第 22 卷 第 6 期　　控 制 与 决 策　　2007 年 6 月
Vol. 22 No. 6　　Control and Decision　　Jun. 2007

文章编号: 1001-0920(2007)06-0622-04

T-S 模糊系统的局部稳定

周林娜, 张庆灵, 杨春雨
(东北大学 系统科学研究所, 沈阳 110004)

摘　要: 讨论了 T-S 模糊系统的局部稳定性及控制器设计问题. 给出连续 T-S 模糊系统局部稳定的定义,利用非二次 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式(LMI)方法得到连续 T-S 模糊系统局部稳定的充分条件,并给出了基于 LMI 的局部镇定控制器设计方法. 该方法不同于已有的全局稳定控制器设计方法, 为判别模糊系统的稳定提供了新的选择. 最后通过数值算例演示了控制器的设计方法,并证明了该方法的可行性.

关键词: T-S 模糊系统; 局部稳定; 线性矩阵不等式; 非二次 Lyapunov 函数
中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Local stability of T-S fuzzy systems

ZHOU Lin-na, ZHANG Qing-ling, YANG Chun-yu
(Institute of Systems Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: YANG Chun-yu, E-mail: ycyyyang@sina.com)

Abstract: The local stability of T-S fuzzy systems is discussed. The concept of local stability for continues T-S fuzzy systems is given. By using non-quadratic Lyapunov function and linear matrix inequality approach, a sufficient condition for the local stability of T-S fuzzy systems is derived and a LMI based on fuzzy controller design method is given. The proposed method is different from the global stability controller design method, which provides a new choice for the stability of continues T-S fuzzy systems. Finally, a numerical example illustrates the design method and shows the feasibility of the method.

Key words: T-S fuzzy system; Local stability; LMI; Non-quadratic Lyapunov function

1 引　　言

T-S 模糊系统自提出以来就引起了国内外控制领域的普遍重视,许多学者对 T-S 模糊系统的稳定性进行了研究,并得到了很多关于系统稳定性的优秀结果[1-8]. 然而,这些结果大部分都是 T-S 模糊系统全局稳定的充分性条件,目前关于 T-S 模糊系统局部稳定的结果还不多见[3]. 事实上,局部稳定性是非线性系统的重要性质,并且同全局稳定性一样都是不可替代的. 由于模糊系统本质上是非线性系统, 局部稳定性对模糊系统同样有重要意义. 需要指出的是,局部稳定不是指系统只在平衡点稳定,而是指系统在平衡点附近的一个区域内稳定,对于一些系统,该区域可能已经涵盖了系统变量实际的变化范围[9]. 因此,对于 T-S 模糊系统的局部稳定性研究是有实际价值的.

综上所述, 本文将讨论连续 T-S 模糊系统的局部稳定性及控制器设计问题. 首先,给出连续 T-S 模糊系统的局部稳定概念;然后,将文献[10]在离散型模糊系统中提出的一种非二次 Lyapunov 函数推广到连续型模糊系统中,对隶属函数的结构进行分析,得到基于 LMI 的局部稳定判别条件和控制器设计方法;最后,通过数值算例验证方法的有效性. 不失一般性, 文中假设 $x = 0$ 是系统的平衡点[3],并假设系统的前件变量为状态向量.

2 T-S 模糊系统

考虑如下 T-S 模糊系统:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(x)(A_i x(t) + B_i u(t)), \qquad (1)$$

其中 $\sum_{i=1}^{r} h_i(x) = 1, 0 \le h_i(x) \le 1, i = 1, 2, \cdots, r$. 系统(1) 的自治系统为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(x) A_i x(t). \qquad (2)$$

收稿日期: 2006-04-08; **修回日期**: 2006-08-25.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574011); 辽宁省自然科学基金项目(20052022).
作者简介: 周林娜(1979 —),女,辽宁营口人,博士生,从事模糊控制理论与应用的研究; 张庆灵(1956 —),男,辽宁营口人,教授,博士生导师,从事广义大系统的鲁棒控制、网络控制等研究.

在文献[11]的基础上给出 T-S 模糊系统全局稳定和局部稳定的定义.

定义 1　系统(2)是全局渐近稳定的,如果存在函数 $V(x):R^n \to R$,满足:

1) $V(x)$ 在 R^n 上是正定的;

2) $\dot V(x) < 0$ 对于一切 $x \neq 0, x \in R^n$ 成立.

定义 2　系统(2)的平衡点 $x = 0$ 是稳定的,如果存在 $x = 0$ 的一个邻域 U 和函数 $V(x):U \to R$,满足:

1) $V(x)$ 在 U 上是正定的;

2) $\dot V(x) < 0$ 对于一切 $x \neq 0, x \in U$ 成立.

