第 22 卷 第 6 期 控 制 与 决 策 2007 年 6 月
Vol. 22 No. 6 Control and Decision Jun. 2007

文章编号: 1001-0920(2007)06-0637-06

同时镇定及鲁棒控制器存在条件

刘世岳[1], 吕 昕[1], 霍春宝[2]
(1. 北京理工大学 信息科学技术学院, 北京 100081; 2. 辽宁工学院 信息科学技术学院, 辽宁 锦州 121001)

摘 要: 在保证闭环系统稳定的前提下,将被控对象看成控制器,控制器看成被控对象,从集合的角度研究了镇定区间对象族的控制器存在条件和设计方法,利用值集的概念和 Youla 参数化结果给出了镇定区间对象族控制器存在的充分条件. 在强约束条件下,得到了控制器存在的充要条件. 最后给出了鲁棒镇定控制器的设计方法.

关键词: 区间对象族; 同时镇定; 值集; 不等式集
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Simultaneous stabilization and existence conditions of robust controller

LIU Shi-yue[1], *LV Xin*[1], *HUO Chun-bao*[2]
(1. School of Information Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China; 2. School of Information and Technology, Liaoning Institute of Technology, Jinzhou 121001, China. Correspondent: LIU Shi-yue, E-mail: sam641@sohu.com)

Abstract: The existing condition of controller, which can stabilize plant family with parameter uncertainties, and its design approach are considered from the point of set. For designing controller stabilizing a given plant family, a reversing method is adopted by using the concept of value set and the result of Youla. The sufficient condition of existing controller stabilizing the given plant family is given. Under strongly constraint condition, the sufficient and necessary condition is obtained. At last, the design method of controller is provided.

Key words: Plant family; Simultaneous stabilization; Set value; Set of inequalities

1 引 言

同时镇定是鲁棒控制设计领域极为重要的问题[1-8]. 事实上,在解决非线性对象的可镇定性问题时,经常采用一系列线性对象逼近方法. 非线性问题转化为同时镇定问题[9,10],分为基于频域和基于状态空间两种解决方法. 自同时镇定问题提出以来,作为鲁棒控制领域一个重要分支,吸引了 Vidyasagar 等[10-16]众多学者的注意,早期的方法是基于 Youla 参数方法,即利用插值方法设计同时镇定控制器. Seaks 等利用互质分解和代数几何技术得到了全局几何标准和同时镇定与强可镇定之间的关系. Vidyasagar[10]得到了两个对象同时镇定的充要条件,并基于分解理论得到了 MIMO 对象族可被同时镇定的充要条件. 文献[15]利用多项式的代数稳定性标准,把控制器的同时可镇定设计问题转化为几个非线性多项式约束方程,但需要线性规划理论解这些约束方程. 两个对象同时镇定的重要条件和稳定补偿器的综合设计方法由 Wei[14]首次提出,虽然 Debowski 等[17]给出了 3 个对象同时镇定的充要条件,但 Wang 等[18]指出其仅是充分条件,同时提出了修正的充要条件. 文献[19]讨论了同时镇定性的复杂性,并给出了 3 个对象的同时镇定性是未定的证明,同时镇定性是 NP hard 问题. Cao[20]研究了静态反馈时的同时镇定和控制器的存在问题.

本文对区间对象族的同时镇定问题进行了探索性的研究. 因为被控对象无限多,所以获得控制器的存在条件和设计方法都非常困难,利用传统方法无法得到. 本文利用一种新的概念和方法对同时镇定控制器的存在条件和设计方法展开研究.

2 问题提出

文中把被控对象族看成"控制器",把原来的控制器看成"被控对象族",这样处理的前提是闭环系

收稿日期: 2006-03-15; **修回日期**: 2006-06-16.
基金项目: 辽宁省智能控制理论及应用重点实验室基金项目(200521309).
作者简介: 刘世岳(1969—),男,沈阳人,讲师,博士,从事控制理论、通信技术的研究; 吕昕(1960—),男,北京人,教授,博士生导师,从事微波通信等研究.

统的特征多项式不变. 在控制系统设计中,稳定性是对所设计系统的最基本要求,即要求闭环系统传递函数的所有极点均在左半开平面. 在分析系统时,如果仅考虑系统的闭环传递函数特征多项式,而不考虑系统的结构,那么闭环传递函数特征多项式为

$$H_d = 1 + \mathbf{P}(s,\delta)C(s). \tag{1}$$

对控制器的基本要求是能够镇定被控对象族,即由控制器和对象族组成的闭环系统内稳定. 由控制理论知识可知,通过分析闭环系统的特征多项式零点位置即可知道系统是否稳定,即所设计的控制器是否能镇定被控对象族. 所以,两种结构在此意义下是等价的.

