

文章编号: 1001-0920(2007)07-0730-05

强化缓冲算子性质的研究

党耀国, 刘思峰, 米传民

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘要: 通过对平均强化缓冲算子(ASBO)、几何平均强化缓冲算子(GASBO)、加权平均强化缓冲算子(WASBO)和加权几何平均强化缓冲算子(WGASBO)等的特性及各种内在关系的研究,明确了当序列前一部分增长(衰减)速度过缓而后一部分增长(衰减)速度过快时,冲击扰动系统数据序列通过强化缓冲算子作用后,强化缓冲作用序列变得比较平缓,从而有效地解决了在建模预测过程中常常出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问题。

关键词: 缓冲算子; 算术平均; 几何平均; 强化算子

中图分类号: N94 **文献标识码:** A

Study on characteristics of the strengthening buffer operators

DANG Yao-guo, LIU Si-feng, MI Chuang-min

(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: DANG Yao-guo, E-mail: iamdangyg@163.com)

Abstract: With the studying on the characteristics and their inter-relation of the average strengthening buffer operator, geometry average strengthening buffer operator, weigh average strengthening buffer operator, and weigh geometry average strengthening buffer operator the sequence, which increases or decreases slowly in the front but rapidly in the hind, becomes smooth with the strengthening buffer operators. The problem of the disaccord between quantitative analysis and qualitative analysis is solved effectively in modeling forecasting.

Key words: Buffer operator; Arithmetic average; Geometry average; Strengthening operator

1 引言

灰色系统理论的特点是研究小样本、贫信息不确定性问题,因此充分开发利用已占有的信息来挖掘系统本身固有的规律是灰色系统理论研究的基本准则^[1].人们可通过社会、经济、生态等系统的行为特征数据来寻求因素之间或因素自身的变化规律.灰色系统理论认为,尽管客观系统的表象复杂,数据离乱,但它们总有自身的整体功能,必然蕴藏某种内在规律,关键是如何选择适当的方法去挖掘和利用它^[2-4].文献[5-7]提出了冲击扰动系统和缓冲算子的概念,文献[8,9]构造出一类实用的弱化缓冲算子及其弱化缓冲算子的应用,文献[10]提出了一种新的弱化缓冲算子,文献[11]构造出一类实用的强化缓冲算子.

本文针对强化缓冲算子的特性及其之间的内在关系进行研究,明确了当序列前一部分增长(衰减)

速度过缓而后一部分增长(衰减)速度过快时,冲击扰动系统数据序列通过强化缓冲算子作用后,在强化缓冲算子的作用下,强化缓冲作用序列变得比较平缓.因此,在建模预测过程中常常出现的定量预测结果与定性分析结论不符的问题得到了有效解决.

2 强化缓冲算子

定义 1 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统行为数据序列,且 $x(i) > 0$,令 $XD_i = (x(1) d_i, x(2) d_i, \dots, x(n) d_i)$, $i = 1, 2$. 其中

$$x(k) d_1 = \frac{(n-k+1)(x(k))^2}{[x(k) + x(k+1) + \dots + x(n)]^2} = \frac{(n-k+1)(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n x(i)}$$

$$x(k) d_2 = \frac{(x(k))^2}{[x(k) \quad x(k+1) \quad \dots \quad x(n)]^{1/(n-k+1)}} =$$

收稿日期: 2006-02-24; 修回日期: 2006-05-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70473037); 教育部博士点基金项目(20020287001); 江苏省自然科学基金重点项目(BK2003211); 南京航空航天大学博士创新基金项目(019004).

作者简介: 党耀国(1964—),男,河南驻马店人,教授,博士生导师,从事灰色系统理论、不确定性决策等研究; 刘思峰(1955—),男,河南平舆人,教授,博士生导师,从事灰色系统理论、区域经济等研究.

$$(x(k))^2 / \left[\prod_{i=k}^n x(i) \right]^{1/(n-k+1)}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{1}$$

则称 D_1 为平均强化缓冲算子(ASBO), D_2 为几何平均强化缓冲算子(GASBO).

定义 2 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统行为数据序列,且 $x(i) > 0$, 各时点的权重向量为 $= (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $w_i \geq 0, \sum_{i=1}^n w_i = 1, k = 1, 2, \dots, n$. $XD_i = (x(1) d_i, x(2) d_i, \dots, x(n) d_i), i = 3, 4$. 其中

$$x(k) d_3 = \frac{\sum_{i=k}^n w_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n w_i x(k)},$$

$$x(k) d_4 = (x(k))^2 / \left[\prod_{i=k}^n x(i) \right]^{1/(n-k+1)},$$

$$k = 1, 2, \dots, n. \tag{2}$$

则称 D_3 为加权平均强化缓冲算子(WASBO), D_4 为加权几何平均强化缓冲算子(WGASBO).

