

文章编号: 1001-0920(2007)06-0663-04

一种确定 PID 参数稳定域的图解法

王德进

(天津科技大学 电子信息与自动化学院, 天津 300222)

摘要: 针对带滞后因子的一阶惯性环节的 PID 控制器, 给出确定其参数稳定域的一种图解方法. 基于参数空间的图解稳定性准则, 在已知比例增益范围的前提下, 针对稳定和不稳定开环对象, 直接在积分-微分参数空间绘制和确定稳定区域, 避免了复杂的数学计算. 该图解稳定性准则给出闭环稳定的一个充分必要条件, 所得结果没有任何保守性. 此方法也可用来求解系统的相对稳定度问题和应用于其他任意给定被控对象.

关键词: PID 控制器; 图解稳定性准则; 参数空间方法; 一阶滞后系统; 稳定域; 相对稳定度

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Graphical approach to determine stabilizing regions of PID parameters

WANG De-jin

(School of Electronic Information and Automation, Tianjin University of Science and Technology, Tianjin 300222, China. E-mail: wdejin56@yahoo.com)

Abstract: A graphical approach to determine the stabilizing region of PID parameters is provided for first-order plant with dead-time. Based on a graphical stability criterion in parameter space, the range of proportional-gain is given. For both stable and unstable open-loop plants, the stabilizing region in integral derivative space is plotted and determined directly, not to be calculated mathematically. By using this graphical stability criterion, a necessary and sufficient condition for the closed-loop stability is given. The results have no any conservatism. The proposed method can be used to solve the problem of stability degree and applied to other arbitrary plants with dead-time.

Key words: PID controller; Graphical stability criterion; Parameter space approach; First-order plant with dead-time; Stabilizing region; Stability degree

1 引言

PID 控制器结构简单、控制能力强, 广泛应用于各种工业控制领域. 文献[1]回顾和总结了关于 PID 控制器的理论、设计和调节问题. 在实际应用中, PID 控制器的参数整定往往基于经验法, 如对带滞后的一阶惯性环节的 Ziegler-Nichols 方法^[2]等. 但基于经验的整定方法无法给出完整的稳定域, 且有些系统(如不稳定对象)不允许进行实验. 另一方面, 已知完整的稳定域对系统性能设计也是必需的^[3].

近年来, 关于 PID 参数稳定域的研究引起了人们的关注^[4-7]. 文献[6, 7]对具有有理传递函数的系统, 基于推广的 Hermite-Biehler 定理, 给出了完整的 PID 参数稳定域, 进而实现了 H 性能设计^[3], 但该方法不能处理带滞后的被控对象. 文献[4]对一阶

滞后惯性环节应用由 Pontryagin 给出的一种类型的 Hermite-Biehler^[8, 9] 定理, 解决了 PID 参数稳定域的计算. 文献[5]基于 Nyquist 稳定性判据从另一个角度证明了上述结果.

本文进一步研究一阶滞后惯性环节的 PID 参数稳定域的确定问题. 在参数空间中, 利用拟多项式 (Quasi-Polynomial) 稳定的一个图解准则, 不需繁杂的数学计算, 直接绘制 PID 参数的稳定域. 方法直观、简单, 所得结果与文献[4]完全相同, 并可确定相对稳定度问题的稳定域. 本文的方法亦可应用于其他任意给定被控对象, 具有一定的广泛性.

2 图解稳定准则

考虑图 1 所示 SISO 单位反馈控制系统. 其中: $r(t)$ 为参考输入信号, $y(t)$ 为输出信号, $G(s)$ 代表

收稿日期: 2006-03-14; 修回日期: 2006-04-25.

作者简介: 王德进 (1956—), 男, 黑龙江牡丹江人, 教授, 从事 H 控制、时滞系统和网络拥塞控制等研究.

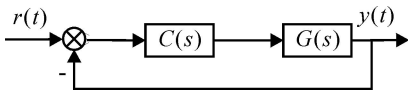


图 1 单位反馈系统

被控对象传递函数, $C(s)$ 代表控制器传递函数.

本文假设 $G(s)$ 为带滞后环节的一阶惯性被控对象, 有

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts} e^{-Ls}. \quad (1)$$

其中: $k > 0$ 为稳态增益, $L > 0$ 为滞后时间, T 为惯性环节时间常数. $C(s)$ 为 PID 类型控制器, 有

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s. \quad (2)$$

设计的目标是确定 PID 控制器参数集合 (k_p, k_i, k_d) , 使得图 1 所示闭环系统稳定.