3 主要结果

3.1 控制器集及控制器集的集合

对某一个可镇定被控对象,如果存在一个镇定该对象的控制器,那么根据 Youla 参数化方法,则存在一族能够镇定该对象的控制器. 这说明由该控制器族中任何一个控制器与被控对象组成的闭环系统都是稳定的.

定义 1 由控制器组成的集合称为控制器集,控制器集内的元素可以是有限的也可以是无限的.

定义 2 由控制器集构成的集合称为控制器集的集合.

定义 2 可以这样理解:对于给定对象,如果存在镇定该对象的控制器,那么根据 Youla 参数化方法可以得到一族控制器. 如果是一组结构相同的控制器族,可以在控制器中引入另外一个参数来表示这一组控制器族,这样的一组控制器族可以看成是控制器集的集合.

3.2 控制器集的表达形式

考虑能镇定对象 $P(s) = N_0(s)/D_0(s)$ 和镇定该对象的控制器 $C(s) = N_c(s)/D_c(s)$. 经过 Youla 参数化后,用 $\mathbf{S}(P)$ 表示镇定给定对象的控制器集,有

$$\mathbf{S}(P) := \Big\{ C(s) = \frac{N_c(s) + Q(s)D_0(s)}{D_c(s) - Q(s)N_0(s)} : Q(s) \in \mathbf{RH}_\infty, D_c(s) - Q(s)N_0(s) \neq 0 \Big\}, \tag{2}$$

其中 N_0, D_0, N_c, D_c 满足 Bezout 恒等式

$$N_c(s)N_0(s) + D_c(s)D_0(s) = \text{unnimodular}, \tag{3}$$

$Q(s)$ 是 Youla 参数.

当把被控对象和控制器的位置对调后,闭环系统的特征多项式不变,所以可以把控制器 $C(s) = N_c(s)/D_c(s)$ 看成被控对象,而把原来的被控对象 $P(s) = N_0(s)/D_0(s)$ 看成控制器. 如果原来的闭环系统稳定,则"控制器"$P(s) = N_0(s)/D_0(s)$ 镇定"对象"$C(s) = N_c(s)/D_c(s)$. "控制器"$P(s) = N_0(s)/D_0(s)$ Youla 参数化后得到"控制器集"

$$\mathcal{S}(C) := \Big\{ P(s,R) = \frac{N_0(s) + R(s)D_c(s)}{D_0(s) - R(s)D_c(s)} : R(s) \in \mathbf{RH}_\infty, D_0(s) - R(s)D_c(s) \neq 0 \Big\}, \tag{4}$$

其中 $R(s)$ 也是 Youla 参数.

考虑控制器集 $\mathbf{S}(P_0)$ 中的任一控制器 $C_i(s)$ 和集合 $\mathcal{S}(C_i)$ 中的任一被控对象

$$P(s,R_j) = \frac{N_j(s)}{D_j(s)} = \frac{N_0(s) + R_j(s)N_{c_i}(s)}{D_0(s) - R_j(s)D_{c_i}(s)}, \quad j = 1,2,\cdots,\infty, \tag{5}$$

其中 $R_j(s) \in R(s) \in \mathbf{RH}_\infty$. 现在验证控制器

$$C_i(s) = \frac{N_{c_i}(s)}{D_{c_i}(s)} = \frac{N_c(s) + Q_i(s)N_0(s)}{D_c(s) - Q_i(s)D_0(s)}, \quad i = 1,2,\cdots,\infty \tag{6}$$

能够镇定对象族 $\mathcal{S}(C_i)$,其中 $Q_i(s) \in Q(s) \in \mathbf{RH}_\infty$. 假定 $N_{c_i}(s), D_{c_i}(s)$ 和 $N_j(s), D_j(s)$ 分别是左或右互质分解,如果对于 $\forall N_j(s), D_j(s) \in \mathcal{S}(C_i)$,

$$N_{c_i}(s)N_j(s) + D_{c_i}(s)D_j(s) = \text{unimodular} \tag{7}$$

都成立,那么控制器能够镇定对象族集 $\mathcal{S}(C_i)$. 把 $N_{c_i}(s), D_{c_i}(s), N_j(s), D_j(s)$ 代入式(7) 的左端,即

$$(N_c(s) + Q_i(s)N_0(s))(N_0(s) + R_j(s)N_{c_i}(s)) + (D_c(s) - Q_i(s)D_0(s))(D_0(s) - R_j(s)D_{c_i}(s)) = \text{unimodular}, \tag{8}$$

再考虑到式(5),可以很容易地得到所需要的结果.

