第 22 卷 第 7 期 控 制 与 决 策 2007 年 7 月
Vol. 22 No. 7 Control and Decision July 2007

文章编号: 1001-0920(2007)07-0817-04

具有控制时滞系统的最优无静差正弦扰动抑制

唐功友, 张洪云, 李 超
(中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100)

摘 要: 研究在外部正弦扰动作用下,控制含时滞的线性系统的最优无静差调节器设计问题. 首先利用 Artstein 变换将控制变量含时滞的系统转化为不含时滞的系统;然后利用内模原理构造扰动补偿器,将带扰动的系统转化为无扰动的增广系统,从而将无静差扰动抑制问题转化为无扰动增广系统的最优调节器设计问题;最后利用最优控制理论求得最优无静差反馈控制律. 仿真结果表明了所提出方法的有效性.

关键词: 线性系统; 时滞系统; 正弦扰动; 最优控制; 扰动抑制
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Sinusoidal disturbance optimal rejection with zero steady-state error for systems with control time-delay

TANG Gong-you, ZHANG Hong-yun, LI Chao
(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China. Correspondent: TANG Gong-you, E-mail: gtang@ouc.edu.cn)

Abstract: The design of an optimal regulator with zero steady-state error for linear systems with control time-delay affected is researched with sinusoidal disturbances. The system with control time-delay is transformed into one without time-delay through the Artstein transform. Then based on the internal model principle, a disturbance compensator is designed, by which the plant model with external disturbances is transformed into an augmented system without disturbances. Consequently, the problem of disturbance rejection with zero steady-state error is transformed into the problem of designing an optimal controller for the augmented plant without disturbances. By using the optimal control theory, an optimal feedback control law with zero steady-state error is obtained. The simulation results show the effectiveness of the proposed control method.

Key words: Linear systems; Time-delay systems; Sinusoidal disturbances; Optimal control; Disturbance rejection

1 引 言

一般的系统大都在外部持续扰动力的作用下工作,外部扰动不仅可能使得系统的工作点发生漂移,而且会使系统的动态性能变差,以及系统输出的稳态特性变坏,甚至使系统无法正常运行. 正弦扰动经常出现在各种实际的控制系统中,例如:直升飞机飞行振动控制系统,飞机螺旋桨转轴承受的扰动力具有正弦特性[1];海洋平台振动的实时控制系统,海洋结构物承受的风力或规则海浪力的基波为正弦扰动力[2,3]. 对于正弦扰动的抑制问题,目前已有多种可行的解决方法,其中包括利用内模原理的反馈控制[4]、自适应反馈控制[5,6]以及前馈-反馈最优控制[2,3,7-11]等. 迄今为止,大多研究工作还只是针对无时滞线性系统开展的[2-8]. 对于控制含有时滞系统的扰动抑制问题,所见到的研究成果多为在 H_∞意义下的控制器的优化设计问题[12],而不是真正意义下的最优控制,也没有涉及如何消除系统的稳态误差问题. 最近,文献[9-11]研究了非线性系统和时滞系统的正弦扰动最优抑制问题,所定义的最优性能指标是二次型平均指标. 在二次型平均最优性能指标下得到的最优控制律是既含有反馈控制部分又含有前馈补偿部分[7-11]. 在这种性能指标下的最优前馈-反馈最优控制不能消除系统的稳态误差.

本文研究在外部正弦扰动的作用下,控制含有

收稿日期: 2006-03-18; **修回日期**: 2006-05-14.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574023); 山东省自然科学基金重点项目(Z2005G01); 青岛市自然科学基金项目(05-1-JC-94).
作者简介: 唐功友(1953—),男,山东烟台人,教授,博士生导师,从事时滞系统、非线性系统等研究; 张洪云(1982—),女,山东聊城人,硕士生,从事时滞系统分析与控制的研究.

时滞的线性系统最优无静差扰动抑制调节器设计问题. 首先利用 Artstein 简化方法将控制变量含时滞的系统转化为不含时滞的系统;然后基于内模原理构造扰动补偿器,将无静差扰动抑制问题转化为无扰动增广系统的最优调节器设计问题;最后利用最优控制理论求得最优无静差反馈控制律.

