文章编号: 1001-0920(2007)07-0833-03

# 线性控制系统的生存域

高 岩
(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

**摘 要**: 利用非光滑分析工具,讨论了线性控制系统的生存域问题. 如果一个集合是生存域,则此集合沿着系统系数矩阵具有非负特征值的特征向量方向移动得到的集合仍然是一个生存域,从而可以得到线性系统的一种新的既非椭球也非多面体的生存域. 所提出的方法只需计算系统导数矩阵的特征值,简便易行.

**关键词**: 线性控制; 生存域; 非光滑分析

**中图分类号**: O231.2; TD350 **文献标识码**: A

# On viable set for a linear control system

*GAO Yan*
(School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China. E-mail: gaoyan1962@263.net)

**Abstract**: The viable set for a linear control system is discussed by using nonsmooth analysis. A set, which is produced by a viable set moving along eigenvector with nonnegative eigenvalue of the coefficient matrix of the system, is viable. Thus, a new kind of viable sets which are neither polyhedral nor ellipsoidal is obtained. The proposed method, in which only the eigenvalue of the coefficient matrix of the system needs to be calculated, is simple and feasible.

**Key words**: Linear control; Viable set; Nonsmooth analysis

## 1 引 言

生存性是控制理论中的一个重要课题. 控制理论中的许多问题本质上都可以用生存理论这一工具通过生存性刻画并加以解决,例如系统的可达性(可控性)[1]、李雅普诺夫稳定性[2,3]和微分对策[4]等. 另一方面,系统的安全域设计本身就是一个直接的生存性问题,它在一定的意义下就是设计一个生存域.

对于线性系统,目前关于生存域研究的方法主要有利用半定规划(半定不等式)方法得到一个椭球形状的生存域以及利用非光滑分析理论判断一个给定多面体的生存性[5,6]. 然而,关于其他形式的生存域的研究迄今尚未见报道.

考虑如下线性系统:

$$x'(t) = Ax + Bu. \tag{1}$$

其中: $x \in R^n$, $u \in U$, $A$ 和 $B$ 为适当维数的矩阵.

本文将证明,如果 $W \subset R^n$ 是系统(1) 的生存域, $\xi$为 $A$ 的具有非负特征值的特征向量,则集合 $W + \mathrm{cone}\{\xi\}$ 也为系统(1) 的生存域. 从而可得到既非椭球形状也非多面体的生存域.

## 2 预备知识

考虑如下一般形式的微分包含:

$$x'(t) \in F(x),\ x \in R^n, \tag{2}$$

这里 $F(x)$ 为适当映射. 通常的线性和非线性控制系统都是微分包含(2) 的特殊形式. 例如,当 $F(x)$ 取为 $F(x) = \{Ax + Bu \mid u \in U\}$ 时,式(2) 为线性系统(1).

**定义 1**[7,8] 设 $W \subset R^n$,如果对任意初始条件, $x_0 \in W$,存在解 $x(t)$,使得 $x(t) \in W$, $\forall t \geq 0$,则称集合 $W$ 关于微分包含(2) 是生存的.

**定义 2**[7,8] 设 $K \subset R^n$ 非空,则集合 $K$ 在点 $x \in K$ 的切锥定义为

$$T_K(x) = \left\{v \in R^n \mid \liminf_{t \to 0^+} \frac{1}{t} d_K(x + tv) = 0\right\}.$$

其中 $d_K(y)$ 为点 $y \in R^n$ 到集合 $K$ 的距离,即

收稿日期: 2006-03-18; 修回日期: 2006-08-17.
基金项目: 国家自然科学基金项目(10671126); 上海市教委重点项目(04EA01); 教育部归国留学人员基金项目; 上海市重点学科建设项目(T0502).
作者简介: 高岩(1962 —),男,黑龙江五常人,教授,博士生导师,博士,从事非光滑优化、混杂系统控制等研究.

$$d_K(y) = \inf_{s \in K} \| y - s \|.$$

**命题 1**[7] $v \in T_K(x)$,当且仅当存在 $h_k > 0$, $v_k \in R^n$, $k = 1,2,\cdots$,满足 $h_k \to 0$,使得 $x + h_k v_k \in K$, $\forall k \geq 0$.

