等式的可行解问题; 然后利用迭代线性矩阵不等式 (ILMI) 技术求解状态反馈系数; 最后通过数值算例说明所给出设计方法的有效性.

关键词: 古典控制; 满意控制; 频率法

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

State feedback control of linear systems under frequency response characteristics constraints

ZANG Wen-li^{1,2}, GUO Zhi¹

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. China South Industries Research Academy, Beijing 100089, China. Correspondent: ZANG Wen-li, E-mail: zwl1024@sina.com)

Abstract: Four frequency response characteristics, zero frequency characteristic, average bandwidth, area and maximum range value, are denoted as the desired indices for the design of control system. The state feedback problem is transformed to the feasible problem of a set of matrix inequalities, which is solved by using the iterative linear matrix inequality technique. Finally, a numerical example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: Classical control; Satisfactory control; Frequency method

1 引言

频率特性的低频段表征了闭环系统的稳态性能, 中频段表征了系统的过渡性能, 高频段表征了过渡过程的初始段性能. 长期以来, 频率法成为控制工程中广泛应用的设计方法之一. 然而, 古典频率法也存在严重的缺陷: 尚无判断满足频率特性期望特征的控制策略存在性判据, 更无自动求取这种控制策略的完备的数学工具. 文献 [1] 以开环频率特性为设计工具, 利用频域不等式和时域不等式的等价关系, 将频域指标约束下的控制器参数设计转化为一组线性矩阵不等式的可行解问题, 但却忽略了跟踪确定性信号的稳态误差系数.

本文以闭环幅频特性为设计对象, 且容许出现非最小相位环节. 应用满意控制相容性的思想^[2]和迭代线性矩阵不等式技术, 自动、直接地求解满足频响特征集的控制策略, 从而将古典频率法提升为解

析频率法.

2 频响特征指标集

设系统幅相频率特性 $A(\omega)$ 如图 1 所示.

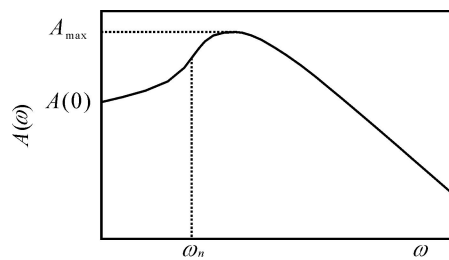


图 1 闭环幅频曲线

定义 1 如下 4 项频响特征所形成的集合称为频响特征集:

1) 固有频率

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^\infty A^2(\omega) d\omega}{\int_0^\infty A^2(\omega) d\omega} = \frac{\int_0^\infty A^2(\omega) d\omega}{\int_0^\infty A^2(\omega) d\omega}. \quad (1)$$

收稿日期: 2006-02-08; 修回日期: 2006-10-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60174028); 教育部博士点基金项目 (20040288002).

作者简介: 臧文利 (1979—), 男, 河南驻马店人, 博士生, 从事满意控制、火力控制等研究; 郭治 (1937—), 男, 辽宁义县人, 教授, 博士生导师, 从事随机系统、火控系统等研究.

需要特别说明的是, $A^2(\omega) / \int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega$ 可看作功率放大系数 $A^2(\omega) = A^2(-\omega)$ 沿 ω 的分布密度函数,故 σ_n^2 是功率放大系数 $A^2(\omega)$ 沿 ω 轴散布的均方根. 其值取决于系统的结构参数,是表征系统频带宽度的另一个指标.

2) 幅频特性的最大幅值

$$A_{\max} = \max_{\omega} \{A(\omega)\}. \quad (2)$$

3) 幅频特性的零频特征

$$d_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{d\omega^i} A(\omega) \Big|_{\omega=0}, i = 0, 1, \dots, n. \quad (3)$$

对于随动系统而言, $c_0 = 1 - d_0, c_i = d_i, i > 0$. 其中 c_i 为表征随动系统准确度的稳态误差系数.

4) 白噪声作用下的输出方差

$$\sigma_y^2 = \int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} A^2(\omega) d\omega, \quad (4)$$

其中 $\omega = 2\pi f$ 为圆频率.