2 问题描述

考虑由下列微分方程描述的在正弦扰动作用下控制含有时滞的线性系统:

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=\\&Ax(t)+Bu(t-\tau)+Dv(t),\ t>0;\\&x(0)=x_0.\end{aligned}\qquad(1)$$

其中: $x\in R^n$ 为状态向量; $u\in R^r$ 为控制向量; $v\in R^r$ 为外部扰动向量; A,B,D 为具有适当维数的常量矩阵; $\tau>0$ 为常数时滞项. 假设外部扰动向量 v 具有如下正弦形式:

$$v=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1\sin(\omega_1t+\phi_1)\\\alpha_2\sin(\omega_2t+\phi_2)\\\cdots\\\alpha_r\sin(\omega_rt+\phi_r)\end{bmatrix}.\qquad(2)$$

其中:频率 $0\le\omega_i<\pi$ 为已知常量,幅值 α_i 及初相位 ϕ_i 可以是未知的, $i=1,2,\cdots,r$.

下面给出两个假设:

假设 1 矩阵对 (A,B) 是完全能控的;

假设 2 系统(1) 的扰动满足如下匹配条件:

$$\mathrm{Rank}(B)=\mathrm{Rank}(D)=\mathrm{Rank}(B,D)=r.\qquad(3)$$

由于系统(1) 持续受外界正弦扰动力的影响,当 $t\to\infty$ 时,状态向量 x 和控制向量 u 不可能同时趋于零. 如果对系统(1) 选取经典最优控制的无限时间二次型性能指标,则显然是不收敛的. 最近对正弦扰动最优抑制问题的研究,一般选择二次型平均最优性能指标[7-11],但这种性能指标下的最优控制不能保证系统的稳态误差为零. 本文选择一种能保证消除稳态误差的最优控制性能指标,并寻求使性能指标取得最小值的最优无静差控制律.

3 扰动补偿器设计

首先对系统(1) 进行简化描述. 为此,作如下 Artstein 变量代换[13]:

$$z(t)=x(t)+\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\tau-h)}Bu(h)\,\mathrm{d}h.\qquad(4)$$

将变换(4) 代入系统(1),则可将系统(1) 转化为如下形式:

$$\begin{aligned}&\dot{z}(t)=Az(t)+\bar{B}u(t)+Dv(t),\ t>0;\\&z(0)=x_0;\\&x(t)=z(t)-\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{e}^{A(t-\tau-h)}Bu(h)\,\mathrm{d}h.\end{aligned}\qquad(5)$$

其中 $\bar{B}=\mathrm{e}^{-A\tau}B$.

由假设 2 知,存在唯一可逆矩阵 M,使得 $D=\mathrm{e}^{-A\tau}BM=\bar{B}M$ 成立. 于是系统(5) 的第 1 式可写成

$$\dot{z}(t)=Az(t)+\bar{B}(u(t)+w(t)),\qquad(6)$$

其中 $w=Mv$ 为等效的 r 维扰动向量. 注意到

$$\ddot{v}=\begin{bmatrix}-\omega_1^2\alpha_1\sin(\omega_1t+\phi_1)\\-\omega_2^2\alpha_2\sin(\omega_2t+\phi_2)\\\cdots\\-\omega_r^2\alpha_r\sin(\omega_rt+\phi_r)\end{bmatrix}\triangleq-\Omega v,\qquad(7)$$

其中 $\Omega=\mathrm{Diag}\{\omega_1^2\ \ \omega_2^2\ \ \cdots\ \ \omega_r^2\}$,因此有

$$\ddot{w}(t)=-M\Omega v=-M\Omega M^{-1}w.\qquad(8)$$

为了达到对正弦扰动无静差抑制的目的,下面利用内模原理设计无静差扰动补偿器. 引入新的等效状态变量

$$\begin{aligned}&u_1(t)=u(t)+w(t),\\&u_2(t)=\dot{u}_1(t)=\dot{u}(t)+\dot{w}(t),\end{aligned}\qquad(9)$$

可构造如下的动态扰动补偿器:

$$\begin{aligned}&\dot{u}_1(t)=u_2(t),\\&\dot{u}_2(t)=\ddot{u}(t)-M\Omega M^{-1}w=\\&\ddot{u}(t)+M\Omega M^{-1}u(t)-M\Omega M^{-1}u_1(t).\end{aligned}\qquad(10)$$