3.3 控制器存在条件

对于确定性对象,如果不存在不稳定的零极点相消,即给定对象可镇定,则一定存在镇定此对象的控制器. 最简单的方法就是对给定对象做互质分解,然后即可得到相应的控制器. 但对于对象族而言,可镇定的对象族不一定存在能镇定它的控制器,可镇定条件仅仅是控制器存在的必要条件. 因为在可镇定对象族中包含无穷多个对象,其中的任意一个对象都是可镇定的,即可以对其中的任意一个对象设计控制器. 所以,是否一定存在能够镇定对象族的单一控制器与对象族是否可镇定无充分必要的关系.

研究控制器存在条件对于研究对象族系统的综合问题非常重要. 结合前两节的讨论,下面将给出控制器存在的充分和充分必要条件.

3.3.1 充分条件的表述

为了检验是否存在镇定给定对象族

$$\mathbf{P}(s,\delta) = \frac{N_0(s) + \Delta_N(s)}{D_0(s) + \Delta_D(s)} \tag{9}$$

的控制器,下面给出一个定理.在给出定理之前引入几个记号:$C_i(s)$ $(i=1,2,\cdots)$ 是 $\mathbf{S}(P)$ 中的元素,Γ_{C_i} 表示能够被 $C_i(s)$ 镇定的对象集,Γ_S 代表集合

$$\Gamma_S:=\sum_{i=1}^{\infty}\Gamma_{C_i},\tag{10}$$

Γ_P 代表由 $\mathbf{P}(s,\delta)$ 构成的对象集.

定理 1　给定对象族 $\mathbf{P}(s,\delta)$,其可镇定半径为 δ_s,即当 $\|\delta\|<\delta_s$ 时,$\mathbf{P}_s(s,\delta)$ 是可镇定的,并用 $\mathbf{P}_s$ 表示.$P_0(s)$ 是对象族的标称对象,并可被控制器 $C(s)=N_c(s)/D_c(s)$ 镇定.如果 $\Gamma_{P_s}\not\subseteq\Gamma_S$,那么不存在可镇定给定对象族的控制器;如果存在控制器 $C_i(s)$ 满足 $\Gamma_{P_s}\subseteqq\Gamma_{C_i}$,那么 $C_i(s)$ 就是镇定可镇定对象族 $\mathbf{P}_s(s,\delta)$ 的控制器.

证明　从上面的讨论知道,在集 $\mathbf{S}(P_0)$ 中的每一个控制器 $C_i(s)$ 都能镇定标称对象 $P_0(s)$,对于集 $\mathbf{S}(P_0)$ 中的每一个控制器都存在一个可镇定集 Γ_{C_i}.那么,集 Γ_S 是一个能够被某一控制器或控制器集 $\mathbf{S}(P_0)$ 镇定的最大集.如果 $\Gamma_{P_s}\not\subseteq\Gamma_S$ 成立,那么在集 $\mathbf{P}_s(s,\delta_s)$ 中至少存在一个对象位于可镇定集 Γ_S 的外部,即至少存在一个对象不能被集 $\mathbf{S}(P_0)$ 中的任何元素镇定.设"控制器"$P_0(s)$ 能镇定"对象"$C_i(s)$."控制器"的 Youla 参数化后有

$$\Gamma_{C_i}=\left\{P(s)=\frac{N_0(s)+R(s)N_{c_i}}{D_0(s)-R(s)D_{c_i}},R(s)\in\mathbf{RH}_\infty\right\}.\tag{11}$$

式(11)说明能被 $C_i(s)$ 镇定的最大对象集是 Γ_{C_i}.因此,如果关系 $\Gamma_{P_s}\subseteqq\Gamma_{C_i}$ 成立,则 $\mathbf{P}_s(s,\delta_s)$ 中的所有元素均能被控制器 $C_i(s)$ 镇定.□

注 1　对象族的可镇定性是控制器存在的必要条件,因此,需要事先计算出对象族的可镇定半径.

注 2　从映射的观点看,可镇定关系是点到集的和集到集的映射,即控制器 $C_i(s)$ 到对象集 Γ_{C_i} 和控制器集 $\mathbf{S}(P_0)$ 到对象集 Γ_S 的映射.

注 3　定理 1 中的条件 $\Gamma_{P_s}\not\subseteq\Gamma_S$ 仅仅是充分的,也就是即使 $\Gamma_{P_s}\subseteqq\Gamma_S$ 成立,对象族也可能不能被镇定,因为可镇定集 Γ_S 是无穷多个集 Γ_{C_i} 之和.定理的第 2 部分是充分且必要的.