Tanaka 等[2]给出了 T-S 模糊系统全局稳定的条件,此后不断有学者对其进行了放松[4-8]. 其中,文献[4]通过充分考虑模糊系统各子系统间的关系,给出了保守性较小的二次稳定条件.

引理 1[4]　如果存在矩阵 $M_i(i = 1,2,\cdots,r)$, Z, Y_{ij},其中:Z 是正定对称矩阵,$Y_{ii}(i = 1,2,\cdots,r)$ 是对称矩阵,$Y_{ji} = Y_{ij}^{\mathrm T}(i < j = 1,2,\cdots,r)$ 满足以下的 LMIs:

$$ZA_i^{\mathrm T} + M_i^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T} + A_iZ + B_iM_i < Y_{ii},$$
$$ZA_i^{\mathrm T} + M_j^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T} + A_iZ + B_iM_j + ZA_j^{\mathrm T} + M_i^{\mathrm T}B_j^{\mathrm T} + A_jZ + B_jM_i \le Y_{ij} + Y_{ij}^{\mathrm T},$$
$$[Y_{ij}]_{r\times r} < 0,$$

则 PDC 控制器 $u(t) = \sum_{i=1}^{r} h_i(x)F_ix(t)$ 可使系统(1)二次稳定,其中 $F_i = M_iZ^{-1}$.

3　T-S 模糊系统的局部稳定

首先,给出稳定性证明中将用到的一个引理.

引理 2　对于系统(2)的状态变量 $x(t)$ 和矩阵 $Q(x) = \sum_{i=1}^{m} l_i(x)Q_i$,其中 $l_i(x)$ 是向量 x 的函数,$Q_i \in R^{n\times n}$. 假设 $\max_i\Big(\sup_{x\in R^n}\Big\|\dfrac{\partial l_i(x(t))}{\partial x(t)}\Big\|\Big)$ 存在,则下面的不等式成立:

$$y^{\mathrm T}(t)\dot Q(x)y(t) \le \eta\bar\lambda_M(A_i)\sum_{j=1}^{m}\lambda_M(Q_j)\,\|y(t)\|^2\,\|x(t)\|.$$

其中:‖·‖表示向量或矩阵的二范数,

$$\eta_i = \max_i\Big(\sup_{x\in R^n}\Big\|\frac{\partial l_i(x(t))}{\partial x(t)}\Big\|\Big),$$

$\lambda_M(Q_i)$ 表示矩阵 Q_i 的最大奇异值且 $\bar\lambda_M(A_i) = \max_i(\lambda_M(A_i))$.

证明

$$y^{\mathrm T}(t)\dot Q(x)y(t) = \sum_{i=1}^{m} y^{\mathrm T}(t)\Big(\frac{\partial l_i(x)}{\partial x}\dot x(t)\Big)Q_iy(t) =$$
$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m} y^{\mathrm T}(t)\Big(h_i(x)\frac{\partial l_j(x)}{\partial x}A_ix(t)\Big)Q_jy(t) \le$$
$$\Big\|\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m}\Big(h_i(x)\frac{\partial l_j(x)}{\partial x}A_ix(t)\Big)Q_j\Big\|\,\|y(t)\|^2 \le$$
$$\sum_{i=1}^{r}\eta_jh_i(x)\|A_i\|\Big\|\sum_{j=1}^{m}Q_j\Big\|\,\|y(t)\|^2\,\|x(t)\| \le$$
$$\eta\bar\lambda_M(A_i)\lambda_M\Big(\sum_{j=1}^{m}Q_j\Big)\|y(t)\|^2\,\|x(t)\|.\qquad\square$$

文献[10]提出了一种非二次 Lyapunov 函数,研究离散型模糊系统的全局稳定性分析问题,大大降低了保守性. 在这种思想的启发下,本文给出如下非二次 Lyapunov 函数:

$$V(x) = x^{\mathrm T}(t)P(x)^{-1}x(t),\tag{3}$$

其中 $P(x) = \sum_{i=1}^{r} h_i(x)P_i$, $P_i = P_i^{\mathrm T} > 0$.

虽然与文献[10]中的 Lyapunov 函数形式相似,但在连续系统情况下,稳定性分析过程中需要对 Lyapunov 函数求导,比离散系统情况下复杂,而且处理方法也不同. 引理 2 是解决这个问题的关键,在以下定理的推导中起到重要作用.

