文章编号: 1001-0920(2007)08-0943-03

二次型最优控制问题中的权矩阵与最优控制律

王 进 华
(福州大学 电气工程与自动化学院, 福州 350008)

摘 要: 二次型最优的权矩阵选择是一个包含大量经验与技巧的问题. 对此,研究权矩阵与最优控制律的关系:一个最优控制律,其对应的性能指标(权矩阵)是否唯一的问题. 不论是单输入还是多输入情形,在系统能控性指数大于 2,对应权矩阵的对角线元素有 2 个不为零的元素,且满足一定条件时,该性能指标对应的最优控制律,必有另一性能指标与之对应.

关键词: 最优控制; 性能指标; 权矩阵; LQ 问题
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Relation of weight matrices to optimal control laws in linear quadratic optimal

WANG Jin-hua
(School of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350008, China. E-mail: jinhua-wang@263.net)

Abstract: The selection of weight matrices in linear quadratic optimal control needs a lot of experience and skills. Therefore, a question relating to this selection is studied, which is whether the performance function (weight matrix) of a optimal control law is unique. No matter in single input case or multi input case, many performance functions lead to the same optimal control law when the controllable index of system is more than or equal to 2 and the diagonal elements of the weight matrix relating to this control input have two no zero elements.

Key words: Optimal control; Performance; Weight matrix; Linear quadratic control

1 引 言

二次型最优问题的权矩阵选择始终是人们研究的热点问题. 虽然研究的角度和方法不同,但这些研究都提出一个用来约束权矩阵的指标函数,将问题相应转化为求二次型最优控制律,使得该约束权矩阵的指标函数达到极值[1-5]. 二次型最优的逆问题是:给定系统的一组期望闭环极点,求解二次型最优的权矩阵及相应的最优反馈控制律,使得系统闭环极点配置在期望的闭环极点上[6,7].

对二次型最优问题,有一个熟知的结论:若问题有解,给定一个性能指标(权矩阵),必有唯一的一个最优控制律与之对应. 但给定一个最优控制律,是否其性能指标也唯一? 这个问题将会影响权矩阵选择算法的收敛性. 本文针对单输入和多输入两种情形,对这一问题进行研究.

2 单输入情形

单输入的二次型最优问题可表述为:设系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1}$$

求最优控制律,使得性能指标

$$J = \int_0^\infty (x^{\mathrm{T}}Qx + ru^2)\,\mathrm{d}t \tag{2}$$

达到极小. 其中: $x \in R^n$ 为状态变量, $u \in R$ 为控制输入, A 为 $n \times n$ 系统阵, b 为 $n \times 1$ 输入阵, $Q = Q^{\mathrm{T}} \geq 0$ 为 $n \times n$ 权矩阵, $r > 0$ 为实数. 为讨论方便,假定:

1) $r = 1$;

2) 系统具有能控规范形,即

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & & 0 \\ \cdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \\ \hline -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{array}\right], \quad b = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{array}\right].$$

上述假定并不影响讨论问题的一般性. 若假定不成立,则可通过输入变换或状态变换化为能控规范形.

系统(1) 在性能指标(2) 最优条件下的控制律为

收稿日期: 2006-04-16; **修回日期**: 2006-11-21.
作者简介: 王进华(1963—),男,福建上杭人,教授,博士,从事非线性系统、最优控制等研究.

$$u^* = -kx = -b^{-1}Px.$$

其中 P 是如下 Riccati 方程的唯一对称正定解:

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - Pbb^{\mathrm{T}}P + Q = 0,$$

记 $P = [p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_n]$. 另外,假定 u_1^* 是对应于权矩阵 Q_1 的最优控制律,相应的 Riccati 方程解阵为 P^1; u_2^* 是对应于权矩阵 Q_2 的最优控制律,相应的 Riccati 方程解阵为 P^2;则有如下结论:

结论 1 $u_1^* = u_2^*$ 的充要条件是 $p_n^1 = p_n^2$.

结论 2 若系统是一阶的,即 $n = 1$,则 $u_1^* = u_2^*$ 的充要条件是 $Q_1 = Q_2$.

上述两个结论都很容易验证,在此不作详细说明.

引理 1 若 $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ 是正定阵,则存在适当的 ε,使得 $n \times n$ 方阵

$$E = \begin{bmatrix} a & 0 & \varepsilon & 0 & \cdots & c \\ 0 & 2\varepsilon & 0 & \varepsilon & \ddots & 0 \\ \varepsilon & 0 & 2\varepsilon & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 2\varepsilon & \ddots & 0 \\ \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & & b \end{bmatrix}$$

是正定阵.