系统的闭环特征多项式为

$$\Delta(s) = (1 + Ts)s + k(k_i + k_p s + k_d s^2) e^{-Ls},$$

两端同时乘以 e^{Ls} , 得

$$\Delta(s) = (1 + Ts) s e^{Ls} + k(k_i + k_p s + k_d s^2). \quad (3)$$

对式(3)做变量变换得

$$\begin{aligned} s &= z - \frac{L}{T}, \\ z &= x + jy, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (4)$$

即 s 平面的竖直线 $s = -\frac{L}{T}$ 被变换为 z 平面的虚轴. 换句话说, 本文考虑的是 s 平面的相对稳定度 $\sigma > 0$ 的问题. 将式(4)带入(3), 得到关于变量 z 的闭环特征多项式为

$$\begin{aligned} \Delta(z) &= [1 + T(z - \frac{L}{T})] (z - \frac{L}{T}) e^{L(z - \frac{L}{T})} + \\ & k [k_i + k_p (z - \frac{L}{T}) + k_d (z - \frac{L}{T})^2]. \end{aligned} \quad (5)$$

注意到 $\Delta(z)$ 关于变量 z 是解析的.

令 $z = jy$, 并将相应的 $\Delta(jy)$ 分解为实部和虚部, 则式(5)成为

$$\Delta(jy) = r(y) + j i(y).$$

其中

$$\begin{aligned} r(y) &= [(1 - T) + Ty^2] e^{-Ly} \cos(Ly) - \\ & (1 - 2T) ye^{-L} \sin(Ly) + \\ & k k_i - k k_p - k k_d (y^2 - \frac{L^2}{T^2}), \\ i(y) &= (1 - 2T) ye^{-L} \cos(Ly) - \\ & [(1 - T) + Ty^2] e^{-L} \sin(Ly) + \\ & k k_p y - 2 k k_d y. \end{aligned} \quad (6)$$

由式(6)可以看到, r 与 i 依赖于参数 k_p, k_i, k_d , 和 y , 记为

$$r = r(k_i, k_d, k_p, y),$$

$$i = i(k_i, k_d, k_p, y).$$

基于以上表达式, 给定参数 k_p 和 y , 便可在参数空间 (k_i, k_d) 研究闭环特征多项式(5)的稳定性. 具体方法如下: 假设 (k_i^0, k_d^0, k_p, y) 为虚轴上的一点, 使得

$$\begin{aligned} r &= r(k_i^0, k_d^0, k_p, y) = 0, \\ i &= i(k_i^0, k_d^0, k_p, y) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

即虚轴上存在一个根. 由隐函数存在定理可知, 如果雅可比矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial k_i} & \frac{\partial r}{\partial k_d} \\ \frac{\partial i}{\partial k_i} & \frac{\partial i}{\partial k_d} \end{bmatrix}_{(k_i^0, k_d^0, k_p, y)} \quad (8)$$

非奇异, 则由方程组(7)可解得局部唯一连续解曲线 $(k_i(y), k_d(y))$. 进一步, 有如下命题:

命题 1^[10] 沿 y 增加的方向, 当 $\det J < 0$ 时, 参数曲线 $(k_i(y), k_d(y))$ 右侧的参数空间为稳定的参数区域; 而当 $\det J > 0$ 时, 左侧为稳定的参数区域. 其中 J 为由式(8)定义的雅可比矩阵.

该命题给出了在参数空间研究系统稳定性的一个充分必要条件. 由式(6)和(8), 得

$$\begin{aligned} \det J &= -2k^2 y < 0, \\ \forall y &> 0, y > 0. \end{aligned} \quad (9)$$

由式(6), 以 k_p, y 为参变量, 解得

$$\begin{aligned} k_d &= \frac{A(\cdot, y) \cos(Ly) - B(\cdot, y) \sin(Ly)}{2k y} + \frac{k_p}{2}, \\ k_i &= \frac{A(\cdot, y) \sin(Ly) + B(\cdot, y) \cos(Ly)}{k} + \\ & k_p - k_d (y^2 - \frac{L^2}{T^2}). \end{aligned} \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} A(\cdot, y) &= (1 - 2T) ye^{-L}, \\ B(\cdot, y) &= [(1 - T) + Ty^2] e^{-L}. \end{aligned}$$

由于特征方程(5)的系数和 L 均为实数, 如果 z 是式(5)的根, 则其复共轭亦为根, 所以只需考虑 $y \in [0, \infty)$.

接下来, 按 $y = 0$ 和 $y \in (0, \infty)$ 两种情况讨论参数空间 (k_i, k_d) 的稳定域.

