文章编号: 1001-0920(2007)08-0873-05

层次结构综合评判中各种递结算子保序性研究

马东辉[1], 郭小东[1], 周锡元[1,2]
(1. 北京工业大学 抗震减灾研究所, 北京 100022; 2. 中国建筑科学研究院, 北京 100013)

摘 要: 针对综合评判方法中常用的层次分析法,在分析常见逆序问题的基础上,提出层次分析法的递结算子的概念,给出满足严格保序性的 5 个基本条件. 对常见递结算子(权重综合评判算子)的保序性进行研究,并证明加权乘积法是符合所有 5 种保序条件的算子,为综合评价方法中递结算子的合理选择提供了依据.

关键词: 层次分析法; 保序性; 递结算子; 保序条件; 权重综合评判算子
中图分类号: TU201 **文献标识码**: A

Research on keep-order characteristics of functional operators of integrated assessment for hierarchy process

MA Dong-hui[1], *GUO Xiao-dong*[1], *ZHOU Xi-yuan*[1,2]
(1. Institute of Earthquake Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100022, China; 2. China Academy of Building Research, Beijing 100013, China. Correspondent: MA Dong-hui, E-mail: ieemdh@gmail.com)

Abstract: For studying the inversed-order problem of the analytic hierarchy process (AHP) commonly used, the definition of a functional operator and five essential keep-order requirements are presented. Furthermore, keep-order characteristics of frequently used functional operators (weighted operators for synthesizing judgments) is researched. It is proved that weighted product technique is one that meets all five keep-order requirements. The research supplies references for the selection of functional operators in synthesizing judgments.

Key words: AHP; Keep-order characteristic; Functional operators; Keep-order requirements; Weighted operators for synthesizing judgments

1 引 言

在城镇土地利用防灾适宜性的评价中,以层次分析法为代表的权重综合评判方法应用很广泛. 评价因素通常需考虑各种灾害场地破坏效应因素对土地利用的影响,本质上是对一个城市所有可利用地块进行适宜性排序,对保序性有很高的要求. 因此,对通常所采用的各种递结算子的保序性进行评价分析十分必要,对具体工程应用具有重要意义.

2 问题的提出

层次分析法(AHP)是美国运筹学家 Saaty[1] 于 20 世纪 70 年代中期创立的一种定性与定量分析相结合的多目标决策方法,属综合评判范畴. 该方法的特点是通过模型使人的思维层次化、数量化,把一个复杂战略(或系统)的决策问题,分解为决策目标、制约因素、对策等具体因素,并将这些因素按其内在联系和制约关系归结为不同的层次;然后构造一个各因素之间相互联结的层次结构模型;再通过对各个层次的因素按相对重要性构造判断矩阵,经排序运算确定每一层次各因素的相对重要性权重系数,直至计算出各种对策或各项措施(策略)的相对权重系数,并按权重系数大小排序,从而为决策提供依据.

在层次分析法的应用中,保序和逆序问题引起了许多学者的注意并对其加以改进研究,主要可分为标度系统和递结算子两个方面. 要想从根本上解决逆序问题,需从递结算子的合理选择方面着手. 有学者在标度系统改进研究中指出,指数型标度系统保序性更好一些[2,3],这是因为指数型标度系统更接近于加权乘积法,而从后面的分析中可知,在常规的综合评价算法中加权乘积法的保序性最好.

收稿日期: 2006-04-11; **修回日期**: 2006-07-05.
基金项目: 国家"十一五"科技支撑计划项目(2006BAJ13B04, 2006BAJ04A03, 2006BAJ06B01, 2006BAJ06B06); 国家自然科学基金项目(50478114); 北京市博士基金项目; 建设部重点项目.
作者简介: 马东辉(1968 —),男,河北赵县人,副研究员,博士,从事城市安全与防灾的研究; 周锡元(1938 —),男,江苏无锡人,研究员,中国科学院院士,从事地震工程与城市安全防灾等研究.