3 问题描述

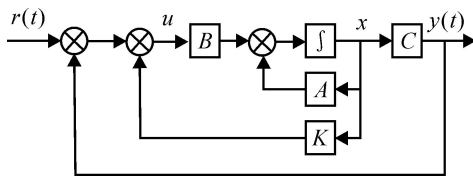


图2 闭环系统结构

设 $G(s)$ 具有图2所示的规范结构,其控制对象的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (5)$$

相应的可控标准型实现为

$$\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx. \quad (6)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix},$$

$$B^T = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1],$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{n-1}].$$

定义2 由式(7)~(10)组成的不等式集合定义为频响特征的目标函数集.

$$\sigma_y^2 \leq \sigma_g^2, \quad (7)$$

$$n > g, \quad (8)$$

$$|d_0| \leq d_{0g}, |d_1| \leq d_{1g}, |d_2| \leq d_{2g}, \quad (9)$$

$$A_{\max} \leq g. \quad (10)$$

其中 $[]_g$ 表示 $[]$ 为允许值.

本文的目的是设计反馈系数 K ,使整个系统在状态反馈 $(K - C)x$ 作用下,即

$$u = Kx - Cx + r(t), \quad (11)$$

闭环幅频特性满足由式(7)~(10)描述的频响特征集. 此时闭环系统状态方程为

$$\dot{x} = (A + BK - BC)x + Br, \quad (12)$$

其中 $r(t)$ 为外部输入信号.

为了下面叙述方便,记

$$A_c \triangleq A + BK - BC.$$

定义3 如果存在反馈控制参数 K ,使期望的目标函数集同时得到满足,则称此目标函数集是相容的.

4 有关引理

引理1^[2] 设外部输入信号 $r(t) = w(t)$ 为单位高斯白噪声,当且仅当存在 $P_1 > 0$ 和反馈阵 K , 满足

$$A_c P_1 + P_1 A_c^T + BB^T < 0, \quad (13)$$

$$C P_1 C^T \leq \sigma_g^2. \quad (14)$$

则闭环系统渐近稳定,且满足由式(7)描述的指标.

引理2^[3] 设外部输入信号 $r(t)$ 为平方有界输入,当且仅当存在 $P_2 > 0$ 和反馈阵 K , 满足

$$\begin{bmatrix} A_c P_2 + P_2 A_c^T + BB^T & P_2 C^T \\ C P_2 & -\sigma_g^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

则闭环系统渐近稳定,且满足由式(10)描述的指标.

引理3^[4] 对于渐近稳定的闭环系统,设外部输入信号 $r(t)$ 为多项式输入,当且仅当存在反馈阵 K , 满足

$$\begin{cases} |e_n^T (A + BK) e_1| - m_0 < \epsilon, \\ |e_n^T (A + BK) e_2| - m_1 < \epsilon, \\ m_2 < -e_n^T (A + BK) e_3 < m_3. \end{cases} \quad (16)$$

其中: $\epsilon > 0$ 为控制计算精度的一个小正数, e_i 为第 i 个元素为 1 的行向量,其余为零,而

$$m_0 = b_0(1 - d_{0g}) / d_{0g},$$

$$m_1 = \frac{b_1 a_0 \pm d_{1g}(b_1 + m_0)^2}{b_0},$$

$$m_2 = -l - d_{2g}(b_0 + m_0)^3,$$

$$m_3 = -l + d_{2g}(b_0 + m_0)^3,$$

$$l = -b_0 m_1^2 - b_0 m_1 b_1 - b_0 m_0 b_2 +$$

$$b_1 m_1 a_0 + b_1^2 m_0 - b_2 m_0^2.$$

则闭环系统满足由式(9)描述的指标.

引理4 对于渐近稳定的闭环系统,设输出信号是平稳、零均值、均方可导的正态过程,当且仅当

$$-CA_c X A_c^T C^T + C B B^T C^T + \sigma_n^2 C X C^T = 0, \quad (17)$$

其中 X 为单位白噪声输入下闭环系统(12)的稳态状态协方差. 则系统满足由式(8)描述的指标.

5 主要结果

定理 1(充要性) 当且仅当存在 $P_1 > 0, P_2 > 0$ 和反馈阵 K , 满足式 (13) ~ (16) 和 (19), 其中 X 为白噪声输入下闭环系统 (12) 的稳态状态协方差. 则闭环系统满足由式 (7) ~ (10) 描述的期望频响特征集.

为了应用 MATLAB 软件中 LMI 工具箱, 须将上述定理中的双线性项作充分性替换.