下面讨论检验是否存在镇定给定对象族的控制器的方法.设存在可镇定对象集 $\mathbf{S}(C_i)$ 的控制器 $C_i(s)$,相当于检验由控制器 $C_i(s)$ 和对象集 $\mathbf{S}(C_i)$ 组成的闭环系统内稳定.闭环系统的特征式 $\mathbf{F}_{C_i}$ 的表达式为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{C_i}:&=N_{c_i}(s)N_j(s)+D_{c_i}(s)D_j(s)=\\&(N_c(s)+Q_i(s)N_0(s))N_j(s)+\\&(D_c(s)-Q_i(s)D_0(s))D_j(s).\end{aligned}\tag{12}$$

其中:$\Gamma_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 表示特征式的值集,$\Gamma_{\mathbf{F}_{P_s}}$ 表示由控制器 $C_i(s)$ 和可镇定对象族 $\mathbf{P}_s(s,\delta)$ 组成的闭环系统特征式的值集.由定理 1 可知,如果 $\Gamma_{\mathbf{F}_{P_s}}\in\Gamma_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 成立,则可镇定对象族 $\mathbf{P}_s(s,\delta)$ 能够被控制器 $C_i(s)$ 镇定.

由于特征多项式的值集是凸八边形,如果 $\Gamma_{\mathbf{F}_{P_s}}$ 的顶点或棱边位于 $\Gamma_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 之内,那么控制器 $C_i(s)$ 可以镇定给定的可镇定对象族.因为 $\Gamma_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 和 $\Gamma_{\mathbf{F}_{P_s}}$ 具有相同的标称多项式表达式

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{C_i}:&=\\&N_{c_i}(s)N_0(s)+D_{c_i}(s)D_0(s)=\\&(N_c(s)+Q_i(s)N_0(s))N_0(s)+\\&(D_c(s)-Q_i(s)D_0(s))D_0(s),\end{aligned}\tag{13}$$

因此,只需考虑值集

$$\begin{aligned}&\hat{\Gamma}_{\mathbf{F}_{C_i}}:=R(-D_{C_i}^2+N_{C_i}^2),R\in\mathbf{RH}_\infty,\\&\hat{\Gamma}_{\mathbf{F}_{C_i}}:=\Delta_D D_{C_i}+\Delta_N N_{C_i},\\&\qquad i=1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{14}$$

其中:$N_{C_i}=N_C+QD_0$,$D_{C_i}=D_C-QN_0$,$Q\in\mathbf{RH}_\infty$.如果 $\hat{\Gamma}_{\mathbf{F}_{P_s}}\in\hat{\Gamma}_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 成立,则控制器 $C_i=N_{C_i}/D_{C_i}$ 能够镇定给定对象族 $\mathbf{P}_s(s,\delta)$.

进一步讨论之前,先把已有的对象族方面的一些结果作简单介绍.考虑区间对象族

$$\mathbf{P}(s,\delta)=\left\{P(s):P(s)=\frac{N_0(s)+\Delta_N(s)}{D_0(s)+\Delta_D(s)}=\frac{\sum_{j=0}^{n-1}[b_j^-\ b_j^+]s^j}{\sum_{i=0}^{n}[a_i^-\ a_i^+]s^i}\right\}\tag{15}$$

和控制器 $C(s)=N_C(s)/D_C(s)$,相应的闭环特征多项式为

$$\mathbf{F}_P(s,\delta)=D_C(s)\sum_{i=0}^{n}[a_i^-\ a_i^+]s^i+N_C(s)\sum_{j=0}^{n-1}[b_j^-\ b_j^+]s^j.\tag{16}$$

令 $s=\mathrm{j}\omega$,并定义

$$Z^{\mathrm T}:=\begin{bmatrix}\mathrm{Im}\,z^{\mathrm T}(\mathrm j\omega)\\ \mathrm{Re}\,z^{\mathrm T}(\mathrm j\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y^{\mathrm T}\\ x^{\mathrm T}\end{bmatrix}:=[f_1\ f_2\ \cdots\ f_{2n+1}].\tag{17}$$

其中

$$f_i=\begin{bmatrix}\mathrm{Im}\,f_i(\mathrm j\omega)\\ \mathrm{Re}\,f_i(\mathrm j\omega)\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots,2n+1,$$

Im 和 Re 分别代表对应函数的虚部和实部.那么,$\mathbf{F}_P(\mathrm j\omega,\delta)$ 的值集是

$$\Gamma(\mathrm j\omega,\delta)=$$

$$\{\underline{w}:\underline{w} = \underline{f}_0 + Z^{\mathrm{T}}\delta,\ \|\delta\|_\infty \le 1\}. \quad (18)$$

其中

$$\underline{f}_0 = [\,\mathrm{Im} f_0(\mathrm{j}\omega) \quad \mathrm{Re} f_0(\mathrm{j}\omega)\,]^{\mathrm{T}} = [\,\omega g_0(-\omega^2) \quad h_0(-\omega^2)\,]^{\mathrm{T}}.$$

为了讨论的方便,此处仅考虑值集

$$\hat{\Gamma}(\mathrm{j}\omega,\delta) = \Gamma(\mathrm{j}\omega,\delta) - \underline{f}_0 = \{\underline{w}:\underline{w} = Z^{\mathrm{T}}\delta,\ \|\delta\|_\infty \le 1\}. \quad (19)$$

