第 22 卷 第 5 期 控 制 与 决 策 2007 年 5 月
Vol. 22 No. 5 Control and Decision May 2007

文章编号: 1001-0920(2007)05-0597-04

直觉模糊神经网络的函数逼近能力

雷英杰, 路艳丽, 李兆渊
(空军工程大学 导弹学院, 陕西 三原 713800)

摘 要: 运用直觉模糊集理论,建立了自适应神经-直觉模糊推理系统(ANIFIS)的控制模型,并证明了该模型具有全局逼近性质. 首先将 Zadeh 模糊推理神经网络变为直觉模糊推理网络,建立一个多输入单输出的 T-S 型 ANIFIS 模型; 然后设计了系统变量的属性函数和推理规则,确定了各层的输入输出计算关系,以及系统输出结果的合成计算表达式;最后通过证明所建模型的输出结果计算式满足 Stone-Weirstrass 定理的 3 个假设条件,完成了该模型的全局逼近性证明.

关键词: 直觉模糊集; 直觉模糊推理; 神经网络; 函数逼近
中图分类号: TP182 **文献标识码**: A

Function approximation capabilities of intuitionistic fuzzy reasoning neural networks

LEI Ying-jie, LU Yan-li, LI Zhao-yuan
(Missile Institute, Air Force Engineering University, Sanyuan 713800, China. Correspondent: LEI Ying-jie, E-mail: lei@ieee.org)

Abstract: A controlling model of an adaptive neuro-intuitionistic fuzzy inference system (ANIFIS) is constructed by utilizing intuitionistic fuzzy sets theory with the function approximation property of the model proved. Zadeh fuzzy inference neural nets are developed into intuitionistic fuzzy inference nets, and a model of ANIFIS in Takagi-Sugeno type is established. The attribute functions and the inference rules of the system variables are devised with computational relations between the layers of input and output and a synthesized computational expression of system outputs ascertained. A successful proof of global approximation property of the model is accomplished by testifying that the computational expression of output results of the founded model satisfies the three hypothetic conditions of Stone-Weirstrass theorem.

Key words: Intuitionistic fuzzy sets; Intuitionistic fuzzy reasoning; Neural networks; Function approximation

1 引 言

直觉模糊集(IFS)[1-3]是对 Zadeh 模糊集的一种扩充和发展,已在多属性决策、医疗图像处理、模式识别、战场态势评估等领域得到成功的应用. 理论分析和实践表明,直觉模糊集理论在语义表述和推理能力等方面都优于 Zadeh 模糊集[3].

直觉模糊推理神经网络是直觉模糊推理逻辑[4,5]与人工神经网络相结合而产生的. 其基本组成单元为直觉模糊推理元,它将神经元解释为直觉模糊推理规则,是模糊推理神经网络模型的进化形式.

关于模糊推理神经网络的函数逼近能力的研究,已取得一系列成果. 文献[6]证明了高斯逻辑系统是通用逼近器. [7]证明了 Sugeno 型模糊控制器是通用逼近控制器. [8]的研究表明,简单地将非模糊神经网络使用扩张原理形成的模糊神经网络,不具有原神经网络的逼近性质,而混合模糊神经网络则可能成为通用逼近器. 这一结果说明,当一种模糊神经网络模型提出之后,不能简单地利用相应的非模糊神经网络的性质来推断该模型的能力,必须加以重新考察[9].

为此,本文建立一种 Takagi-Sugeno 型直觉模糊推理神经网络的控制计算模型,并从理论上探讨了该模型的连续函数逼近能力.

收稿日期: 2006-01-18; **修回日期**: 2006-04-25.
基金项目: 国防科技预研基金项目(51406030104DZ0120); 陕西省自然科学基金项目(2006F18).
作者简介: 雷英杰(1956—),男,陕西渭南人,教授,博士生导师,从事智能信息处理、智能决策等研究; 路艳丽(1980—),女,陕西大荔人,博士生,从事智能信息处理、信息融合的研究.

2 计算模型

将模糊推理神经网络进化为直觉模糊推理网络[10],可得到典型的 T-S 型直觉模糊神经网络. 其控制模型由 5 层组成,分别为输入变量层、输入语言层、推理规则层、输出语言层、输出变量层. 该模型可根据某种聚类方法对样本聚类,无需有关数据结构的任何先验假设,仅从已知的输入输出数据中就能自动划分输入输出空间、确定模糊规则的数目及每条规则中前提和结论部分的初始参数.