3 强化缓冲算子的性质

定理 1 设 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, 即 $w_i = 1/n$, 则

$$x(k) d_3 = \frac{\sum_{i=k}^n (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n x(i)} = (n-k+1) (x(k))^2 / \sum_{i=k}^n x(i) = x(k) d_1,$$

$$x(k) d_4 = (x(k))^2 / \left[\prod_{i=k}^n x(i) \right]^{1/(n-k+1)} = (x(k))^2 / \left[\prod_{i=k}^n x(i) \right]^{1/(n-k+1)} = x(k) d_2. \tag{3}$$

即平均强化缓冲算子(ASBO) 是加权平均强化缓冲算子(WASBO) 的特例,几何平均强化缓冲算子(GASBO) 是加权几何平均强化缓冲算子(WGASBO) 的特例.

定理 2 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为系统行为数据序列,且 $x(i) > 0$, 则

$$(x(k))^2 / \left[\prod_{i=k}^n x(i) \right]^{1/(n-k+1)} = x(k) d_2 = x(k) d_1 = (n-k+1) (x(k))^2 / \sum_{i=k}^n x(i),$$

$$k = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

所有等式成立当且仅当 $x(1) = x(2) = \dots = x(n)$, 即序列为常数序列.

证明 直接利用算术平均数与几何平均数的不等式关系,可知定理 2 结论成立.

定理 3 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$, 且 $x(i) > 0, w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ 和 $\tilde{w} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots, \tilde{w}_n)$ 为

权重向量,其中 $w_k > 0, \sum_{k=1}^n w_k = 1, \tilde{w}_k > 0, \sum_{k=1}^n \tilde{w}_k = 1, k = 1, 2, \dots, n$. 若 $w_i / \tilde{w}_i = c, i = 1, 2, \dots, n$, 即 $w_i = c \tilde{w}_i, i = 1, 2, \dots, n$, 则有:

1) X 为单调增长序列时,有

$$\frac{\sum_{i=k}^n w_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n w_i x(i)} = \frac{\sum_{i=k}^n \tilde{w}_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \tilde{w}_i x(i)}; \tag{5}$$

2) X 为单调衰减序列时,有

$$\frac{\sum_{i=k}^n w_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n w_i x(i)} = \frac{\sum_{i=k}^n \tilde{w}_i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n \tilde{w}_i x(i)}. \tag{6}$$

证明 因为

$$\sum_{i=k}^n w_i x(i) - \sum_{i=k}^n \tilde{w}_i x(i) = \sum_{i=k}^n (w_i - \tilde{w}_i) x(i) = \sum_{i=k}^n (c \tilde{w}_i - \tilde{w}_i) x(i) = (c-1) \sum_{i=k}^n \tilde{w}_i x(i) = 0$$

$$(1, 1, \dots, 1) \begin{bmatrix} w_k & w_{k+1} & \dots & w_n \\ w_{k+1} & w_k & \dots & w_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n & w_k & \dots & w_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(n) \end{bmatrix} =$$

$$(1, 1, \dots, 1) \begin{bmatrix} \tilde{w}_k & \tilde{w}_{k+1} & \dots & \tilde{w}_n \\ \tilde{w}_{k+1} & \tilde{w}_k & \dots & \tilde{w}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{w}_n & \tilde{w}_k & \dots & \tilde{w}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(n) \end{bmatrix} =$$

$$(1, 1, \dots, 1) \begin{bmatrix} w_k - \tilde{w}_k & w_{k+1} - \tilde{w}_{k+1} & \dots & w_n - \tilde{w}_n \\ w_{k+1} - \tilde{w}_{k+1} & w_k - \tilde{w}_k & \dots & w_n - \tilde{w}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n - \tilde{w}_n & w_k - \tilde{w}_k & \dots & w_n - \tilde{w}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(n) \end{bmatrix} =$$

$$\dots \begin{bmatrix} w_n - \tilde{w}_n & w_k - \tilde{w}_k & \dots & w_n - \tilde{w}_n \\ w_{k+1} - \tilde{w}_{k+1} & w_n - \tilde{w}_n & \dots & w_n - \tilde{w}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ w_n - \tilde{w}_n & w_n - \tilde{w}_n & \dots & w_n - \tilde{w}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(n) \end{bmatrix} =$$

$$(1, 1, \dots, 1) \begin{bmatrix} 0 \\ -(w_k - \tilde{w}_k) x_{k+1} - (w_{k+1} - \tilde{w}_{k+1}) x_k \\ \dots \\ -(w_n - \tilde{w}_n) x_{k-1} - (w_{k-1} - \tilde{w}_{k-1}) x_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \dots & k & n & - & k & n \\ \dots & k+1 & n & - & k+1 & n \\ & & & \dots & & \\ \dots & & & & 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(n) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=k}^n [(i-j) - (i-j)] x(j) - \\ & \sum_{j=i}^n \sum_{i=k}^n [(j-i) - (j-i)] x(i) = \\ & \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=k}^n [(i-j) - (i-j)] (x(j) - x(i)). \end{aligned} \quad (7)$$