定理 2⁽⁵⁾(充分性) 若存在 $P_1 > 0, P_2 > 0$ 和反馈阵 K , 满足式 (14) 和 (16), 且

$$\begin{bmatrix} 1 & BK + P_1 \\ (BK + P_1)^T & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & BK + P_2 & P_2 C^T \\ (BK + P_2)^T & -I & 0 \\ CP_2 & 0 & -\frac{2}{g}I \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} 1 = & (A - BC)P_1 + P_1(A - BC)^T + BWB^T - \\ & BKM_1 - M_1^T K^T B^T + M_1^T M_1 - P_1 M_2 - \\ & M_2^T P_1 + M_2^T M_2, \\ 2 = & (A - BC)P_2 + P_2(A - BC)^T + BB^T - \\ & BKM_1 - M_1^T K^T B^T + M_1^T M_1 - P_2 M_3 - \\ & M_3^T P_2 + M_3^T M_3. \end{aligned}$$

M_1, M_2 和 M_3 为任意矩阵. 则闭环系统满足由式 (7), (9) 和 (10) 描述的期望频响特征集.

定理 3(充分性) 当存在 $P_1 > 0, P_3 > 0$ 和反馈阵 K , 满足

$$\begin{cases} A_c P_1 + P_1 A_c^T + BB^T < 0, \\ A_c P_3 + P_3 A_c^T + BB^T > 0; \end{cases} \quad (20)$$

$$-CA_c P_3 A_c^T C^T + CB B^T C^T + \frac{2}{g} C P_1 C^T = h < 0. \quad (21)$$

则式 (8) 得到满足.

证明 式 (13) 有解 $P_1 > 0$, 保证了系统的稳定性; 式 (20) 有解 $P_3 > 0$, 保证了 $P_1 > X > P_3$. 其中 X 为白噪声输入下闭环系统 (12) 的稳态状态协方差. 如果 P_1 和 P_3 还使式 (21) 成立, 则必有 $n > g$.

应用 MATLAB 软件仅能得到一组解. 应用定理 2 求解的 P_1, P_2 和 K , 如果还满足定理 3 的条件, 则问题便得到解决. 若不满足定理 3, 而相应的目标函数又相容, 则可能存在 $P_1 + P_1, P_2 + P_2, P_3 + P_3, K + K$, 使定理 2 和定理 3 的条件同时得到满足, 从而使问题有解.

定理 4(充分性) 若存在 $P_1 > 0, P_2 > 0$ 和 K

满足定理 2 的条件, 范数很小的 P_1, P_2, P_3 和 K 是下列方程的解:

$$\begin{cases} A_c(P_1 + P_1) + (P_1 + P_1)A_c^T + \\ B K P_1 + (B K P_1)^T + BB^T < 0, \\ A_c(P_3 + P_3) + (P_3 + P_3)A_c^T + \\ B K P_3 + (B K P_3)^T + BB^T > 0; \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} A_c(P_2 + P_2) + (P_2 + P_2)A_c^T + BB^T + (P_2 + P_2)C^T \\ B K P_2 + (B K P_2)^T \\ C(P_2 + P_2) - \frac{2}{g}I \end{bmatrix} < 0; \quad (23)$$

$$C(P_1 + P_1)C^T - \frac{2}{g}; \quad (24)$$

$$\begin{cases} |e_n^T(A + BK + B K)e_1| - m_0 < , \\ |e_n^T(A + BK + B K)e_2| - m_1 < , \\ m_2 < -e_n^T(A + BK + B K)e_3 < m_3. \end{cases} \quad (25)$$

且 $P_1 + P_1 > 0, P_2 + P_2 > 0, P_3 + P_3 > 0, K + K$ 满足定理 2 和定理 3 的条件. 则 $K + K$ 为满足全部性能指标要求的反馈系数.

利用文献 [6] 提出的 Path-following 线性化方法, 即将 P 和 K 分别置换为 $P + P$ 和 $K + K$, 并略去非线性的高阶项, 即可方便地证明本定理.

6 求解控制策略的程序

Step1: 定初值:

置 $P_1 = P_2 = P$;

$\min P: P, K, \text{ s.t. } (13) \sim (15)$.

Step2: 置控制参数:

$S = 0, j = 1, t = 0, N$ (循环次数控制), (控制计算精度的小正数);

$$P_1 = 0, P_2 = 0, P_3 = 0, K = 0.$$

Step3: 迭代求解期望控制器参数:

若 $S = 0$, 则转 Step4;

否则, 验证 $P_1 + P_1, P_2 + P_2, P_3 + P_3$ 和 $K + K$ 是否满足定理 2 和定理 3 的条件.

若满足, 则 $K + K$ 即为所求期望的反馈系数, 停止计算;

否则, 转 Step5.