证明 对任意的 n 维非零向量 x,有

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{T}}Ex = {} & (a - \varepsilon)x_1^2 + 2cx_1x_n + \\ & (b - \varepsilon)x_n^2 + \varepsilon(x_1 + x_3)^2 + \\ & \varepsilon(x_2 + x_4) + \cdots + \varepsilon(x_{n-3} + x_{n-1})^2. \end{aligned}$$

显然,在引理 1 条件下,存在足够小的 $\varepsilon > 0$,使得 $x^{\mathrm{T}}Ex > 0$,即 E 正定. □

结论 3 对二阶以上系统,即 $n \geq 2$,设 u^* 是对应于权矩阵 $Q \geq 0$ 的最优控制律,相应的 Riccati 方程解阵为 P. 若矩阵 Q 的对角线至少有两个不为零的元素,即

$$Q = \begin{bmatrix} * & \cdots & * & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \\ * & \cdots & * & * & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots \\ * & \cdots & * & a & 0 & \cdots & 0 & c & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ * & \cdots & * & c & 0 & \cdots & 0 & b & \cdots \\ \cdots & & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix},$$

若 Q 满足 $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ 是正定阵,且包含这两行两列的主子式也大于零(主子式的其余行列对应的对角线元素也不为零),则存在另一个权矩阵 $\bar{Q} \geq 0$,对应的最优控制律也为 u^*.

证明 将对应于权矩阵 $Q \geq 0$ 的 Riccati 方程按每一个元素写下来,可得

$$\begin{cases} -2a_0p_{1n} - p_{1n}^2 + q_{11} = 0; \\ p_{1,j-1} - a_{j-1}p_{1n} - a_0p_{jn} - \\ p_{1n}p_{jn} + q_{1j} = 0, \\ j = 2,3,\cdots,n; \\ p_{i,j-1} - a_{j-1}p_{in} + p_{i-1,j} - \\ a_{i-1}p_{jn} - p_{in}p_{jn} + q_{ij} = 0, \\ i,j = 2,3,\cdots,n. \end{cases} \tag{3}$$

由最优控制律的性质,上式有解 $P > 0$. 因而存在一个微小的增量阵 ΔP,使得 $\bar{P} = P + \Delta P > 0$. 若增量阵 ΔP 使得 $\bar{p}_n = p_n$,且使得由 $\bar{P}A + A^{\mathrm{T}}\bar{P} - \bar{P}bb^{\mathrm{T}}\bar{P} + \bar{Q} = 0$ 解出的 $\bar{Q} \geq 0$,则以权矩阵 $\bar{Q}$ 构成的性能指标,其最优控制律与 u^* 相同. 记 $\Delta Q = \bar{Q} - Q$,考虑到 $\bar{p}_n = p_n$,由方程(3) 可得

$$\begin{cases} \Delta p_{1,j-1} + \Delta q_{1j} = 0, j = 2,3,\cdots,n; \\ \Delta p_{i,j-1} + \Delta p_{i-1,j} + \Delta q_{ij} = 0, \\ i,j = 2,3,\cdots,n. \end{cases} \tag{4}$$

由式(4) 可知,为保证 $\bar{p}_n = p_n$,则:1) p_{ij} 变化,将引起 $q_{i,j+1}$ 和 $q_{i+1,j}$ 的变化;2) 要使 Q 矩阵的对角线元素 q_{ii} 变化,则 $q_{i-l,i+l}$ ($l = 1,2,\cdots,i-1$) 中至少有一个元素也会发生变化;3) $p_{i-1,i}$ 和 $p_{i,i-1}$ 变化时,$q_{i+1,i-1}$, q_{ii} 和 $q_{i-1,i+1}$ 将发生变化.

若权矩阵不为零的两个对角线元素是相邻的,设相邻的两对角线元素为 q_{ii} 和 $q_{i+1,i+1}$,则取

$$\bar{P} = P + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \varepsilon_{ii} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}.$$

上式右边第 2 项表示除了第 i 行第 i 列的元素为 $\varepsilon > 0$,矩阵中的其他元素全为零. 若 $i \neq n$,则对应的权矩阵为

$$\bar{Q} = Q - \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & 0_{ii} \quad \varepsilon & \\ & \varepsilon \quad 0 & \\ & & \ddots \end{bmatrix}.$$

上式右边第 2 项表示除了第 i 行第 $i-1$ 列的元素和第 $i-1$ 行第 i 列的元素为 ε,矩阵中的其他元素全为零. 因 $P > 0$,存在足够小的 ε,使得 $\bar{P} > 0$. 由条件:包含这两行两列的主子式也大于零(主子式的其余行列对应的对角线元素也不为零),可得存在足够小的 ε,使得 $\bar{Q} \geq 0$. 即对半正定阵 $\bar{Q} \geq 0$, $\bar{P} \geq 0$ 是其对应 Riccati 方程的解阵,且有 $\bar{p}_n = p_n$,由结论 1 知 $\bar{u}^* = u^*$. 所以,此时权矩阵 $\bar{Q}$ 与权矩阵 Q 的最优控制律相同.