为了生成一个能描述给定输入输出数据结构的初始直觉模糊模型,在参数辨识中可构造一个 5 层直觉模糊神经网络,与直觉模糊模型的推理机制相匹配. 通过训练网络即调整该模型的参数,使其具有更高的精度[11]. 该模型如图 1 所示,是一个具有多输入单输出的 T-S 型自适应神经-直觉模糊推理系统(ANIFIS)的控制模型,具有通用逼近的特性.

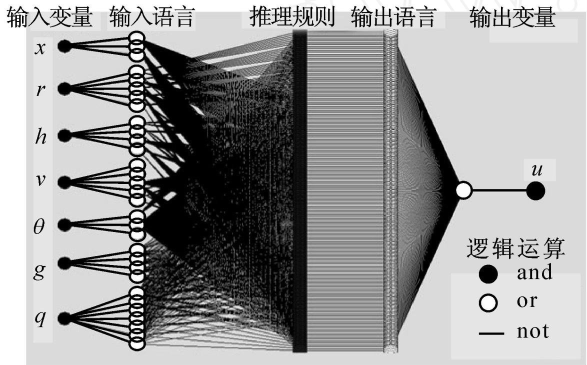

图 1 直觉模糊神经网络控制模型

在该模型中,推理规则层节点个数 m 可根据 C-means 方法对样本聚类后得到,并可依据实际情况调整参数值.

在输入语言层,隶属度函数采用

$$\mu_{ij} = \exp(-(x_i - m_{ij})^2/\sigma_{ij}^2),\quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m. \tag{1}$$

为简单起见,令直觉指数 $\pi(x) = 0$,则非隶属度函数为

$$\gamma_{ij} = 1 - \exp(-(x_i - m_{ij})^2/\sigma_{ij}^2),\quad 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m. \tag{2}$$

其中 $\mu_{ij}, \gamma_{ij}, m_{ij}, \sigma_{ij}$ 与输入语言层的各节点相对应. 该层从上到下与各节点相对应的输出 u_{ij} 的下标依次表示为: $u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1m}; u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2m}; u_{n1}, u_{n2}, \cdots, u_{nm}$. m_{ij} 和 σ_{ij} 的下标表示与 u_{ij} 相同.

在推理规则层,各节点的输出分别为该节点所有输入的代数乘积. 最终的结果输出为

$$y = w_1\pi_1 + w_2\pi_2 + \cdots + w_m\pi_m. \tag{3}$$

式中

$$\pi_i = u_{1i} \times u_{2i} \times \cdots \times u_{ni} = \prod_{j=1}^{n} u_{ji},\quad 1 \le i \le m.$$

输出语言层表示控制器的输出语言变量的语言值. 每个神经元节点表达一个隶属函数,每个输出隶属函数是一个零阶或一阶 Sugeno 线性函数. 每个神经元的输出为相应的隶属函数,输出函数 $f = f(u_i^4)$,连接权重 $w_i^4 = 1$,故输出 $a = f$. 规则形式为

$$\begin{aligned} L^l: &\text{If } x \text{ is } X_{ix} \text{ and } r \text{ is } R_{ir} \\ &\text{and } h \text{ is } H_{ih} \text{ and } v \text{ is } V_{iv} \\ &\text{and } \theta \text{ is } B_{i\theta} \text{ and } g \text{ is } G_{ig} \\ &\text{and } q \text{ is } Q_{iq}, \\ &\text{Then } z^l = c_0^l + c_1^l x + c_2^l r + \\ &\qquad c_3^l h + c_4^l v + c_5^l \theta + \\ &\qquad c_6^l g + c_7^l q; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &i_x = 1,2,\cdots,N_x,\ i_r = 1,2,\cdots,N_r, \\ &i_h = 1,2,\cdots,N_h,\ i_\theta = 1,2,\cdots,N_\theta, \\ &i_v = 1,2,\cdots,N_v, i_g = 1,2,\cdots,N_g, \\ &i_q = 1,2,\cdots,N_q. \end{aligned}$$