**命题 2**[7,8] 闭集 $W \subset R^n$ 关于微分包含(1) 是生存的充要条件为:对任意 $x \in W$,有

$$F(x) \cap T_W(x) \neq \varnothing. \tag{3}$$

对于集合 $W$ 的内点 $x$,有 $T_W(x) = R^n$,这时式(3) 总成立. 于是,要判别式(3) 是否成立,只须考虑边界点.

**定义 3**[8] 设 $a_1, a_2, \cdots, a_p \in R^n$,则由向量 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 生成的凸锥 $\mathrm{cone}\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ 定义为

$$\mathrm{cone}\{a_1, a_2, \cdots, a_p\} = \left\{ \sum_{i=1}^{p} t_i a_i \mid t_i \geq 0, i = 1,2,\cdots,p \right\}.$$

本文规定集合的加法为 Minkowski 和,即如果 $U, V \subset R^n$,则

$$U + V = \{ u + v \mid u \in U, v \in V \}.$$

**定理 1** 设 $W \subset R^n$ 为闭集,$\alpha \in R^n$,则对任意实数 $s, t \geq 0$,有

$$T_W(x) + s\alpha \subset T_{W+\mathrm{cone}\{\alpha\}}(x + t\alpha).$$

**证明** 设 $u \in T_W(x)$,则由命题 1,存在 $h_k > 0$, $u_k \in R^n$, $k = 1,2,\cdots$,满足 $h_k \to 0$,使得 $x + h_k u_k \in W$, $\forall k \geq 0$. 对任意固定的 $s, t \geq 0$,有

$$u_k + s\alpha \to u + s\alpha,$$

$$x + t\alpha + h_k(u_k + s\alpha) = x + h_k u_k + (s + t)\alpha \in W + \mathrm{cone}\{\alpha\}.$$

于是,根据命题 1 得

$$u + s\alpha \in T_{W+\mathrm{cone}\{\xi\}}(x + t\alpha).$$

由 $u \in T_W(x)$ 的任意性,有

$$T_W(x) + s\alpha \subset T_{W+\mathrm{cone}\{\alpha\}}(x + t\alpha). \qquad \square$$

## 3 无界生存域

**定理 2** 设 $\xi$ 为 $A$ 的具有非负特征值的特征向量,$W$ 为系统(1) 的生存域,则集合 $W + \mathrm{cone}\{\xi\}$ 也为系统(1) 的生存域.

**证明** 设 $y \in W + \mathrm{cone}\{\xi\}$,则 $y$ 可表示为

$$y = x + t\xi.$$

其中:$x \in W$, $t \geq 0$, $W$ 为生存域. 根据命题 2, $T_W(x) \cap \{Ax + Bu \mid u \in U\} = \varnothing$,于是存在 $u_1 \in U$,使得 $Ax + Bu_1 \in T_W(x)$. 记 $\xi$ 的特征值为 $\lambda \geq 0$,则有

$$Ay + Bu_1 = A(x + t\xi) + Bu_1 = Ax + Bu_1 + t\lambda\xi. \tag{4}$$

由于 $Ay + Bu_1 \in T_W(x)$,以及 $t, \lambda \geq 0$,根据定理 1 得

$$Ax + Bu_1 + t\lambda\xi \in T_{W+\mathrm{cone}\{\xi\}}(x + t\xi) = T_{W+\mathrm{cone}\{\xi\}}(y). \tag{5}$$

由式(4) 和(5) 可得

$$Ay + Bu_1 \in T_{W+\mathrm{cone}\{\xi\}}(y).$$

于是

$$\{Ay + Bu \mid u \in U\} \cap T_{W+\mathrm{cone}\{\xi\}}(y) \neq \varnothing.$$

由命题 2, $W + \mathrm{cone}\{y\}$ 是生存的. □

**推论 1** 设 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p$ 为 $A$ 的具有非负特征值的特征向量, $W$ 为系统(1) 的生存域,则集合 $W + \mathrm{cone}\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p\}$ 也为 $A$ 的生存域.

**证明** 根据凸锥的定义,易得

$$W + \mathrm{cone}\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_p\} = W + \mathrm{cone}\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{p-1}\} + \mathrm{cone}\{\xi_p\}. \tag{6}$$

根据定理 2 及式(6),利用数学归纳法即得推论 1. □

**例 1** 考虑如下线性系统:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

单位圆 $B(0,1) = \{(x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in R^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ 为系统(7) 的一个生存域, $\xi = (0,1)^{\mathrm{T}}$ 为系数矩阵特征值为 1 的特征向量. 由定理 2 可知, $B(0,1) + \mathrm{cone}\{(0,1)^{\mathrm{T}}\}$ 为系统(7) 的生存域. 显然, $B(0,1) + \mathrm{cone}\{(0,1)^{\mathrm{T}}\}$ 既非椭球也非多面体形状.