将原系统(1) 与动态扰动补偿器(10) 对接,作为新的增广系统,并定义增广系统的状态向量 $\tilde{x}(t)$ 和等效控制向量 $\tilde{u}(t)$ 如下:

$$\begin{aligned}&\tilde{x}(t)=[z^{\mathrm{T}}(t)\ \ u_1^{\mathrm{T}}(t)\ \ u_2^{\mathrm{T}}(t)]^{\mathrm{T}},\\&\tilde{u}(t)=\ddot{u}(t)+M\Omega M^{-1}u(t).\end{aligned}\qquad(11)$$

由式(6),(10) 和(11),可得到不显含扰动的 $n+2r$ 维的增广系统

$$\begin{aligned}&\dot{\tilde{x}}(t)=\tilde{A}\tilde{x}(t)+\tilde{B}\tilde{u}(t),\ t>0;\\&\tilde{x}(0)=\tilde{x}_0.\end{aligned}\qquad(12)$$

其中

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A&\bar{B}&0\\0&0&I\\0&-M\Omega M^{-1}&0\end{bmatrix},\ \tilde{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\I\end{bmatrix}.\qquad(13)$$

对于系统(1) 的最优无静差控制问题,选择如下二次型性能指标:

$$\begin{aligned}J=&\int_0^\infty[\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\tilde{x}(t)+\tilde{u}^{\mathrm{T}}(t)R\tilde{u}(t)]\mathrm{d}t=\\&\int_0^\infty\{z^{\mathrm{T}}(t)Q_1z(t)+\\&[u(t)+Mv(t)]^{\mathrm{T}}Q_2[u(t)+Mv(t)]+\\&[\dot{u}(t)+M\dot{v}(t)]^{\mathrm{T}}Q_3[\dot{u}(t)+M\dot{v}(t)]+\\&\tilde{u}^{\mathrm{T}}(t)R\tilde{u}(t)\}\mathrm{d}t.\end{aligned}\qquad(14)$$

其中: $Q=\text{Block-Diag}\{Q_1,Q_2,Q_3\}$; Q_1 为 $n\times n$ 的半正定矩阵,且满足通常的状态调节器条件; Q_2,Q_3 和 R 为 $r\times r$ 的正定矩阵.

这样,原问题便转化为首先寻找增广系统(12),

使性能指标(14)取得极小值的最优等效控制律 $\hat{u}(t)$；然后由 $\hat{u}(t)$ 求出系统(1)的最优无静差正弦扰动抑制控制律 $u^*(t)$.

4　最优无静差控制律设计

对于由式(1)和(14)描述的系统的最优无静差正弦扰动抑制问题，给出以下结果：

定理 1　系统(1)关于性能指标(14)的最优无静差正弦扰动抑制控制律 $u^*(t)$ 由下式确定：

$$
\begin{aligned}
&\dot{\hat{z}}(t) = \\
&K_1\hat{z}(t) + K_2 v(t) + K_3\Big[x(t) + \\
&\int_{t-\tau}^{t} e^{A(t-\tau-h)}Bu(h)\,\mathrm{d}h\Big], \\
&u^*(t) = [I\quad 0]\hat{z}(t).
\end{aligned} \tag{15}
$$

其中

$$
K_1 = \begin{bmatrix} -R^{-1}P_3 & I \\ -M\Omega M^{-1} - R^{-1}P_2 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
K_2 = \begin{bmatrix} -R^{-1}P_3 M \\ -R^{-1}P_2 M \end{bmatrix},
$$

$$
K_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -R^{-1}P_1 \end{bmatrix}. \tag{16}
$$

这里 P_1，P_2 和 P_3 由 $P = \begin{bmatrix} * & * & * \\ P_1 & P_2 & P_3 \end{bmatrix}$ 确定，$*$ 为无关项，P 为如下 Riccati 矩阵代数方程的唯一正定解：

$$
\hat{A}^{\mathrm{T}}P + P\hat{A} - P\hat{B}R^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}}P + Q = 0. \tag{17}
$$