其中: x, r, v, θ, g, h, q 是输入语言变量; $X_{ix}, R_{ir}, H_{ih}, V_{iv}, B_{i\theta}, G_{ig}, Q_{iq}, S_{is}$ 是前提部分语言项,分别为

$$\begin{aligned} &\langle x, \mu_{X_i}, \gamma_{X_i}\rangle,\ x \in X;\ \langle r, \mu_{R_i}, \gamma_{R_i}\rangle,\ r \in R; \\ &\langle h, \mu_{H_i}, \gamma_{H_i}\rangle,\ h \in H;\ \langle v, \mu_{V_i}, \gamma_{V_i}\rangle,\ v \in V; \\ &\langle \theta, \mu_{B_i}, \gamma_{B_i}\rangle,\ \theta \in B;\ \langle g, \mu_{G_i}, \gamma_{G_i}\rangle,\ g \in G; \\ &\langle q, \mu_{Q_i}, \gamma_{Q_i}\rangle,\ q \in Q. \end{aligned}$$

c_k^l 为真值参数, z^l 为系统根据规则 L^l 得到的输出, $l = 1,2,\cdots,M$. 即在 T-S 规则中,其前件部分是模糊的,而后件部分是确定的,即输出为各输入变量的线性组合.

3 模型的函数逼近性

定理 1 (Stone-Weirstrass 定理[6]) 设 Z 为一组定义在致密集 U 上的连续实函数的集合,如果:

1) Z 为一个代数,即集合 Z 对于加法、乘法和数乘运算是封闭的;

2) Z 能离析 U 上的各点,即对于每个 $x, y \in U \subset R^n$,若 $x \ne y$,则必然存在 $f \in Z$,使得 $f(x) \ne f(y)$;

3) Z 在 U 上任意一点不为 0,即对于每个 $x \in U$,均存在 $f \in Z$,使得 $f(x) \ne 0$.

则 Z 的一致封闭包包含了 U 上的所有连续实函数,即 (Z, d_∞) 在 $(C[U], d_\infty)$ 上是致密的. 这里, $d_\infty(f_1, f_2) = \sup_{x\in U}(|f_1(x) - f_2(x)|)$ 是无穷大范数, (Z, d_∞) 是一个范畴空间, $C[U]$ 是 U 上所有连续函数的集合.

定理 1 的证明过程参见文献[6].

设 Y 是由所有如式(3) 所示的直觉模糊系统组

成的集合,从而可用 Stone - Weirstrass 定理证明该模型具有全局逼近性质.

首先证明 Y 符合 Stone - Weirstrass 定理中给出的 3 个假设.

引理 1　(Y, d_∞) 是一个代数.

证明　设 $f_1, f_2 \in Y$,其表达式分别为

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^{m_1} w_i^1 \prod_{j=1}^{n} u_{ji}^1(x_j), \tag{4}$$

$$f_2(x) = \sum_{i=1}^{m_2} w_i^2 \prod_{j=1}^{n} u_{ji}^2(x_j). \tag{5}$$

于是有

$$f_1(x) f_2(x) = \sum_{i=1}^{m_1} w_i^1 \prod_{j=1}^{n} u_{ji}^1(x_j) \sum_{i=1}^{m_2} w_i^2 \prod_{j=1}^{n} u_{ji}^2(x_j) = \sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} (w_{i_1}^1 w_{i_2}^2) \Big(\prod_{j=1}^{n} u_{ji_1}^1(x_j) u_{ji_2}^2(x_j) \Big). \tag{6}$$

由于 $u_{ji_1}^1(x_j)$ 和 $u_{ji_2}^2(x_j)$ 均为高斯型,其乘积仍为高斯型. 所以式(6) 的形式完全等同于式(3),由此可知 $f_1(x) f_2(x) \in Y$.

对于任意的 $c \in R$,有

$$cf_1(x) = \sum_{i=1}^{m_1} cw_i^1 \prod_{j=1}^{n} u_{ji}^1(x_j). \tag{7}$$

显然,式(7) 的形式完全等同于式(3),因此 $cf_1(x) \in Y$.

同理

$$f_1(x) + f_2(x) = \sum_{i=1}^{m_1} w_i^1 \prod_{j=1}^{n} u_{ji}^1(x_j) + \sum_{i=1}^{m_2} w_i^2 \prod_{j=1}^{n} u_{ji}^2(x_j). \tag{8}$$

易知,式(8) 的形式完全等同于式(3),即 $f_1(x) + f_2(x) \in Y$. □

引理 2　(Y, d_∞) 能离析 U 上的点.