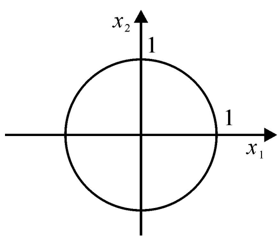


图 1 单位圆 B(0,1)

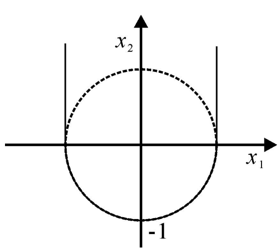


图 2 B(0,1) + cone{(0,1)}

## 4 结 语

本文利用非光滑分析理论给出了一种线性控制系统的既非椭球也非多面体的无界生存域. 所提出方法只需计算系统系数矩阵的特征值,简便易行.

## 参考文献(References)

[1] Gao Y, Lygeros J, Quincampoix M. The reachability problem for uncertain hybrid systems revisited: A viability theory perspective [C]. Lecture Notes in

Computer Science. Berlin: Springer-Verlag, 2006, 3927: 242-256.
[2] Gao Y, Lygeros J, Quincampoix M, et al. On the control of uncertain impulsive system: Approximate stabilisation and controlled invariance[J]. Int J Control, 2004, 77(16): 1393-1407.
[3] Quincampoix M, Seube N. Stabilization of uncertain control systems through piecewise constant feedback [J]. J Mathematics Analysis and Applications, 1998, 218(1): 240-255.
[4] Cardaliaguet P, Quincampoix M, Saint-Pierre P. Pursuit differential games with state constraints [J]. SIAM J Control and Optimization, 2002, 39(5): 1615-1632.
[5] Blanchini F. Set invariance in control[J]. Automatica, 1999, 35(11): 1747-1767.
[6] Milani B E A, Dorea C E T. On invariant polyhedra of continuous-time linear systems subject to additive disturbances[J]. Automatica, 1996, 32(5): 785-789.
[7] Aubin, J-P. Viability theory[M]. Boston: Birkhauser, 1991.
[8] Clarke F H, Leda Yu S, Stern R J, et al. Nonsmooth analysis and control theory[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

(上接第 828 页)

[5] Yu M, Wang L, Chu T. Robust stabilization of sampled-data systems [C]. Proc of American Control Conf. Portand, 2005: 3421-3426.
[6] Cao Y, Sun Y, Cheng C. Delay-dependent robust stabilization of uncertain systems with multiple state delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 43 (11): 1608-1612.
[7] Niculescu S I, Souza C E de, Dugard L, et al. Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(5): 743-748.
[8] Fridman E. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. System Control Letters, 2001, 43(4): 309-319.
[9] Fridman E, Shaked U. An improved stabilization method for linear time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1931-1937.
[10] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. Int J of Control, 2001, 74(14): 1446-1455.

(上接第 832 页)

[2] 李侃, 刘玉树. 模糊核聚类的自适应算法[J]. 控制与决策, 2004, 19(5): 595-597.
(Li Kan, Liu Yu-shu. Fuzzy kernel clustering self-adaptive algorithm[J]. Control and Decision, 2004, 19 (5): 595-597.)
[3] Wu Z D, Xie W X, Yu J P. Fuzzy C-means clustering algorithm based on kernel method[C]. Proc of the 5th Int Conf on Computational Intelligence and Multimedia Applications. Xi'an: IEEE Computer Society, 2003: 1-6.
[4] Kim D-W, Lee K H, Lee D. On cluster validity index for estimation of the optimal number of fuzzy clusters [J]. Pattern Recognition, 2004, 37(10): 2009-2025.
[5] Xu R, Wunsch II D C. Survey of clustering algorithms [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2005, 16(3): 645-678.
[6] Pal N R, Bezdek J C. On clustering for the fuzzy C-means model[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1995, 3(3): 370-379.
[7] Newman D J, Hettich S, Blake C L, et al. UCI repository of machine learning databases [DB/OL]. Irvine: University of California, Department of Information and Computer Science. (1995-02-17). http://www.ics.uci.edu/～mlearn/MLRepository.html.