证明　由于(A, B)完全能控，由系统能控性的秩判据容易证明 $\mathrm{Rank}[\hat{B}\quad \hat{A}\hat{B}\quad \hat{A}^2\hat{B}] = n + 2r$，即$(\hat{A}, \hat{B})$完全能控. 由极大值原理得到的最优控制的必要条件知，增广系统(12)关于性能指标(14)存在唯一的最优控制

$$
\hat{u}(t) = -R^{-1}\hat{B}^{\mathrm{T}}P\hat{x}(t), \tag{18}
$$

其中 P 为 Riccati 矩阵代数方程(17)的唯一正定解. 将 P，$\hat{B}$ 和 $\hat{x}$ 代入式(18)，得

$$
\hat{u}(t) = -R^{-1}[P_1 z(t) + P_2 u_1(t) + P_3 u_2(t)]. \tag{19}
$$

注意到由式(19)求出的 $\hat{u}(t)$ 是增广系统(12)的等效"最优反馈控制律"，而不是所要求的原系统(1)的最优无静差正弦扰动抑制控制律 $u^*(t)$，因此需进一步求得使得性能指标(14)取得极小值的最优控制律 $u^*(t)$. 由式(9)，(11)中第 2 式和(19)得

$$
\begin{aligned}
&\ddot{u}(t) + R^{-1}P_3\dot{u}(t) + (M\Omega M^{-1} + R^{-1}P_2)u(t) = \\
&-R^{-1}P_1 z(t) - R^{-1}P_2 M v(t) - R^{-1}P_3 M\dot{v}(t).
\end{aligned} \tag{20}
$$

注意到式(20)是关于系统(1)最优控制律的二阶微分方程，从而可以求解原系统最优控制 $u^*(t)$. 但由于式(20)包含 $v(t)$ 的导数项，该项是物理不可实现的. 下面来解决这一问题.

引入新的变量

$$
\tilde{u}(t) = \dot{u}(t) + R^{-1}P_3(u(t) + Mv(t)), \tag{21}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\dot{u}(t) &= \tilde{u}(t) - R^{-1}P_3[u(t) + Mv(t)], \\
\dot{\tilde{u}}(t) &= -M\Omega M^{-1}u(t) - R^{-1}P_1 z(t) - \\
&\quad R^{-1}P_2[u(t) + Mv(t)].
\end{aligned} \tag{22}
$$

令

$$
\hat{z}(t) = \begin{bmatrix} \hat{z}_1(t) \\ \hat{z}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t) \\ \tilde{u}(t) \end{bmatrix}. \tag{23}
$$

将式(4)代入(22)，则得到系统(1)的动态最优无静差正弦扰动抑制控制律(15). □

注 1　注意到由式(15)描述的系统(1)的最优无静差正弦扰动抑制控制律 $u^*(t)$ 含有控制记忆项，这是由于引入了 Artstein 变量代换(4)的缘故；控制律 $u^*(t)$ 是具有积分特性的动态控制律，这是因为构造了动态扰动补偿器(10)的缘故.

5　仿真实例

考虑由系统(1)描述的基于二次型性能指标(14)的二阶系统的最优无静差正弦扰动抑制问题. 其中

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},\quad B = D = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},
$$

$$
x_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix},\quad v(t) = \sin t,
$$

$$
Q_1 = \mathrm{Diag}\{1, 0\},\ Q_2 = Q_3 = R = 1.
$$

为了验证本文提出的最优控制器设计方法的有效性，本例中分别考虑了控制时滞 $\tau = 0.1$ 和 $\tau = 5$ 的情形.

图 1～图 4 分别给出了系统控制变量 $u(t)$ 和状态向量第 1 个分量 $x_1(t)$ 在不同时滞下的变化曲线. 尽管系统的控制输入存在时滞，但由系统的状态曲线可以看出，无论是在 $\tau = 0.1$ 还是 $\tau = 5$ 的情形，用本文方法设计的控制器最终可以实现对正弦扰动的最优无静差抑制.