1) 根据式(5), 观察到当复变量 z 为正实数, 即 $x > 0, y = 0$ 时, 式(5)确定了 k_i 与 k_d 之间的一个线性关系

$$k_d = a k_i + b. \quad (11)$$

其中

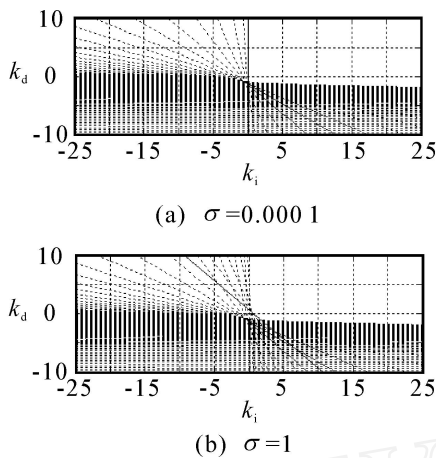


图 2 由直线族(11)扫出的不稳定区域

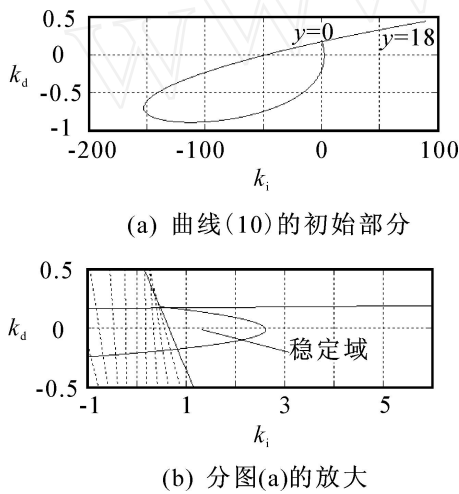


图 3 稳定区域($\zeta = 1$)

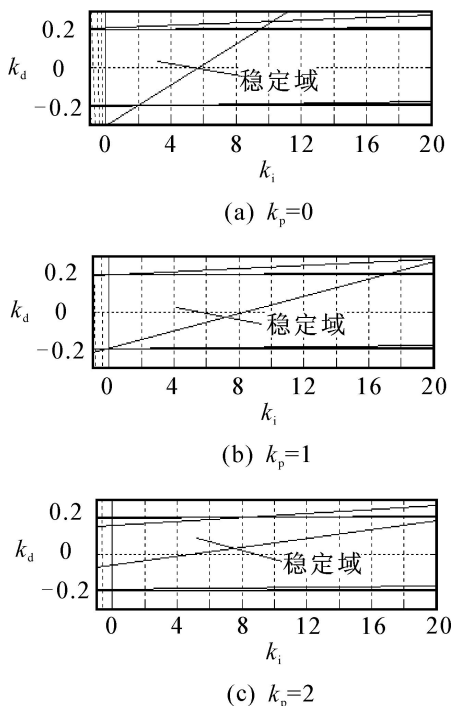


图 4 稳定开环对象的稳定区域

$$a = -\frac{1}{(x - \dots)^2},$$

$$b = -\frac{k_p}{x - \dots} - \frac{1 + T(x - \dots)}{k(x - \dots)} e^{L(x - \dots)}.$$

固定 k_p 和 ζ 值,直线族(11)在 (k_i, k_d) - 平面扫出不稳定区域,如图 2 所示.其中实线代表 $x = 0$ 时的直线,称为主直线.

2) 利用式(10)绘制 $y > 0$ 时的参数曲线 $(k_i(y), k_d(y))$,如图 3(a)所示.图 3(b)为图 3(a)在原点附近的放大并与图 2(b)相结合.由式(9)和命题 1 可判断稳定参数区域如图 2(b)所示,此稳定区域为系统具有一定相对稳定度时的稳定区域.当 $\zeta = 0$ 时,该稳定区即恢复为完整的稳定区域,如图 4(a)所示.

以下按开环稳定对象和开环不稳定对象给出具体确定 PID 参数稳定域的方法.

3 开环稳定对象

此时有 $T > 0$.

命题 2^[4] 对给定的开环稳定对象(1),使得镇定 PID 控制器存在的比例增益 k_p 的范围由下式确定:

$$-\frac{1}{k} < k_p < \frac{1}{k} \left(\frac{T}{L} \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \right), \quad (12)$$

其中 φ_1 为方程

$$\tan \varphi_1 = -\frac{T}{T + L} \quad (13)$$

在区间 $(0, \pi)$ 内的解.当比例增益 k_p 超出上述范围时,镇定 PID 控制器不存在.

给定 $T = 0.2, L = 0.2, k = 1, \zeta = 0.0001$.由式(12)得到 k_p 的范围为 $-1 < k_p < 2.38$.分别取 $k_p = 0 (-1/k < k_p < 1/k)$, $k_p = 1.0 (k_p = 1/k)$ 和 $k_p = 2.0 (1/k < k_p)$,相应的稳定区域分别为图 4(a)的梯形、图 4(b)的三角形和图 4(c)的四边形,其形状与文献[4]完全相同.

4 开环不稳定对象

此时, $T < 0$.