层次分析法的应用可分为两方面:一方面是相对测度排序问题,另一方面是绝对测度评价问题.从本质上讲,传统层次分析法是一种"加权和"类型的权重综合评判方法,反映给定层次结构各因素的综合(平均)影响,因此它只能给出相对排序,而不能反映评价指标的绝对量度,这是由加权平均本质所决定的.尽管很多学者包括 Saaty[2-4]都提出了许多改进的相对测度逆序,并进行了绝对测度适用性的研究,但都没有很好地解决该问题.

文献[5]给出了层次分析法应用中相对测度和绝对测度的两个典型逆序问题例子,反映了传统层次分析法的局限性,很多学者也对此进行了研究分析.综合来看,"加权和"类型的权重综合评判方法得到的多组评价结果,实际上属于多个评价结果集合,各集合之间从数学原理上讲应不具有可比性,在实际应用中往往把多个结果集合混在一起进行排序,这是发生逆序问题的根本原因.通过以下一个仅有两个因素的简单评价问题便可看清问题的本质:

设有两个因素 A_1 和 A_2,其权重分别为 w_1 和 w_2,有两个方案 V_1 和 V_2,其因素评价值分别为 a_{11}, a_{12} 和 a_{21}, a_{22},相应评价值为 $v_1 = w_1 a_{11} + w_2 a_{12}$, $v_2 = w_1 a_{21} + w_2 a_{22}$.不失一般性,设 $v_1 > v_2$.下面研究当某一个因素值变化同样比例时,在什么情况下可能发生逆序.

为了说明问题,不妨设 $a_{11} < a_{21}$,则 $a_{12} > a_{22}$.当某一个因素值变化同样比例 k 时,新的评价值变为 $v_1' = w_1 k a_{11} + w_2 a_{12}$, $v_2' = w_1 k a_{21} + w_2 a_{22}$.经过简单推导可知,当满足 $k > \dfrac{v_1 - v_2}{w_1(a_{21} - a_{11})} + 1$ 时, $v_1' < v_2'$,逆序就发生了.由此可知,对于各有优势的两个方案,当其中一个因素发生同比例变化时,逆序就可能发生,在很多情况下这是评价者难以接受的.

从本质上讲,层次分析法这种"加权和"类型的权重综合评判方法得出的评价指标不是绝对测度指标,相互之间的可比性在一定条件下才能满足,即一个权重体系仅适合于特定方案(对象)集合的评价.因此,仅通过改善标度体系结构是不能完全排除逆序问题的.模糊综合评判法、灰色聚类法、多属性决策方法、运筹学线性规划方法等权重综合评判类数学方法[6-8]都属于权重综合评判范畴.对比这些数学方法,还提出了很多类似的权重综合评判算子,常用的有极大极小法,极大极大法,最大优属度偏差法,最小优属度偏差法,相对比值法,加权和法,加权乘积法等.另外还有一些从这些计算方法中派生出来的改进方法,但本质上没有很大差异.通常把这些计算方法称为权重综合评判算子或权重综合评判函数.在层次分析法中也可引进这些权重综合评判算子,不妨称它们为递结算子.要改进层次分析法的保序问题,实际上就是要采用满足保序要求的递结算子,这是改进层次分析法保序性的根本出路.

定义 1 递结算子:递结层次关系中属性值向上传递的计算方法或函数.

递结算子可用函数 $f(X)$ 表示,权重为 $W = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$,各属性评定值为 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

本文将以层次分析法为例说明权重综合评判算子的保序性,其他类别的权重综合评判方法可按照本文的思路得到类似的结果.