若权矩阵不为零的两个对角线元素不是相邻的,设非零的两对角线元素为 q_{ll} 和 q_{kk},则取

$$\bar{P} = P - \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & 0_{ll} & \varepsilon & & & & \\ & \varepsilon & 0 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 0 & \varepsilon & \\ & & & & \varepsilon & 0_{kk} & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

因 $P > 0$,则存在足够小的 ε,使得 $\bar{P} > 0$. 此时有

$$\bar{Q} = Q + \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & 0_{ll} & 0 & \varepsilon & & & \\ & 0 & 2\varepsilon & 0 & \ddots & & \\ & \varepsilon & 0 & 2\varepsilon & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & 2\varepsilon & 0 & \varepsilon \\ & & & & \ddots & 0 & 2\varepsilon & 0 \\ & & & & & \varepsilon & 0 & 0_{kk} \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

由条件 2) 和引理 1 易知,存在适当的 ε 使得 $\bar{Q} \geq 0$. 即对半正定阵 $\bar{Q} \geq 0$, $\bar{P} > 0$ 是其对应 Riccati 方程的解阵,且有 $\bar{p}_n = p_n$,由结论 1 知 $\bar{u}^* = u^*$. 所以,此时权矩阵 $\bar{Q}$ 与权矩阵 Q 的最优控制律相同. □

上述结论表明,对于大多数单输入系统而言,不同的性能指标,可以有相同的最优控制律.

3　多输入情形

与单输入的二次型最优问题相似,多输入问题可表述为:设系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{5}$$

求最优控制律,使得性能指标

$$J = \int_0^\infty (x^T Qx + u^T Ru)\,dt \tag{6}$$

达到极小. 其中: $x \in R^n$ 为状态变量, $u \in R^m$ 为控制输入, A 为 $n \times n$ 系统阵, B 为 $n \times m$ 输入阵, $Q = Q^T \geq 0$ 为 $n \times n$ 权矩阵, $R > 0$ 为 $m \times m$ 权矩阵. 为讨论方便,假定:

1) $R = I$;

2) m 个输入是线性独立的;

3) 系统具有龙贝格能控规范形[8].

大多数系统都满足假定 2),而其余两个假定若不满足,可通过变换使之满足,因而上述假定并不影响讨论问题的一般性.

系统(5) 在性能指标(6) 最优条件下的控制律为 $u^* = -Kx = -B^{-1}Px$,其中 P 是如下 Riccati 方程的唯一对称正定解:

$$PA + A^T P - PBB^T P + Q = 0.$$

记系统的能控性指数集为 $\{v_1 \quad \cdots \quad v_m\}$,根据该能控性指数集,将 P 矩阵按列记为

$$P = [p_{11} \quad \cdots \quad p_{1v_1} \quad | \quad \cdots | \quad p_{m1} \quad \cdots \quad p_{mv_m}],$$

则有如下结论:

结论 4　若 u_1^* 是对应于权矩阵 Q_1 的最优控制律,相应的 Riccati 方程解阵为 P^1; u_2^* 是对应于权矩阵 Q_2 的最优控制律,相应的 Riccati 方程解阵为 P^2,则 $u_1^* = u_2^*$ 的充要条件是 $p^1_{iv_i} = p^2_{iv_i}$, $i = 1, 2, \cdots, m$.

结论 5　若多输入系统的能控性指数集满足 $v_i = 1$, $i = 1, 2, \cdots, m$,则对任意的最优控制律 u^*,有唯一的权矩阵 Q 与之对应.

结论 5 叙述的情况,必然有 $m = n$,而在实际系统中几乎是不可能出现的.

按照能控性指数集,将权矩阵 Q 进行分块,记为

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1m} \\ \cdots & & \cdots \\ Q_{m1} & \cdots & Q_{mm} \end{bmatrix},$$

其中 Q_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 为 $v_i \times v_i$ 方阵.

结论 6　设 u^* 是对应于权矩阵 $Q \geq 0$ 的最优控制律,相应的 Riccati 方程解阵为 P. 若矩阵 Q 的分块 Q_{ii} $(i = 1, 2, \cdots, m)$ 中至少存在一个分块阵,有两个不为零的对角线元素,且不为零的对角线元素及相关元素满足 $\begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$ 是正定阵,且包含这两行两列的主子式也大于零(主子式的其余行列对应的对角线元素也不为零),则存在另一个权矩阵 $\bar{Q} \geq 0$,对应的最优控制律也为 u^*.