假设控制器 $C(\mathrm{j}\omega)$ 的 Nyquist 曲线位于第 1 象限,值集 $\hat{\Gamma}(\mathrm{j}\omega,\delta)$ 的顶点是

$$\begin{aligned}
\underline{f}_1 &= \underline{f}_{D_C,1}(-\delta_{D,h}) + \underline{f}_{N_C,1}(-\delta_{N,h}) + \underline{f}_{D_C,2}(-\delta_{D,g}) + \underline{f}_{N_C,2}(-\delta_{N,g}),\\
\underline{f}_2 &= \underline{f}_{D_C,1}(\delta_{D,h}) + \underline{f}_{N_C,1}(-\delta_{N,h}) + \underline{f}_{D_C,2}(-\delta_{D,g}) + \underline{f}_{N_C,2}(-\delta_{N,g}),\\
\underline{f}_3 &= \underline{f}_{D_C,1}(\delta_{D,h}) + \underline{f}_{N_C,1}(\delta_{N,h}) + \underline{f}_{D_C,2}(-\delta_{D,g}) + \underline{f}_{N_C,2}(-\delta_{N,g}),\\
\underline{f}_4 &= \underline{f}_{D_C,1}(\delta_{D,h}) + \underline{f}_{N_C,1}(\delta_{N,h}) + \underline{f}_{D_C,2}(\delta_{D,g}) + \underline{f}_{N_C,2}(-\delta_{N,g}),\\
\underline{f}_5 &= \underline{f}_{D_C,1}(\delta_{D,h}) + \underline{f}_{N_C,1}(\delta_{N,h}) + \underline{f}_{D_C,2}(\delta_{D,g}) + \underline{f}_{N_C,2}(\delta_{N,g}),\\
\underline{f}_6 &= \underline{f}_{D_C,1}(-\delta_{D,h}) + \underline{f}_{N_C,1}(\delta_{N,h}) + \underline{f}_{D_C,2}(\delta_{D,g}) + \underline{f}_{N_C,2}(\delta_{N,g}),\\
\underline{f}_7 &= \underline{f}_{D_C,1}(-\delta_{D,h}) + \underline{f}_{N_C,1}(-\delta_{N,h}) + \underline{f}_{D_C,2}(\delta_{D,g}) + \underline{f}_{N_C,2}(\delta_{N,g}),\\
\underline{f}_8 &= \underline{f}_{D_C,1}(-\delta_{D,h}) + \underline{f}_{N_C,1}(-\delta_{N,h}) + \underline{f}_{D_C,2}(-\delta_{D,g}) + \underline{f}_{N_C,2}(\delta_{N,g}).
\end{aligned} \quad (20)$$

当控制器 $C(\mathrm{j}\omega)$ 的 Nyquist 曲线位于其他象限时,值集的顶点有类似的形式.

$D_0(s) \pm \delta_{D,h}(s) \pm s\delta_{D,g}(s)$ 是 $\mathbf{P}(s,\delta)$ 的 4 个 Kharitonov 多项式的分母,$N_0(s) \pm \delta_{N,h}(s^2) \pm s\delta_{N,g}(s^2)$ 是 $\mathbf{P}(s,\delta)$ 的分子多项式.

引理 1 值集 $\hat{\Gamma}(\mathrm{j}\omega,\delta)$ 是一个凸八边形,其 8 个顶点向量为式(20) 中的 $\underline{f}_j$, $j = 1,2,\cdots,8$.

3.3.2 充分必要条件的表述

定理 2 如果式(20) 的所有顶点向量长度 $|\underline{f}_j|$ $(j = 1,2,\cdots,8)$ 不大于值集 $\hat{T}_{\mathrm{F}_{C_i}}$ 的所有顶点向量长度,即

$$\max|\underline{f}_j| \le \min|\underline{g}_i|,\ i,j = 1,2,\cdots,8, \quad (21)$$

则控制器 C_i 能够镇定给定可镇定对象族 $\mathbf{P}_s$, $\underline{g}_i$ 是值集 $\hat{T}_{\mathrm{F}_{C_i}}$ 的顶点.