3 递结算子的保序条件和保序性

3.1 递结算子保序条件

通过递结算子的提出,将对层次分析法保序性评价变为对递结算子的评价.根据不同问题对层次分析法的一致性、保序性等要求的不同,提出以下满足绝对测度保序性的评价标准:

1) 相容性,即各因素之间相互独立,存在 g,满足

$$f(X) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(x_1)\, g(x_2) \cdots g(x_n); \tag{1}$$

2) 因子一致性,即当所有因子属性值相同时,计算结果也是该数值,即

$$f(x, x, \cdots, x) = x; \tag{2}$$

3) 等比例性

$$f(kX) = f(kx_1, kx_2, \cdots, kx_n) = kf(X); \tag{3}$$

4) 等幂性

$$f(X^k) = f(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) = f^k(X); \tag{4}$$

5) 因子等比例性,对 $\forall i, k > 0$,有

$$\frac{f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, kx_i^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})}{f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, kx_i^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})} = \frac{f(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_i^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)})}{f(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_i^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)})}. \tag{5}$$

在研究层次分析法的改进方面,许多学者提出了与其研究相应的评价标准[4,5,9,10],这些评价指标主要集中在 2) 和 3) 两个方面的评价研究,大都将等比例性作为评价层次分析法保序性的主要标准,实际上仅满足这两个条件还不能保证层次分析法的严格保序性.当然,不同的实际问题对保序性的要求不一样,因此,可根据需要选择具有不同保序特点的递结算子.

3.2 不同递结算子的保序性

常见的递结算子的保序性对比如表 1 所示.从中可以看出,加权乘积法是唯一满足全部要求的方法.采用加权乘积法可很好地解决前面的3个逆序

表 1　几种常见权重综合方法的对比

算子名称	计算公式	相容性	一致性	等比例性	等幂性	因子等比例性	特　点
极大极小法	$\max_{1\le i\le n}\left(\min_{1\le j\le n}(a_{ij}^{w_j})\right)$	×	*	√	√	×	可使最小的目标相对优属度达到最大,保守
极大极大法	$\max_{1\le i\le n}\left(\max_{1\le j\le n}(a_{ij}^{w_j})\right)$	×	*	√	√	×	可使最大的目标相对优属度达到最大,冒险
最大优属度偏差法	$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(w_j\left(a_{ij}-\min_{1\le i,j\le n}(a_{ij})\right)\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$	×	√	√	×	×	距离最差理想方案越远越优
最小优属度偏差法	$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(w_j\left(\max_{1\le i,j\le n}(a_{ij})-a_{ij}\right)\right)^{\alpha}\right)^{1/\alpha}$	×	√	√	×	×	距离最好理想方案越近越优
相对比值法	综合上面两个方法	×	√	√	×	×	距离最好理想方案越近且距离最差理想方案越远越优
加权和法	$\sum_{i=1}^{n}w_i x_i$	×	√	√	×	×	加权平均
加权乘积法	$\prod_{i=1}^{n}x_i^{w_i}$	√	√	√	√	√	指数权重形式

注: * 表示在一定条件下满足.

问题. 这对于绝对测度的决策问题、群决策问题,特别是防灾工程中的多途径综合评定问题具有重要意义.

4　加权乘积法保序性证明

有的文献对采用加权乘积算子的层次分析法的保序性进行了研究和评价,但由于忽略了本文前面所述的保序性条件 4) 和 5),使得整个证明过程存在一定的不严密性[5,11]. 下面证明加权乘积算子是唯一满足所有保序条件的递结算子.

Aczel 和 Alsina[11] 在研究各类数学方法中的类似权重综合评价函数时证明了定理 1,本文在其基础上继续进行上述保序条件的证明.

定理 1　在所有连续性的权重综合评价函数中,满足式(2) 因子一致性和式(3) 等比例性的只有加权和法

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sqrt[\gamma]{w_1 x_1^{\gamma} + w_2 x_2^{\gamma} + \cdots + w_n x_n^{\gamma}},\ \gamma > 0$$

以及加权积法 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^{w_1} x_2^{w_2} \cdots x_n^{w_n}$.

针对本文给出的保序条件,提出并证明以下定理:

定理 2　在所有连续且不恒为 0 的函数中,满足上述 5 个保序条件的只有加权积法.