4　结　　语

对于给定的系统和二次型性能指标,若问题有解,则存在唯一的最优控制律. 对此,本文分析了该结论的反问题. 针对单输入和多输入两种情形,讨论了一个最优控制律所对应的二次型性能指标是否唯一的问题. 得到在一定的权矩阵结构条件下,其最优控制律必定也是另外一个性能指标(权矩阵)的最优控制律. 即对于大多数二次型最优控制问题,同样的最优控制律会有不同的性能指标.

参考文献(References)

[1] David Haessig. Selection of LQG/LTR weighting matrices through constrained optimization[C]. Proc of the American Control Conf. Washington, 1995: 458-460.

[2] Takaharu Hiroe, Toshimitsu Morimoto, Shin-ichi Inoue, et al. A new method for selecting weighting matrices of LQ regulators and its application to an industrial turbine[C]. Proc of the 32nd Conf on Decision and Control. San Antonio, 1993: 3332-3334.

(下转第 950 页)

滨: 哈尔滨工业大学出版社,1988.
(Liu Zhuo. Optimization theory and its application in power system [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1988.)
[5] Mariano C E, Morales E F. (1999a) MOAQ an ant-Q algorithm for multiple objective optimization problems [C]. Proc of the Genetic and Evolutionary Computation Conf. San Fancisco, 1999: 894-901.
[6] Van Veldhuizen D, Lamont G. Multiobjective evolutionary algorithms test suites [C]. Proc of Symposium Applied Computing. San Antonio, 1999: 351-357.
[7] Schott J. Fault tolerant design using simple and multicriteria genetic algorithms [D]. Cambridge: Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, 1995.
[8] Deb K. Multiobjective genetic algorithms: Problem difficulties and construction of test problems [R]. Dortmund: University of Dortmund, Department of Computer Science/ XI, 1998.
[9] Srinivas N, Deb K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms [J]. Evolutionary Computation, 1994, 2(3): 221-248.
[10] Van Veldhuizen D. Evolutionary algorithms: Classification, analysis and new innovations[D]. Ohio: Air Force Institute of Technology, 1999.

(上接第 942 页)

[4] 魏蛟龙, 张驰. Internet 拥塞控制和资源分配中的对策论分析框架[J]. 电子学报, 2003, 31(10): 1452-1455.
(Wei Jiao-long, Zhang Chi. A game theoretical framework for congestion control and resource allocation in the internet[J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(10): 1452-1455.)
[5] 陈惠民, 卢欣, 王普, 等. 对策论方法在信息网络资源分配中的应用[J]. 通信学报, 1999, 20(8): 63-68.
(Chen Hui-min, Lu Xin, Wang Pu, et al. Using game theoretic approaches for resource allocation in information network [J]. J of China Institute of Communications, 1999, 20(8): 63-68.)
[6] 井元伟, 杨开阳, 金福德, 等. 具有多优先级多服务网络的激励价格控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(4): 425-429.
(Jing Yuan-wei, Yang Kai-yang, Jin Fu-de, et al. Inventive pricing problem of multi-service networks with multi-priority- level[J]. Control and Decision, 2001, 16(4): 425-429.)
[7] Shenker S. Fundamental design issues for the future Internet [J]. IEEE J on Selected Areas in Communications, 1995, 13(7): 1176-1188.
[8] Ho Y C, Luh P B, Olsder G J. A control theoretic view on incentive[J]. Automatica, 1982, 18(2): 167-179.
[9] Varian H R. Microeconomic analysis[M]. 3rd ed. New York: Norton, 1992.
[10] Stalling W. TCP/ IP and ATM design principles[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1998.
[11] Odlyzko A. The economics of the Internet: Utility, utilization, and quality of service[EB/ OL]. (1998-07-07). AT&T Labs-Research, http://www.research.att.com/～amo.

(上接第 945 页)

[3] Zhang Ling-bo, Mao Jian-qin. An approach for selecting weighting matrices of LQ of optimal controller design based on genetic algorithms[C]. Proc of IEEE Tencon'02. 2002: 1331-1334.
[4] Broussard J R. A quadratic weight selection algorithm [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982 27(4): 945-947.
[5] Harvey C A, Stein G. Quadratic weights for asymptotic regulator properties [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1978, 23(3): 378-387.
[6] Arar A S, Sawan M E, Rob R A. The inverse output feedback LQ problem [C]. Proc of American Control Conf. Ballimore Maryland, 1994: 2736-2737.
[7] 王耀青. LQ 最优控制系统加权矩阵 Q 的一种数值算法[J]. 控制与决策, 2000, 15(5): 513-517.
(Wang Yao-qing. A numerical algorithm for the weighting matrix Q of LQ optimal control systems[J]. Control and Decision, 2000, 15(5): 513-517.)
[8] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2002: 197.
(Zheng Da-zhong. Linear system theory[M]. 2nd ed. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 197.)