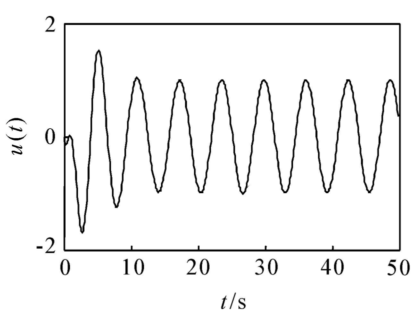

图 1　$\tau = 0.1$ 时系统的控制律曲线

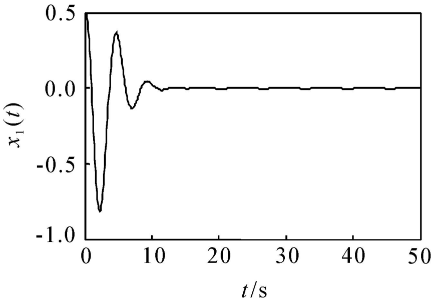

图 2 $\tau = 0.1$ 时系统的状态曲线

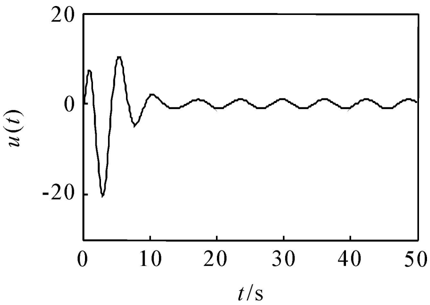

图 3 $\tau = 5$ 时系统的控制律曲线

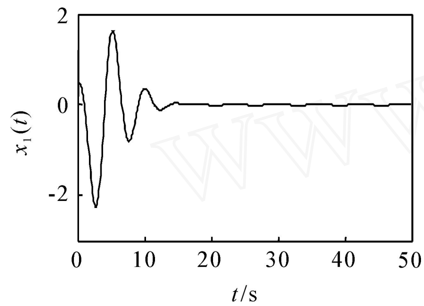

图 4 $\tau = 5$ 时系统的状态曲线

6 结 论

本文采用 Artstein 变量代换将控制变量含时滞的系统转化为不含时滞的系统,并利用内模原理构造了扰动补偿器,精确抵消了正弦扰动对系统的影响,在较短的时间内达到扰动抑制的目的,并使得无限时域的二次型性能指标取得最小. 该方法易于实现,且对小时滞和大时滞情形下的扰动抑制问题均能得到理想的控制效果. 该设计方法不仅适用于正弦扰动抑制问题,而且适用于阶跃、斜坡以及更复杂的扰动抑制问题.

参考文献(References)

[1] Goodwin G C, Evans R J, Leal R L, et al. Sinusoidal disturbance rejection with application to helicopter flight data estimation[J]. IEEE Trans on Acoustics, Speech and Signal Processing, 1986, 34(3): 479-484.

[2] Wang W, Tang G Y. Feedback and feedforward optimal control for offshore jacket platforms[J]. China Ocean Engineering, 2004, 18(4): 515-526.

[3] Ma H, Tang G Y, Zhao Y D. Feedforward and feedback optimal control for offshore structures subjected to irregular wave forces[J]. Ocean Engineering, 2006, 33(8/9): 1105-1117.

[4] Richard R, George W. Internal model based tracking and disturbance rejection for stable well-posed systems [J]. Automatica, 2003, 39(9): 1555-1569.

[5] Bodson M. Performance of an adaptive algorithm for sinusoidal disturbance rejection in high noise [J]. Automatica, 2001, 37(7): 1133-1140.

[6] Marine R, Santosuosso G L, Tomei P. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency[J]. Automatica, 2003, 39(10): 1755-1761.

[7] Tang G Y. Feedforward and feedback optimal control for linear systems with sinusoidal disturbances[J]. High Technology Letters, 2001, 7(4): 16-19.

[8] Lindquist A, Yakubovich V A. Optimal damping of forced oscillations in discrete-time systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(6): 786-802.

[9] Tang G Y, Gao D X. Approximation design of optimal controllers for nonlinear systems with sinusoidal disturbances[J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2007, 66(2): 403-414.

[10] 唐功友,赵艳东,陈显利. 带正弦扰动的线性时滞系统的次优控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(5): 529-533.
(Tang Gong-you, Zhao Yan-dong, Chen Xian-li. Suboptimal control for time-delay linear systems under sinusoidal disturbances[J]. Control and Decision, 2004, 19(5): 529-533.)

[11] 张宝琳,唐功友,郑师,等. 含正弦扰动的离散时滞系统的次优减振控制[J]. 控制与决策, 2006, 21(1): 19-23, 33.
(Zhang Bao-lin, Tang Gong-you, Zheng Shi, et al. Suboptimal damping control for linear discrete time-delay systems with sinusoidal disturbances[J]. Control and Decision, 2006, 21(1): 19-23, 33.)

[12] Yue D, Han Q L, Lam J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty[J]. Automatica, 2005, 41(6): 999-1007.

[13] Artstein Z. Linear systems with delayed controls: A reduction[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27(4): 869-879.