证明　加权积法满足式(1) ～(5) 是显而易见的,不再进行验证. 下面从式(5) 证明唯一性. 为了证明的方便,不失一般性,可假设所有的属性值全部大于 0.

采用数学归纳法,首先证明当 $n = 1$ 时结论正确. 由已知条件可知,对于 $k > 0, x_1^{(1)} > 0, x_1^{(2)} > 0$,有

$$\frac{f(kx_1^{(1)})}{f(kx_1^{(2)})} = \frac{f(x_1^{(1)})}{f(x_1^{(2)})}.$$

不妨设 $f(1) \neq 0$,令 $x_1^{(2)} \equiv 1, k > 0, x_1^{(1)} > 0$,则有

$$f(kx_1^{(1)}) = \frac{f(k)f(x_1^{(1)})}{f(x_1^{(2)})} = \frac{f(k)f(x_1^{(1)})}{f(1)}.$$

因此,对任意 $x > 0$,对任一正整数 p,有

$$f(x^p) = f(1)\left(\frac{f(x)}{f(1)}\right)^p.$$

令 $x^p = z$,得

$$f(z) = f(1)\left(\frac{f(z^{1/p})}{f(1)}\right)^p,$$

有

$$f(z^{1/p}) = f(1)\left(\frac{f(z)}{f(1)}\right)^{1/p}.$$

故对一切正有理数 p/q 均有

$$f(x^{p/q}) = f(1)\left(\frac{f(x^{1/q})}{f(1)}\right)^p = f(1)\left(\frac{f(x)}{f(1)}\right)^{p/q}.$$

因 f 是连续函数,故对 $\alpha > 0, x > 0$,有

$$f(x^{\alpha}) = f(1)\left(\frac{f(x)}{f(1)}\right)^{\alpha}.$$

不妨设 $x = e^{\alpha}$,则有

$$f(x) = f(1)\left(\frac{f(e)}{f(1)}\right)^{\alpha} = f(1)\left(\frac{f(e)}{f(1)}\right)^{\ln x} =$$

$$f(1)\,x^{\ln\left(\frac{f(e)}{f(1)}\right)} = Ax^{w},$$

$$A = f(1),\ w = \ln\left(\frac{f(e)}{f(1)}\right).$$

由于函数应满足因子一致性即式(2),有 $f(x) = x$,得到 $A = 1, w = 1$,说明该方法可能是加权积法或加权和法.

在此需要说明的是,对于该证明问题,还应从证明 $n = 2$ 时成立说明加权积法的唯一性,排除加权和法. 有的文献对类似问题仅证明 $n = 1$ 成立,使得归纳法证明的第 1 步就存在问题,从而得出了不恰当的结论.

由已知条件可知,对于 $k > 0$,有

$$\frac{f(kx_1, x_2)}{f(ky_1, y_2)} = \frac{f(x_1, x_2)}{f(y_1, y_2)}.$$

不妨设 $f(1,1) \neq 0$,则有

$$f(kx_1, x_2) = f(k,1)\frac{f(x_1, x_2)}{f(1,1)}.$$

因此,对任一正整数 p,有

$$f(x_1^p, x_2) = f(1, x_2)\left(\frac{f(x_1, x_2)}{f(1, x_2)}\right)^p.$$

变形得

$$f(x_1, x_2) = f(1, x_2)\left(\frac{f(x_1^{1/p}, x_2)}{f(1, x_2)}\right)^p,$$

有

$$f(x_1^{1/p}, x_2) = f(1, x_2)\left(\frac{f(x_1, x_2)}{f(1, x_2)}\right)^{1/p}.$$

故对一切正有理数 p/q 均有

$$f(x_1^{p/q}, x_2) = f(1, x_2)\left(\frac{f(x_1^{1/q}, x_2)}{f(1, x_2)}\right)^p = f(1, x_2)\left(\frac{f(x_1, x_2)}{f(1, x_2)}\right)^{p/q}.$$