由于 $i/j - i/i-1 = i/i-1, i = 2, 3, \dots, n$, 有

故有 $j - j - 2/j - 2 = j - 2/j - 2, j = 2, 3, \dots, n$

因而 $j - j - 3/j - 3 = \dots$

则得 $j - j - i/j - i, j > i$,

因此: 1) 当 X 为单调增长序列时, 有

$$x(j) - x(i) \geq 0, j > i.$$

由式(7)知 $\sum_{i=k}^n \sum_{i=k}^n i x(i) - \sum_{i=k}^n \sum_{i=k}^n i x(i) \geq 0$,

故 $\frac{\sum_{i=k}^n i (x(k))^2}{n} \geq \frac{\sum_{i=k}^n i (x(i))^2}{n}$;

2) 当 X 为单调衰减序列时, 有

$$x(j) - x(i) \leq 0, j > i.$$

由式(7)知 $\sum_{i=k}^n \sum_{i=k}^n i x(i) - \sum_{i=k}^n \sum_{i=k}^n i x(i) \leq 0$,

故 $\frac{\sum_{i=k}^n i (x(k))^2}{n} \leq \frac{\sum_{i=k}^n i (x(i))^2}{n}$.

引理1^[12] 设 f 为定义在某一简单区间 I 上的一元凸函数, 在 I 上的 n 点为 $(x(1), x(2), \dots, x(n))$, 则有如下不等式成立:

$$f\left(\frac{\sum_{i=k}^n i (x(i))}{n}\right) \leq \frac{\sum_{i=k}^n i f(x(i))}{n}. \quad (8)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, n \geq 0$, 且 $\sum_{i=1}^n i = 1; x(1), x(2), \dots, x(n) \in I, n = 2, 3, \dots$

定理4 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 为非负

的系统行为数据序列, D_3 为加权平均强化缓冲算子 (WASBO), D_4 为加权几何平均强化缓冲算子 (WGASBO), 各时点的权重为 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, $w_k \geq 0, \sum_{k=1}^n w_k = 1, k = 1, 2, \dots, n$. 则

$$x(k) d_3 = \frac{\sum_{i=k}^n i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)}$$

$$\left(\frac{\sum_{i=k}^n i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} \right)^{w_k} / \left[\sum_{i=k}^n i x(i) \right]^{w_k} =$$

$$x(k) d_4, k = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

所有等式成立当且仅当 $x(1) = x(2) = \dots = x(n)$, 即序列为常数序列.

证明 令 $f(x) = -\log(x)$, 由于 $f(x) = -\log(x)$ 在 $I = (0, +\infty)$ 上是严格凸函数, 由引理1知

$$-\log\left[\frac{\sum_{i=k}^n i (x(i))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)}\right] \leq$$

$$-\log\left[\frac{\sum_{i=k}^n i \log(x(i))^2}{\sum_{i=k}^n i \log(x(i))}\right] =$$

$$-\log\left[\frac{\sum_{i=k}^n i \log(x(i))^2}{\sum_{i=k}^n i \log(x(i))}\right] =$$

$$-\log\left[\frac{\sum_{i=k}^n i \log(x(i))^2}{\sum_{i=k}^n i \log(x(i))}\right] =$$

$$\log\left[\frac{\sum_{i=k}^n i (x(i))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)}\right] \leq \log\left[\frac{\sum_{i=k}^n i (x(i))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)}\right].$$

由于 $y = \log(x)$ 是单调递增函数, 有

$$\frac{1}{n} \sum_{i=k}^n i \log(x(i)) \leq \log\left[\frac{\sum_{i=k}^n i (x(i))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)}\right],$$

故 $\frac{\sum_{i=k}^n i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} \leq \frac{\sum_{i=k}^n i (x(i))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)}$.

由定理4可以看出, 对同一序列进行缓冲算子运算, 对应于同一分量上的生成象加权平均强化缓冲算子象小于加权几何平均强化缓冲算子象.