证明 从引理 1 可知,值集 $\hat{T}_{\mathrm{F}_{\mathrm{P}_s}}$ 和 $\hat{T}_{\mathrm{F}_{C_i}}$ 都是凸八边形,那么值集中的任意两个元素的线性组合仍然在值集中. 如果存在关系式(21),那么 $\hat{T}_{\mathrm{F}_{\mathrm{P}_s}} \subseteq \hat{T}_{\mathrm{F}_{C_i}}$ 成立. 因此,根据前面的定理,控制器 C_i 能镇定可镇定对象族. □

注 4 定理 2 仅仅是充分的,而不是必要的. 以一种比较简单的情况来分析,令 θ_{f_j} 和 θ_{g_i} 分别代表 $\underline{f}_j$ 和 $\underline{g}_i$ 的相角,设当 $i = j$ 时 $\theta_{f_j} = \theta_{g_i}$. 因为 $|\underline{g}_i|$ $(i = 1,2,\cdots,8)$ 的 8 个值不相同,同样地,$|\underline{f}_j|$ $(j = 1,2,\cdots,8)$ 的 8 个值也不相同. 在这种情况下,如果关系式 $|\underline{f}_j| \le |\underline{g}_i|$ $(i = j = 1,2,\cdots,8)$ 成立,那么控制器 C_i 能够镇定对象族 $\mathbf{P}_s$. 因此,条件(21) 不是必要的,即条件(21) 具有保守性.

定理 3 如果当 $i = j$ 时,$\theta_{f_j} = \theta_{g_i}$,那么可镇定对象族 $\mathbf{P}_s$ 能够被控制器 C_i 镇定,当且仅当

$$|\underline{f}_j| \le |\underline{g}_i|,\ i = j = 1,2,\cdots,8 \quad (22)$$

成立. 当 $\underline{f}_j$ 与 $\underline{g}_j$ 重合时,式(22) 中的等号成立,即值集 $\hat{T}_{\mathrm{F}_{\mathrm{P}_s}}$ 和值集 $\hat{T}_{\mathrm{F}_{C_i}}$ 重合.

证明略.

注 5 定理 2 与定理 3 的差别是定理 3 含有条件 $\theta_{f_j} = \theta_{g_i}$,由于该条件,定理 3 是充分和必要的.

因为 $\Delta_N(s) + N_0(s)$, $\Delta_D(s) + D_0(s)$ 和 $N_{C_i}(s)$, $D_{C_i}(s)$ 分别是对象族 $\mathbf{P}(s,\delta)$ 和控制器 C_i 的互质分解,所以值集

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{\mathrm{F}_{\mathrm{P}_s}} &= \Delta_D(s)D_C(s) + \Delta_N(s)N_C(s) + Q(s)(\Delta_N(s)D_0(s) - \Delta_D(S)N_0(s)),\\
\hat{T}_{\mathrm{F}_{C_s}} &= R[(N_C(s) - D_C(s)) + Q(s)(D_0(s) + N_0(s))][(N_C(s) + D_C(s)) + Q(s)(D_0(s) - N_0(s))]
\end{aligned} \quad (23)$$

是凸集. 从上面的讨论可知,一旦参数 Q 和 R 确定了,就可以得到镇定可镇定对象族的控制器. 为了简单起见,设给定对象族是区间对象族. 因为 Youla 参数是任意的,所以可假设 $Q(s) = R(s)$. 现在讨论确定参数的方法.

情况 1 由定理 3 可知,如果当 $i = j$ 时,$\theta_{f_j} = \theta_{g_i}$,那么值集 $\hat{T}_{\mathrm{F}_{C_s}}$ 和值集 $\hat{T}_{\mathrm{F}_{\mathrm{P}_s}}$ 具有相同的几何形状. 在这种情况下,如果对于所有的 $j = 1,2,\cdots,8$,顶点

$\hat{\underline{f}}_j$ 的向量长度不大于顶点 $\hat{\underline{g}}_i$ 的向量长度,则存在镇定给定对象族的控制器. 因此,如果不等式集 $|\hat{\underline{f}}_j| \leq |\hat{\underline{g}}_i|$ $(j = 1,2,\cdots,8)$ 存在一个解,那么就可以设计镇定对象族的控制器. 通过求解上面的不等式集,可以得到 Youla 参数.

情况 2　如果对于 $i = j$,有 $\theta_{f_j} \neq \theta_{g_i}$,应该检验 $\hat{\underline{f}}_j$ 和 $\underline{g}\theta_{f_j}$ 的向量长度,$\underline{g}\theta_{f_j}$ 是值集 $\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_s}}$ 的边界上的点,其相角为 θ_{f_j}. 如果 $|\hat{\underline{f}}_j| \leq |\hat{\underline{g}}_i|$, $j = 1,2,\cdots,8$,则不等式集有解存在.

参数中的未知系数个数(记做 n_P) 未必等于不等式集中不等式的个数(记做 n_E),有如下 3 种可能的情况:1) $n_P > n_E$;2) $n_P = n_E$;3) $n_P < n_E$.

如果上述不等式集是等式集,根据高等代数理论,则此不等式组可能不存在解. 但是由定理 1 和定理 2 的证明可知,这种情况不可能发生,上述不等式组可能存在一个解集,即可能存在一族可以镇定给定对象族的控制器. 关于是否一定存在一族镇定给定对象族的控制器问题有待于进一步研究.