证明　构造一个 f,使 f 在给定条件下具有如下性质:对于任意给定的 $\mathrm{x}^0, \mathrm{y}^0 \in U$,当 $\mathrm{x}^0 \neq \mathrm{y}^0$ 时,有 $f(\mathrm{x}^0) \neq f(\mathrm{y}^0)$. 给定条件为:已知定义在 U 和 R 上的 IFS 的数目、高斯隶属度函数的参数、推理规则的数目及规则表达式.

设 $\mathrm{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$, $\mathrm{y}^0 = (y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$. 当 $x_i^0 \neq y_i^0$ 时,在 U 上的第 i 个子空间定义两个 IFS 子集 $(A_i^1, u_{A_i}^1)$ 和 $(A_i^2, u_{A_i}^2)$. 其中 $u_{A_i}^p (p = 1, 2)$ 为其隶属度函数和非隶属度函数的合成真值函数,设其形式为

$$\begin{cases} u_{A_i}^1(x_i) = \exp(-(x_i - x_i^0)^2/2), \\ u_{A_i}^2(x_i) = \exp(-(x_i - y_i^0)^2/2). \end{cases} \tag{9}$$

如果 $x_i^0 = y_i^0$,则有 $A_i^1 = A_i^2$,且 $u_{A_i}^1 = u_{A_i}^2$. 即此时在第 i 个子空间上只定义了一个 IFS. 在输出论域 R 上定义两个 IFS 子集 (B^1, u_B^1) 和 (B^2, u_B^2),其中 $u_B^p (p = 1,2)$ 为其隶属度函数和非隶属度函数的合成真值函数,设其形式为

$$u_B^p(w) = \exp(-(w - w_j)^2/2),\quad p = 1,2,\ j = 1,2. \tag{10}$$

式中 w_j 待定. 为简单起见,设规则库中的规则数目 $m = 2$. 至此,除 $w_j (j = 1,2)$ 以外,其余的设计参数均已确定. 即得到了形如式(3) 所示的函数 f,其中 $m = 2$. 其表达式为

$$\begin{aligned} f(\mathrm{x}^0) &= w_1 + w_2 \prod_{i=1}^{n} \exp\Big(-\frac{(x_i^0 - y_i^0)^2}{2}\Big), \\ f(\mathrm{y}^0) &= w_1 \prod_{i=1}^{n} \exp\Big(-\frac{(x_i^0 - y_i^0)^2}{2}\Big) + w_2. \end{aligned} \tag{11}$$

前面已设 $\mathrm{x}^0 \neq \mathrm{y}^0$,所以必然存在某些 i,使得 $x_i^0 \neq y_i^0$. 从而有

$$\prod_{i=1}^{n} \exp\Big(-\frac{(x_i^0 - y_i^0)^2}{2}\Big) \neq 1. \tag{12}$$

当取 $w_1 = 0$ 和 $w_2 = 3$ 时,必然有 $f(\mathrm{x}^0) \neq f(\mathrm{y}^0)$. □

引理 3　(Y, d_∞) 上所有点均不为 0.

证明　观察式(3),只要简单地选取 $w_i > 0 (i = 1,2, \cdots, m)$ 便可. 即 $w_i > 0$ 所对应的任何 f 均可作为所需的 f. □

定理 2　图 1 所示的自适应神经 - 直觉模糊推理系统(ANIFIS) 模型是一个全局逼近器.

证明　由式(3) 可知,Y 是定义在致密集 U 上的连续实函数. 根据引理 1,(Y, d_∞) 是一个代数;根据引理 2,(Y, d_∞) 能离析 U 上的点;根据引理 3,(Y, d_∞) 上所有点均不为 0. 最后根据定理 1 (Stone-Weirstrass 定理),可以直接推出结论:该模型具有全局逼近性质. □

至此,已经证明了所建模型具有全局逼近性质.

应当指出,如果模型中的隶属度函数和非隶属度函数不是高斯型的,则此结论仍然成立,其证明过程类似. 所以该模型具有广义全局逼近性质.

4　结　　语

本文证明了直觉模糊神经网络模型具有全局逼近性质. 首先将模糊推理神经网络进化为直觉模糊推理网络,建立了一个多输入单输出的 T-S 型 ANIFIS 的控制模型;然后设计了系统变量的属性函数和推理规则,确定了各层的输入输出计算关系,以及系统输出结果的合成计算表达式;最后通过证明所建模型的输出结果计算式满足 Stone-Weirstrass 定理的 3 个假设条件,完成了该模型的全局逼近性证明.