定理5 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$, 且 $x(i) > 0, w = (w_1, w_2, \dots, w_n), w_k \geq 0, \sum_{k=1}^n w_k = 1, w = (w_1, w_2, \dots, w_n), w_k \geq 0, \sum_{k=1}^n w_k = 1$ 为权向量. 若 $w_i / i - 1 = w_i / i - 1$, 即 $w_i / i - 1 = w_i / i - 1, i = 2, 3, \dots, n$, 则:

1) X 为单调增长序列时, 有

$$\frac{\sum_{i=k}^n i (x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} \leq \frac{\sum_{i=k}^n i (x(i))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)}; \quad (10)$$

2) X 为单调衰减序列时,有

$$\frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^i \right]^{1/n}} = \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^i \right]^{1/n}} \quad (11)$$

证明 对所要证明的公式两边取对数后,证明与定理 3 类似,此略.

定理 6 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$, 且 $x(i) > 0, i = (1, 2, \dots, n), k = 0, n = 0, \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \omega_k = 0, \omega_n = 0$ 为权向量. 若 $\omega_i / \omega_{i-1} = \omega_i / \omega_{i-1}$, 即 $\omega_i = \omega_{i-1} \cdot \omega_i / \omega_{i-1}, i = 2, 3, \dots, n$, 则:

1) X 为单调增长序列时,有

$$\frac{\sum_{i=k}^n i(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} = \frac{(x(k))^2 / \left[\prod_{i=k}^n x(i)^i \right]^{1/n}}{\sum_{i=k}^n i x(i)} \quad (12)$$

$$\frac{\sum_{i=k}^n i(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} = \frac{\sum_{i=k}^n i(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} = \frac{(x(k))^2}{\left[\prod_{i=k}^n x(i)^i \right]^{1/n}} \quad (13)$$

2) X 为单调衰减序列时,有

$$\frac{\sum_{i=k}^n i(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} = \frac{\sum_{i=k}^n i(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} \quad (14)$$

$$\frac{\sum_{i=k}^n i(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} = \frac{\sum_{i=k}^n i(x(k))^2}{\sum_{i=k}^n i x(i)} \quad (15)$$

证明 由定理 3 ~ 定理 5 可知结论成立.

从以上讨论可知,单调增长序列在强化缓冲算子作用下数据萎缩,单调衰减序列在强化缓冲算子作用下数据膨胀.因为在缓冲算子作用时,必须满足不动点公理,即 $x(n)d = x(n)$,因此在强化缓冲算子作用下,强化缓冲作用序列的衰减速度比原始序列的衰减速度减缓.同理,对于单调增长序列,在强

化缓冲算子作用下,强化缓冲作用序列的增长速度比原始序列的增长速度减缓.因此,当原始数据序列前一部分增长(衰减)速度过缓,而后一部分增长(衰减)速度过快时,可利用强化缓冲算子对这一类序列进行作用.要使它强化速度快一些,可使用加权几何平均强化缓冲算子(WGASBO);要使它强化速度缓一些,可使用加权平均强化缓冲算子(GASBO).在同一类算子中,可根据各时期的不同权重进行适当调整强化速度.

4 实 例

某企业新开发一种新产品,它的月销售额如表 1 所示^[11].

月份	1	2	3	4	5	6	7
销售额	60.8	62.6	65.7	70.4	77.4	86.7	96.8

由表 1 可以计算出该企业各月销售额增长率分别为

$$2.96\%, 4.95\%, 7.12\%, 9.94\%, 12.01\%, 11.65\%$$

由此可以看出,原始数据序列前半部分增长速度比后半部分增长过缓,因而可利用强化缓冲算子对原始数据序列进行作用来有效地消除原始序列冲击扰动因素的干扰.

本文用前 6 个月的销售额来模拟 7 月份的销售额,预测 8 月份的销售额,从中检测模型的模拟精度.首先利用原始数据建立灰色 GM(1,1) 模型进行预测^[2,13],得到灰色 GM(1,1) 预测模型

$$\hat{x}(k+1) = 695.879e^{0.084k} - 635.07,$$

预测结果为

$$\hat{x}(7) = 92.6, \hat{x}(8) = 100.7.$$

如果将原始数据序列首先用平均强化缓冲算子作用,然后建立灰色 GM(1,1) 模型进行预测,得

$$\hat{x}(k+1) = 385.23e^{0.1248k} - 332.83,$$

预测结果为

$$\hat{x}(7) = 95.8, \hat{x}(8) = 108.3.$$

若将原始数据序列首先用加权平均强化缓冲算子(WASBO)作用,并取 $\omega = (1, 2, \dots, n)$,然后建立灰色 GM(1,1) 模型进行预测,得

$$\hat{x}(k+1) = 342.12e^{0.1347k} - 292.73,$$

预测结果为

$$\hat{x}(7) = 96.7, \hat{x}(8) = 110.66.$$

利用原始序列直接建立灰色 GM(1,1) 模型预测,所得模型的相对误差为 4.34%;如果先用平均强化缓冲算子作用,然后再建立灰色 GM(1,1) 模型预测,所得模型的相对误差为 1.03%;如果先用加