3.4　对象族系统顶点的确定

从前面的分析可知,控制器的设计问题转变成不等式集解的存在性问题,现在已经有一些可用的解不等式组的方法,因此控制器的设计问题大大简化了. 用 $\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 表示值集 $\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 的边界,向量 $|\hat{\underline{g}}_i|$ 的长度是从原点到边界 $\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 的距离,其相角等于顶点 $\hat{\underline{f}}_j$ $(j = 1,2,\cdots,8)$ 的相角.

令 $\phi^{R}_{\hat{\underline{f}}_j}(s)$,$\phi^{I}_{\hat{\underline{f}}_j}$ 和 $\phi^{R}_{\mathrm{P}}(s)$,$\phi^{I}_{\mathrm{P}}(s)$ 分别表示顶点表达式(20) 的实部和虚部及值集的边界 $\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}$,即

$$\phi^{R}_{\hat{\underline{f}}_j}(s) = \mathrm{Re}\,\hat{\underline{f}}_j,\ \phi^{I}_{\hat{\underline{f}}_j}(s) = \mathrm{Im}\,\hat{\underline{f}}_j,$$

$$\phi^{R}_{\mathrm{P}}(s) = \mathrm{Re}\,\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}},\ \phi^{I}_{\mathrm{P}}(s) = \mathrm{Im}\,\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}},$$

$$j = 1,2,\cdots,8,\ i = 1,2,\cdots \tag{24}$$

式(24) 包含 Youla 参数 $Q(s)$ 或 $R(s)$ 的系数参数,值集 $\hat{T}_{\mathbf{F}_{\mathbf{P}_i}}$ 的每个顶点的相角为

$$\theta_{f_j} = \tan^{-1}\frac{\phi^{I}_{\hat{\underline{f}}_j}(s)}{\phi^{R}_{\hat{\underline{f}}_j}(s)},\ j = 1,2,\cdots,8, \tag{25}$$

值集 $\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 边界点所对应的相角为

$$\theta_{g_i} = \tan^{-1}\frac{\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}}{\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}},\ i = 1,2,\cdots \tag{26}$$

注 6　尽管表达式(26) 中的指数 i 是无穷的,但值集 $\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{\mathbf{P}_s}}$ 的顶点数是 8,所以指数值应是 8.

现在对前面的分析作一简单的小节. 对于 $i = j$,如果相角 θ_{f_j},θ_{g_i} 和 $\hat{\underline{f}}_j$,$\hat{\underline{g}}_i$ 的向量长度满足

$$\theta_{f_j} = \theta_{g_i},\ |\hat{\underline{f}}_j| \leq |\hat{\underline{g}}_i|,$$

$$i = j = 1,2,\cdots,8, \tag{27}$$

而且方程(27) 有解,那么存在镇定给定可镇定对象族的控制器. 当相角条件 $\theta_{f_j} = \theta_{g_i}$ $(i = j = 1,2,\cdots,8)$ 不成立时,由

$$\theta_{f_j} = \theta_{\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}},\ |\hat{\underline{f}}_j| \leq |\partial\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}(\theta_{f_j})|,$$

$$j = 1,2,\cdots,8 \tag{28}$$

替换式(27).

注 7　在式(27) 中认为 $i = j$,因为编号次序可能不同,它仅仅是一个形式表达式,所以实际值可能不一样. 为简单起见,如果 $\hat{\underline{f}}_j$ 和 $\hat{\underline{g}}_i$ 的顶点向量具有相同的方向,则相应的编号次序是相同的.

注 8　方程(28) 的第 2 项是相角 θ_{f_j} 的函数. 因为 $\hat{\underline{f}}_j$ 和 $\hat{\underline{g}}_i$ 的顶点向量的方向不同,为了确定 $\hat{T}_{\mathbf{F}_{C_i}}$ 的边界点,应该把相角 $\hat{\underline{f}}_j$ 代入式(28) 右端第 2 项,其中边界点与 $\hat{\underline{f}}_j$ 同方向.

4　结　　语

本文研究了区间对象族的同时镇定问题,得到了控制器的存在条件,并把控制器的设计问题转化为解一组不等式解的问题,不等式集的解是所有不等式解的交集,因此简化了区间对象族的同时镇定问题. 文中的充要条件仅仅在特定的条件下才成立,即 $\theta_{f_j} = \theta_{g_i}$,$|\hat{\underline{f}}_j| \leq |\hat{\underline{g}}_i|$,$i = j$. 如果相角条件不满足,只能得到充分条件.

本文没有讨论如何选择合适的 Youla 参数 Q 的阶次、式(27) 的求解方法以及具体的控制器设计步骤. 如果存在可镇定给定对象族的控制器,是否存在类似的控制器集等问题目前正在研究.