定理 1　如果存在矩阵 $P_i = P_i^{\mathrm T} > 0, i = 1,2,\cdots,r$, $Y_{ji} = Y_{ij}^{\mathrm T}(i \le j = 1,2,\cdots,r)$ 和常数 $\alpha > 0$,满足以下的 LMIs:

$$P_iA_i^{\mathrm T} + A_iP_i < Y_{ii},$$
$$P_jA_i^{\mathrm T} + A_iP_j + P_iA_j^{\mathrm T} + A_jP_i \le Y_{ij} + Y_{ij}^{\mathrm T},$$
$$[Y_{ij}]_{r\times r} < -\alpha I,$$

则系统(2)的平衡点 $x = 0$ 稳定,且

$$U = \Big(x \mid \|x(t)\| \le \frac{\alpha}{r\eta_{(-h)}\bar\lambda_M(A_i)\lambda_M\Big(\sum_{k=1}^{r}P_k\Big)}\Big),$$

其中 $\eta_{(-h)} = \max_i\Big(\sup_{x\in R^n}\Big\|\dfrac{\partial(-h_i(x(t)))}{\partial x(t)}\Big\|\Big)$.

证明　由 $P_i > 0$ 和 $h_i(x) \ge 0$ 可得 $P(x) > 0$,因此 $P(x)^{-1} > 0$. 设 $P(x)^{-1} = M(x)$,则有

$$P(x)M(x) = I.\tag{4}$$

对式(4)两边求导可得

$$\dot P(x)M(x) + P(x)\dot M(x) = 0,$$

因此有

$$\dot M(x) = -P(x)^{-1}\dot P(x)P(x)^{-1}.$$

对式(3)给出的 Lyapunov 函数求导,即

$$\dot V(x) = \dot x^{\mathrm T}(t)P(x)^{-1}x(t) + x^{\mathrm T}(t)P(x)^{-1}\dot x(t) + x^{\mathrm T}(t)\dot M(x)x(t) =$$
$$\sum_{i=1}^{r}h_i^2(x)x^{\mathrm T}(t)P(x)^{-1}(P_iA_i^{\mathrm T} + A_iP_i)P(x)^{-1} +$$
$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j}h_i(x)h_j(x)x^{\mathrm T}(t)P(x)^{-1}(P_jA_i^{\mathrm T} +$$

$$
\begin{aligned}
&A_iP_j + P_iA_j^{\mathrm T} + A_jP_i)\,P(x)^{-1}x(t) + \\
&x^{\mathrm T}(t)\,P(x)^{-1}(-\dot P(x))\,P(x)^{-1}x(t) < \\
&\begin{bmatrix} h_1(x)\,P(x)^{-1}x(t) \\ \cdots \\ h_r(x)\,P(x)^{-1}x(t) \end{bmatrix}^{\mathrm T}
\begin{bmatrix} Y_{11} & \cdots & Y_{1r} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ Y_{r1} & \cdots & Y_{rr} \end{bmatrix} \times \\
&\begin{bmatrix} h_1(x)\,P(x)^{-1}x(t) \\ \cdots \\ h_r(x)\,P(x)^{-1}x(t) \end{bmatrix} + \\
&\eta_{(-h)}\bar\lambda_M(A_i)\,\lambda_M\Big(\sum_{i=1}^{r}P_k\Big) \times \\
&\|x(t)\|\,\|P(x)^{-1}x(t)\|^2 \le \\
&\eta_{(-h)}\bar\lambda_M(A_i)\,\lambda_M\Big(\sum_{k=1}^{r}P_k\Big) \times \\
&\|x(t)\|\,\|P(x)^{-1}x(t)\|^2 - \\
&\frac{\alpha}{r}\,\|P(x)^{-1}x(t)\|^2.
\end{aligned}
$$

因此,当 $x(t) \in U$ 时 $\dot V(x) < 0$. □

4 T-S 模糊系统的局部镇定

下面给出基于 LMI 的非 PDC 控制器设计方法,使闭环系统在平衡点 $x = 0$ 处稳定. 考虑如下形式的模糊控制器:

$$
u(t) = \sum_{i=1}^{r}h_i(x)\,F_i\Big(\sum_{j=1}^{r}h_j(x)\,P_j\Big)^{-1}x(t). \tag{5}
$$

当 $P_i = P(i = 1,2,\cdots,r)$ 时,式(5) 是 PDC控制器,在这个控制器作用下的闭环系统为

$$
\dot x(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_i(x)\,h_j(x)\,(A_i + B_iF_j)\Big(\sum_{k=1}^{r}h_k(x)\,P_k\Big)^{-1}x(t). \tag{6}
$$

用这种形式的 Lyapunov 函数和控制器分析闭环系统的局部稳定性的好处在于,可以保证结果是 LMI 形式的,并且结构简单,在应用中容易实现.