直觉模糊神经网络的最大特点是将直觉模糊集

与神经网络相结合. 直觉模糊集具有隶属度、非隶属度及导出的直觉指数这 3 个属性函数,呈现出天然的负反馈性,因而其推理计算的精确度和稳定性显著提高. 直觉模糊神经网络不但具有全局一致逼近性,而且规则符合度极高,推理精度几乎接近于理想值,因而具有良好的应用前景.

参考文献(References)

[1] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20 (1): 87-96.

[2] Abbas S E. On intuitionistic fuzzy compactness[J]. Information Sciences, 2005, 173(1-3): 75-91.

[3] 雷英杰,王宝树. 直觉模糊逻辑的语义算子研究[J]. 计算机科学, 2004, 31 (11): 4-6.
(Lei Y J, Wang B S. On the semantic operators for intuitionistic fuzzy logic[J]. Computer Science, 2004, 31 (11): 4-6.)

[4] 李晓萍,王贵君. 直觉模糊集的扩张运算[J]. 模糊系统与数学, 2002, 16 (1): 40-46.
(Li X P, Wang G J. The extension operations of the intuitionistic fuzzy sets [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2002, 16 (1): 40-46.)

[5] 雷英杰,王宝树,苗启广. 直觉模糊关系及其合成运算[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(2): 113-118.
(Lei Y J, Wang B S, Miao Q G. On the intuitionistic fuzzy relations with compositional operations [J]. Systems Engineering Theory and Practice, 2005, 25 (2): 113-118.)

[6] Wang L X, Mendel J M. Fuzzy basis functions, universal approximation and orthogonal least-squares learning [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1992, 3 (5): 807-814.

[7] Buckley J J. Sugeno type controllers are universal controllers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1993, 53(3): 299-303.

[8] Buckley J J. Can fuzzy neural nets approximate continuous fuzzy functions[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 61(1): 43-51.

[9] 梁久祯,何新贵. 单体模糊神经网络的函数逼近能力[J]. 计算机研究与发展,2000,37(9): 1045-1049.
(Liang J Z, He X G. Function approximation capabilities of monolithic neural networks [J]. J of Computer Research and development, 2000, 37 (9): 1045-1049.)

[10] 雷英杰,王宝树,路艳丽. 基于直觉模糊逻辑的近似推理方法[J]. 控制与决策, 2006, 21(3): 305-310.
(Lei Y J, Wang B S, Lu Y L. Techniques for approximate reasoning based on intuitionistic fuzzy logic [J]. Control and Decision, 2006, 21 (3): 305-310.)

[11] 邓建军,徐立鸿,吴启迪. 一种模糊逻辑系统的快速学习算法 [J]. 信息与控制, 2001, 30(6): 555-557.
(Deng J J, Xu L H, Wu Q D. Fast learning algorithm for fuzzy logic system [J]. Information and Control, 2001, 30(6): 555-557.)

(上接第 596 页)

[2] Xu X Y, Mao Z Y. The neural network predictive control of time-delay systems[J]. Control Theory and Applications, 2001, 18(6): 932-934.

[3] Zhang Q H. Using wavelet network in nonparametric estimation[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1997, 8(2): 227-236.

[4] Huang D X, Wang J C, Jin Y H. Application research of wavelet neural networks in process control[J]. J of Tsinghua University, 1999, 39(1): 91-94.

[5] 连家创. 板形控制的理论基础[J]. 东北重型机械学院学报, 1978, (1): 1-20.
(Lian J C. Theoretic basis of flatness control[J]. J of Northeast Heavy Machinery Institute, 1978, (1): 1-20.)

[6] Kambhampati C, Mason J D. A stable-step-ahead predictive control of non-linear systems [J]. Automatica, 2000, 36(4): 185-195.

[7] Tharmarajah K, Zhang Q H. Multidimensional wavelet frames[J]. IEEE Trans on Neural Networks, 1995, 6 (6): 1552-1556.

[8] 黄敏. 小波神经网络及其在板形板厚控制系统中的应用研究[D]. 沈阳:东北大学,2004.
(Huang M. Theory of wavelet neural network and its application in control system of flatness and gauge[D]. Shenyang: Northeastern University, 2004.)

[9] 靳其兵,王建辉,顾树生. 多步预测性能指标函数下的神经网络逆动态控制方法[J]. 控制与决策,1999,14 (4): 308-313.
(Jin Q B, Wang J H, Gu S S. A method of neural network inverse control under the multi-step predictive index function[J]. Control and Decision, 1999, 14(4): 308-313.)