参考文献(References)

[1] Emre E. Simultaneous stabilization with fixed closed-loop characteristic polynomial [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1983, 28(1): 103-104.

[2] Ghosh B K, Byrnes C I. Simultaneous stabilization and placement by nonswitching dynamic compensation [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1983, 28: 735-741.

[3] Ghosh B K. Robust reliable stabilization scheme for single input, single output systems using trancendental methods[J]. Systems and Control Letters, 1984, 5(2): 111-116.

[4] Ghosh B K. Some new results on the simultaneous stabilizability of a family of singgle input single output systems[J]. Systems and Control Letters, 1985, 6(1): 39-45.

[5] Ghosh B K. Simultaneous partial pole-placement - A new approach to multi-mode systems design[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1986, 31(5): 440-443.
[6] Ghosh B K. An approach to simultaneous system design - Part Ⅰ[J]. Siam J Control Optimization, 1986, 24(3): 480-496.
[7] Ghosh B K. Transcendental and interpolation methods in simultaneous stabilization and simultaneous partial pole placement problems [J]. Siam J Control Optimization, 1986, 24(6): 1091-1109.
[8] Ghosh B K. An approach to simultaneous system design - Part Ⅱ[J]. Siam J Control Optimization, 1988, 26(4): 919-963.
[9] Seaks R, Murray J. Fractional representation algebric geometry and the simultaneous stabilization problem[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1980, 27(4): 895-903.
[10] Vidyasagar M, Viswanadham. Algebric design techniqness for reliable stabilization[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27(5): 1085-1095.
[11] Vidyasagar M. Control system synthesis: A factorization approach[M]. Cambridge: MIT Press, 1985.
[12] Vidyasagar M. Some results on simultaneous stabilization with multiple domains of stability[J]. Automatica, 1987, 23(4): 535-540.
[13] Vidyasagar M. A state-space interpretation of simultaneous stabilization [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1988, 33(5): 506-508.
[14] Wei K. The solution of a transcendental problems and its applications in simultaneous stabilization problems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(9): 1305-1315.
[15] Wei K, Barmish B R. An iterative design procedure for simultaneous stabilization of MIMO systems [J]. Automatica, 1988, 24(5): 643-652.
[16] Chou J J. Pole-assignment robustness in a specified disk[J]. System Control Letters, 1991, 16: 41-44.
[17] Debowski A, Kurylowicz A. Simultaneous stabilization of linear single-input singleoutput[J]. Int J Control, 1986, 44(5): 1267-1274.
[18] Wang S, Fairman F W. Simultaneous stabilization of three plants[J]. Int J Control, 1994, 59(4): 1095-1106.
[19] Blondel V, Govers M. Simultaneous stabilizability of three linear systems is rationally undecidable [J]. Mathmatic Control Signal System, 1993, 6(2): 135-145.
[20] Cao Y Y, Sun Y X, James Lam. Simultaneous stabilization via static output feedback and state feedback [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 44(6): 1277-1282.

(上接第 636 页)

参考文献(References)

[1] Emelyanov S V. Variable structure control systems [M]. Moscow: Nauka, 1967.
[2] Utkin V I. Sliding modes in control optimization[M]. Berlin: Springer, 1992.
[3] Jiang Y A, Hesketh T, Hesketh T, et al. High order sliding mode control of uncertain linear systems[C]. Proc 14th IFAC World Congress. Beijing: PRC, 1999: 437-442.
[4] Bartolini G, Ferrara A, Giacomini L A. Robust control design for a class of uncertain nonlinear systems featuring a second-order sliding mode[J]. Int J Control, 1999, 72(4): 321-331.
[5] Orlov Y V, Utkin V I. Sliding mode control in indefinite dimensional systems[J]. Automatic, 1987, 23(6): 753-757.
[6] 刘永清, 谢胜利. 滞后分布参数系统的稳定与变结构控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
(Liu Y Q, Xie S L. Stability and variable structure control of distributed parameter systems with time delay [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)
[7] 崔宝同, 邓飞其. 不确定时滞分布参数系统的滑动模控制[J]. 计算技术与自动化, 2003, 122(12): 21-24.
(Cui B T, Deng F Q. Sliding mode control for uncertain distributed parameter systems with delays [J]. Computing Technology and Automation, 2003, 122(12): 21-24.)
[8] 刘永清, 邓飞其. 随机系统的变结构控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.
(Liu Y Q, Deng F Q. Variable structure control of stochastic systems [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)
[9] Wang Z, Qiao H, Burnham K J. On the stabilization of bilinear uncertain time-delay stochastic systems with Markovian jumping parameters [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(4): 640-647.
[10] Yugan Niu, Daniel W C Ho, James Lam. Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time-varying delay[J]. Automatic, 2005, 41(5): 873-880.