下面给出闭环系统(6) 的稳定条件.

定理 2 如果存在矩阵 $P_i = P_i^{\mathrm T} > 0$, $F_i(i = 1,2,\cdots,r)$, $H_{jik} = H_{ijk}^{\mathrm T}(i \le j = 1,2,\cdots,r, k = 1,2,\cdots,r)$ 和常数 $\alpha > 0$, 满足以下的 LMIs:

$$
P_iA_i^{\mathrm T} + A_iP_i + B_iF_k + F_k^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T} < H_{iik}, \tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&P_jA_i^{\mathrm T} + A_iP_j + B_iF_k + F_k^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T} + P_iA_j^{\mathrm T} + \\
&A_jP_i + B_jF_k + F_k^{\mathrm T}B_j^{\mathrm T} \le H_{ijk} + H_{ijk}^{\mathrm T},
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\begin{bmatrix} H_{11k} & \cdots & H_{1rk} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ H_{r1k} & \cdots & H_{rrk} \end{bmatrix} < -\alpha I,\ k = 1,2,\cdots,r. \tag{9}
$$

那么式(5) 给出的控制器使闭环系统(6) 的平衡点 $x = 0$ 稳定,且

$$
U = \Big(x \mid \ \|x\| \le \frac{\alpha\lambda_m(P_j)}{r\eta_{(-h)}\bar\lambda_M(G_{ijk})\,\lambda_M\Big(\sum_{k=1}^{r}P_k\Big)}\Big).
$$

其中:$G_{ijk} = A_iP_j + B_iF_k$, $\lambda_m = \min\limits_i \lambda_m(P_i)$, $\lambda_m(P_i)$ 表示 P_i 的最小特征值.

证明 对式(3) 给出的 Lyapunov 函数求导并根据式(7) ~ (9) 和引理 2 得

$$
\begin{aligned}
&\dot V(x) = \\
&\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}h_k(x)\,h_i^2(x)\,x^{\mathrm T}(t)\,P(x)^{-1}(P_iA_i^{\mathrm T} + \\
&F_k^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T} + A_iP_i + B_iF_k)\,P(x)^{-1}x(t) + \\
&\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{i<j}^{r}h_k(x)\,h_i(x)\,h_j(x)\,x^{\mathrm T}(t)\,P(x)^{-1}(P_jA_i^{\mathrm T} + \\
&A_iP_j + B_iF_k + F_k^{\mathrm T}B_i^{\mathrm T} + P_iA_j^{\mathrm T} + A_jP_i + \\
&B_jF_k + F_k^{\mathrm T}B_j^{\mathrm T})\,P(x)^{-1}x(t) + \\
&x^{\mathrm T}(t)\,P(x)^{-1}(-\dot P(x))\,P(x)^{-1}x(t) < \\
&\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}h_k(x)\,h_i(x)\,h_j(x)\,x^{\mathrm T}(t)\,P(x)^{-1}H_{ijk} \times \\
&P(x)^{-1}x(t) + \eta_{(-h)}\bar\lambda_M(A_i + B_iF_kP(x)^{-1}) \times \\
&\lambda_M\Big(\sum_{k=1}^{r}P_k\Big)\,\|x(t)\|\,\|P(x)^{-1}x(t)\|^2 \le \\
&\sum_{k=1}^{r}h_k(x)\begin{bmatrix} h_1(x)\,P(x)^{-1}x(t) \\ \cdots \\ h_r(x)\,P(x)^{-1}x(t) \end{bmatrix}^{\mathrm T} \times \\
&\begin{bmatrix} H_{11k} & \cdots & H_{1rk} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ H_{r1k} & \cdots & H_{rrk} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} h_1(x)\,P(x)^{-1}x(t) \\ \cdots \\ h_r(x)\,P(x)^{-1}x(t) \end{bmatrix} + \\
&\frac{\eta_{(-h)}}{\lambda_m(P_j)}\bar\lambda_M(G_{ijk})\,\lambda_M\Big(\sum_{k=1}^{r}P_k\Big) \times \\
&\|x(t)\|\,\|P(x)^{-1}x(t)\|^2 \le \\
&-\frac{\alpha}{r}\,\|P(x)^{-1}x(t)\|^2 + \frac{\eta_{(-h)}}{\lambda_m(P_j)}\bar\lambda_M(G_{ijk}) \times \\
&\lambda_M\Big(\sum_{k=1}^{r}P_k\Big)\,\|x(t)\|\,\|P(x)^{-1}x(t)\|^2.
\end{aligned}
$$