Step4: 执行定理 2:

置 $M_1 = (BK)^T, M_2 = P_1, M_3 = P_2$;

$\min S: P_1, P_2, K, \text{ s.t. } (16), (18), (19), (26)$.

$$C P_1 C^T - \frac{2}{g} + S. \quad (26)$$

置 $P_3 = P_1$, 转 Step3.

Step5: 执行定理 4:

$\min\{\text{tr}(P_1 + P_1)\}: P_1, P_2, P_3, K$;

s.t. (22) ~ (25).

Step6:

$$\begin{aligned} P_1 + P_1 & P_1, P_2 + P_2 & P_2, \\ P_3 + P_3 & P_3, K + K & K, \\ & j + 1 & j. \end{aligned}$$

如果 $j < N$, 则转 Step3;

否则, 停机. 表明在 N 次迭代之后, 未能得到满足期望频响特性的反馈系数.

7 计算实例

这里以随动系统的设计为例来说明本文的设计方法. 在随动系统设计中, 通常要求 $d_0 = 1$, 即误差系数 $\omega_0 = 0$.

算例 1 考虑被控对象

$$G(s) = \frac{s+3}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}.$$

设计指标为

$$\begin{aligned} w_g &= 1.2, \quad \frac{2}{g} = 1.5, \quad g = 1.3, \\ \omega_0 &= 0, \quad / c_1 / < 0.3. \end{aligned}$$

采用本文给出的控制器设计算法, 取 $\rho = 0.01$, 可得

$$K = [0 \quad 1.064 \quad -4.6812].$$

闭环系统的极点为

$$\begin{aligned} \{ & -10.1005, \quad -0.7904 + 1.5315i, \\ & -0.7904 - 1.5315i \}, \\ \frac{2}{y} &= 1.1779, \quad n = 2.4904, \quad A_{\max} = 1.21, \\ \omega_0 &= 0, \quad c_1 = 0.293. \end{aligned}$$

算例 2 考虑非最小相位系统

$$G(s) = \frac{-s+3}{s(0.2s+1)(0.5s+1)}.$$

设计指标为

$$w_g = 1.2, \quad \frac{2}{g} = 1.5, \quad g = 1.3, \quad \omega_{0g} = 0.$$

采用本文给出的算法, 可得

$$K = [0 \quad -33.8144 \quad -12.8522].$$

闭环系统的极点为

$$\begin{aligned} \{ & -18.0731, \quad -0.8896 + 0.932i, \\ & -0.8896 - 0.932i \}, \\ \frac{2}{y} &= 0.5423, \quad n = 2.481, \\ A_{\max} &= 1.3, \quad \omega_0 = 0. \end{aligned}$$

由算例 1 和算例 2 可以看出, 本文方法对非最小相位系统同样适用.

8 结 语

本文通过把频域指标表示为 BMI 不等式的形

式, 研究了期望频响特征集下的状态反馈控制设计问题. 它使期望频响特征指标集同时得到满足, 并通过 MATLAB 的 LMI 工具箱自动求解. 矩阵不等式联立后仍为矩阵不等式, 故本方法可容纳更多的可用矩阵不等式表示的系统性能指标, 如时延、参数有界摄动、区域极点等. 从而使频率特性具有更丰富的特征, 使系统具有更好的性能.

需要指出的是, 应用本文算法, 如果有解则期望指标集肯定相容; 但文中没有证明算法的全局收敛性, 故无解并不能说明期望指标集肯定不相容. 如何进一步减小算法的保守性, 是需要进一步研究的课题.

参考文献(References)

- [1] Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(1): 41-59.
- [2] 王远钢, 郭治. 基于极点与输出方差约束相容性分析的状态反馈[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(4): 597-600. (Wang Y G, Guo Z. State feedback based on consistency analysis of pole and output-variance constraints[J]. Control Theory and Applications, 2001, 18(4): 597-600.)
- [3] Xie L M, Fu C E, De Souza. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(8): 1253-1256.
- [4] 钱龙军, 余炎, 郭治. 跟踪系统的满意控制研究[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(4): 591-594. (Qian L J, She Y, Guo Z. On satisfactory control for tracking systems[J]. Control Theory and Applications, 2002, 19(4): 591-594.)
- [5] Takashi Shimomura, Takao Fujii. Multi-objective control design via successive over-bounding of quadratic terms[C]. Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control. Sydney, 2000: 2763-2768.
- [6] Arash Hassibi, Jonathan How, Stephen Boyd. A path-following method for solving BMI problems in control [C]. Proc of the American Control Conf. San Diego, 1999: 1385-1389.