权平均强化缓冲算子(WASBO)作用,并取 $\alpha = (1, 2, \dots, n)$,然后再建立灰色 GM(1,1)模型预测,所得模型的相对误差为 0.01%。由此可以看出,利用强化缓冲算子对原始序列进行作用后,预测精度明显提高,而且比较符合实际情况。因此,当原始数据序列前一部分增长(衰减)速度过缓,而后一部分增长(衰减)速度过快时,应利用强化缓冲算子对序列进行作用。如果要使它强化速度快一些,则使用加权几何平均强化缓冲算子(WGASBO);如果想使它强化速度缓一些,则使用加权平均强化缓冲算子(GASBO)。在同一类算子中,可根据各时期的不同权重进行适当调整强化速度,根据具体问题,分析选用适当的强化缓冲算子对序列进行作用。

5 结 语

本文研究了平均强化缓冲算子(ASBO),几何平均强化缓冲算子(GASBO),加权平均强化缓冲算子(WASBO)和加权几何平均强化缓冲算子(WGASBO)的一些特性及它们之间的内在关系,从而明确了强化缓冲算子为解决序列前一部分增长(衰减)过缓而后一部分增长(衰减)过快的扰动数据序列提供了一种新的方法和途径。

参考文献(References)

- [1] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 第3版. 北京: 科学出版社, 2004.
(Liu Si-feng, Dang Yao-guo, Fang Zhi-geng. Grey system theory and its application[M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2004.)
- [2] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 10-15.
(Deng Ju-long. A textbook of grey system theory[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2002: 10-15.)
- [3] Liu Sifeng, Li Yi. Grey information: Theory and practical applications [M]. London: Springer-Verlag, 2005.
- [4] 邓聚龙. 累加生成灰指数律[J]. 华中理工大学学报, 1987, 15(5): 7-12.
(Deng Ju-long. The grey exponential law of AGO[J]. J of Huazhong Univeristy of Science and Technology, 1987, 15(5): 7-12.)
- [5] Liu Sifeng. The three axioms of buffer operator and their application[J]. The J of Grey System, 1991, 3(1): 39-48.
- [6] 刘思峰. 冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子[J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(1): 25-27.
(Liu Si-feng. The trap in the prediction of a shock disturbed system and the buffer operator [J]. J of Huazhong Univeristy of Science and Technology, 1997, 25(1): 25-27.)
- [7] 刘思峰. 缓冲算子及其应用[J]. 灰色系统理论与实践, 1992, 2(1): 45-50.
(Liu Si-feng. Buffer operator and its application [J]. Theories and Practices of Grey System, 1992, 2(1): 45-50.)
- [8] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 关于弱化缓冲算子的研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12(2): 108-111.
(Dang Yao-guo, Liu Si-feng, Liu Bin, et al. Study on the weakening buffer operators and researches [J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(2): 108-111.)
- [9] Dang Yaoguo, Liu Sifeng, Liu Bin, et al. Study on the weakening buffer operators and their applications [C]. The 7th Int Conf on Industrial Management. Okayama, 2004: 249-254.
- [10] 谢乃明, 刘思峰. 一种新的弱化缓冲算子[J]. 中国管理科学, 2003, 11(增): 46-48.
(Xie Nai-ming, Liu Si-feng. A new applicative weakening buffer operator [J]. Chinese J of Management Science, 2003, 11(S): 46-48.)
- [11] 党耀国, 刘斌, 关叶青. 关于强化缓冲算子的研究[J]. 控制与决策, 2005, 20(12): 1332-1336.
(Dang Yao-guo, Liu Bin, Guan Ye-qing. Study on the strengthening buffer operators [J]. Control and Decision, 2005, 20(12): 1332-1336.)
- [12] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第3版. 北京: 高等教育出版社, 2002.
(Department of Mathematics, East China Normal University. Mathematical analysis [M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2002.)
- [13] Liu Sifeng, Lin Yi. An introduction to grey systems: Foundations, methodology and applications [M]. Slippery Rock: IIGSS Academic Publisher, 1998: 120-155.