因此,当 $x(t) \in U$ 时 $\dot V(x) < 0$. □

5 数值例子

考虑规则数为 2 的一个 T-S 模糊系统,取

$$
h_1(x) = \frac{1 + \sin x_1(t)}{2},\ h_2(x) = 1 - h_1(x),
$$

$$
A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix},
$$

$$
B_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix},\ B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.
$$

将 A_1, A_2, B_1, B_2 代入引理 1 的 LMI 中,用 Matlab 求解得不存在满足条件的解,即无法用引理

1 给出的方法求得使闭环系统全局稳定的控制器. 用定理 2 中给出的方法可解得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 14.0707 & -28.7696 \\ -28.7696 & 130.5733 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 7.1190 & 21.2125 \\ 21.2125 & 108.6342 \end{bmatrix},$$

$$\alpha = 64.4410,$$

$$F_1 = F_2 = [-123.3526 \quad 39.6132].$$

闭环系统的仿真如图 1 所示. 可见, 用定理 2 中给出的方法可求出使闭环系统在平衡点 $x = 0$ 处稳定的控制器.

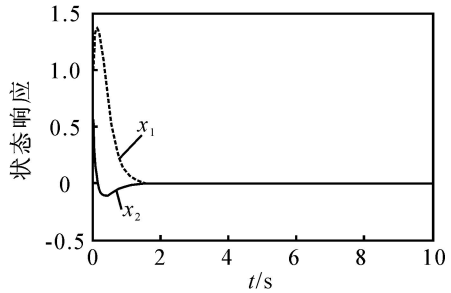

图 1　起始点为 $[1 \quad 0.5]^T$ 时闭环系统的状态响应

6　结　　语

本文讨论了连续 T-S 模糊系统的局部稳定性及控制器设计问题. 将文献[10]在离散型模糊系统中提出的一种非二次 Lyapunov 函数推广到连续型模糊系统中, 对隶属函数的结构进行分析, 得到了基于 LMI 的局部稳定判别条件及控制器设计方法. 最后的数值例子验证了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control[J]. IEEE Trans on System Man, and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.

[2] Tanaka K, Sugeno M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45(2): 135-156.

[3] Hao Y. An analytical study on structure, stability and design of general nonlinear Takagi-Sugeno fuzzy control systems[J]. Automatica, 1998, 34(12): 1617-1623.

[4] Liu X D, Zhang Q L. Approaches to quadratic stability conditions and H_∞ control designs for T-S fuzzy systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2003, 11(3): 1-10.

[5] Liu X D, Zhang Q L. New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI[J]. Automatica, 2003, 39(9): 1571-1582.

[6] Tanaka K, Hori T, Wang H O. A fuzzy Lyapunov approach to fuzzy control system design[C]. Proc of American Control Conf. Arlington, 2001: 4790-4795.

[7] Tanaka K, Hori K, Wang H O. A multiple Lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2003, 11(4): 582-589.

[8] Chadli M, Maquin D, Ragot J. Relaxed stability conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems[C]. IEEE Conf on Systems, Man and Cybernetics. Nashville, 2000: 3514-3519.

[9] 陈彭年, 韩正之, 张钟俊. 非线性控制系统镇定的若干进展[J]. 控制理论与应用, 1995, 12(4): 401-409.
(Chen P N, Han Z Z, Zhang Z J. Development on the stability of nonlinear control systems[J]. Control Theory and Applications, 1995, 12(4): 401-409.)

[10] Thierry M G, Laurent V. LMI-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the Takagi-Sugeno's form[J]. Automatica 2004, 40(5): 823-829.

[11] 段广仁. 线性系统理论[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1996.
(Duan G R. Theory on linear systems[M]. Harbin: Publication of Harbin Institute of Technology, 1996.)

(上接第 621 页)

[10] 卢立磊, 高立群, 张嗣瀛. 结构不确定线性时滞系统的鲁棒控制[J]. 自动化学报, 1998, 24(3): 345-349. (Lu L L, Gao L Q, Zhang S Y. Robust control for linear time-delay systems with structured uncertainty[J]. Acta Automatica Sinica, 1998, 24(3): 345-349.)

[11] Goodwin G C, Salgado M E. A stochastic embedding approach for quantifying uncertainty in the estimation of restricted complexity models[J]. Int J Adaptive Control Signal Processing, 1989, 3(4): 333-356.

[12] Goodwin G C, Braslavsky J H, Serón M M. Non-stationary stochastic embedding for transfer function estimation[J]. Automatica, 2002, 38(1): 47-62.

[13] Goodwin G C, Graebe S F, Salgado M E. Control system design[M]. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 2002.