命题 3^[4] 对给定的开环不稳定对象(1),镇定 PID 控制器存在的充分必要条件是 $|T/L| > 0.5$.如果该条件成立,则使得镇定 PID 控制器存在的比例增益 k_p 的范围由下式确定:

$$\frac{1}{k} \left(\frac{T}{L} \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \right) < k_p < -\frac{1}{k}, \quad (14)$$

其中 φ_2 为方程

$$\tan \varphi_2 = -\frac{T}{T + L} \quad (15)$$

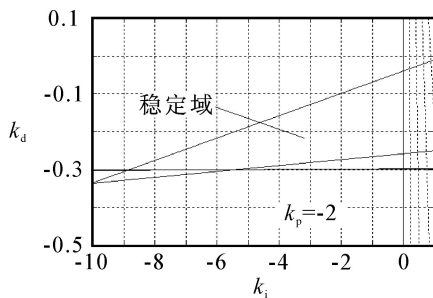


图5 不稳定开环对象的稳定区域

在区间 $(0, \infty)$ 内的解.当比例增益 k_p 超出上述范围,镇定PID控制器不存在.

给定 $T = -0.3, L = 0.2, k = 1, \tau = 0.0001$.此时,对象(1)不稳定.由式(14)得到 k_p 的范围是 $-2.40 < k_p < -1$.取 $k_p = -2.0$,相应的稳定区域为如图5所示的四边形,其形状也与文献[4]完全相同.

根据以上讨论,给出绘制PID参数稳定域的算法如下:

算法1 确定PID参数稳定域.

Step1: 对给定的对象(1),按式(12)或(14)计算 k_p 值的范围;

Step2: 在式(12)或(14)的范围内选取 k_p 值,然后,按(11)在 (k_i, k_d) -平面对充分小的 $\epsilon > 0$ 绘制 $y = 0$ 时对应的不稳定区域;

Step3: 取与Step2相同的 k_p 和 ϵ 值,按式(10)绘制 $y = 0$ 时对应的临界稳定线;

Step4: 根据命题1和雅可比矩阵的行列式(9)的符号判断稳定区域.

为了在 (k_i, k_d) -平面正确地判断出稳定区域,开始时可选择适当大的 ϵ 值,使得式(10)给出的曲线的起点出现在视图中,如图3(b)所示,判断出稳定区之后,再减小 ϵ 值,以恢复完整的稳定区域,如图4(a)所示.频率 y 的取值范围开始时也是取得小些,如图3(a)所示.待辨识出稳定区域后,再增大 y 的取值范围直到足够大,此时,最内部的区域即为稳定区域.

如果要得到具有指定稳定度的稳定区域,可直接按给定的稳定度 $\epsilon > 0$ 按上述步骤绘制稳定区域,如图3(b)所示.

另外,从以上分析和设计过程可以看出,对任意给定的被控对象,只要大致知道比例增益 k_p 的取值范围(可由无滞后情形下特征多项式稳定的必要

条件和劳斯判据得到),就可按算法1在 (k_i, k_d) -平面绘制和确定稳定参数区域.

5 结 语

本文研究了一种绘制和确定一阶滞后惯性环节PID参数稳定区域的方法.该方法的特点在于无需复杂的数学计算,在已知比例增益取值范围的前提下,直接在参数空间绘制并确定稳定区域.所依据的稳定性准则给出的是闭环系统稳定的充分必要条件,所得结果没有任何保守性,原则上只要已知比例增益的取值范围,该方法可应用于任意有滞后或无滞后的被控对象,具有一定的普遍性和工程意义.

参考文献(References)

- [1] Astrom K, Hagglund T. PID controllers: Theory, design, and tuning [M]. Research Triangle Park: Instrument Society of American, 1995.
- [2] Ziegler J G, Nichols N B. Optimum setting for automatic controller [J]. Trans on ASME, 1942, 64 (11): 759-768.
- [3] Ho M T. Synthesis of H_∞ PID controllers: A parametric approach [J]. Automatica, 2003, 39 (6): 1069-1075.
- [4] Silva G J, Datta A, Bhattacharyya S P. New results on the synthesis of PID controllers [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(2): 241-252.
- [5] Martelli G. Comments on "new results on the synthesis of PID controller" [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(9): 1468-1469.
- [6] Ho M T, Datta A, Bhattacharyya S P. A linear programming characterization of all stabilizing PID controllers [C]. Proc American Control Conf. Albuquerque: New Mexico, 1997: 3922-3928.
- [7] Datta A, Ho M T, Bhattacharyya S P. Structure and synthesis of PID controllers [M]. London: Springer, 2000.
- [8] Pontryagin L S. On the zeros of some elementary transcendental function [J]. American Mathematical Society Translation, 1955, 2(1): 95-110.
- [9] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction to functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [10] Diekmann O, Van Gils S A, Verduyn Lunel S M, et al. Delay equations: Functional-, complex- and nonlinear analysis [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.