因 f 是连续函数,故对 $\alpha > 0$,有

$$f(x_1^\alpha, x_2) = f(1, x_2)\left(\frac{f(x_1, x_2)}{f(1, x_2)}\right)^\alpha.$$

不妨设 $x_1 = e^\alpha$, $x_2 = e^\beta$,则有

$$f(x_1, x_2) = f(1, x_2)\left(\frac{f(e, x_2)}{f(1, x_2)}\right)^\alpha = f(1, x_2)\left(\frac{f(e, x_2)}{f(1, x_2)}\right)^{\ln x_1} = f(1, x_2)\, x_1^{\ln\left(\frac{f(e, x_2)}{f(1, x_2)}\right)}.$$

由已知条件可知,$\dfrac{f(e,1)}{f(1,1)} = \dfrac{f(e, x_2)}{f(1, x_2)}$. 同样可得

$$f(1, x_2) = f(1,1)\left(\frac{f(1,e)}{f(1,1)}\right)^\beta = f(1,1)\left(\frac{f(1,e)}{f(1,1)}\right)^{\ln x_2} = f(1,1)\, x_2^{\ln\left(\frac{f(1,e)}{f(1,1)}\right)}.$$

不妨设 $w_1 = \dfrac{f(e,1)}{f(1,1)}$, $w_2 = \dfrac{f(1,e)}{f(1,1)}$, $A_2 = f(1,1)$, 则有

$$f(x_1, x_2) = A_2 x_1^{w_1} x_2^{w_2}.$$

由于该函数应满足因子一致性即式(2),有 $A_2 = 1$, $w_1 + w_2 = 1$.

假设 n 时结论正确,证明 $n+1$ 时的情况.

为书写简单,设两个向量 X 和 Y 分别为

$$X_{n+1} = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}),$$
$$Y_{n+1} = (y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}),$$
$$K_{n+1} = \overbrace{(1, 1, \cdots, k, \cdots, 1, 1)}^{n+1个},$$

对于 $k > 0$,设 $K_n X_n = (x_1, x_2, \cdots, kx_m, \cdots, x_n)$,则有归纳假设条件

$$\frac{f(K_n X_n)}{f(K_n Y_n)} = \frac{f(X_n)}{f(Y_n)},$$

$$f(X_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i},\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

且

$$w_i = \ln\left[\frac{f(\overbrace{1, \cdots, 1}^{i-1个}, e, \overbrace{1, \cdots, 1}^{n-i个})}{f(U)}\right].$$

按照以上类似的推导,有

$$f(X_{n+1}) = f(X_n, x_{n+1}) = f(X_n, 1)\, x_{n+1}^{\ln\left(\frac{f(X_n, e)}{f(X_n, 1)}\right)}.$$

取 $U = \overbrace{(1, 1, \cdots, 1)}^{n个}$,不妨设 $f(U, 1) \neq 0$,则有

$$\frac{f(U, e)}{f(U, 1)} = \frac{f(X_n, e)}{f(X_n, 1)},$$

取

$$w_{n+1} = \ln\left(\frac{f(U, e)}{f(U, 1)}\right).$$

求 $f(X_n, 1)$ 实际上已转化为 n 时的情形,故可利用归纳假设条件,有

$$f(X_n, 1) = A_{n+1}\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i},$$

$$w_i = \ln\left[\frac{f(\overbrace{1, \cdots, 1}^{i-1个}, e, \overbrace{1, \cdots, 1}^{n-i+1个})}{f(U, 1)}\right],$$

$$A_{n+1} = f(U, 1),$$

则有

$$f(X_{n+1}) = A_{n+1}\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i},$$

$$w_i = \ln\left[\frac{f(\overbrace{1, \cdots, 1}^{i-1个}, e, \overbrace{1, \cdots, 1}^{n-i+1个})}{f(U, 1)}\right],$$

$$A_{n+1} = f(U, 1).$$

由于该函数应满足因子一致性即式(2),有 $A_{n+1} = 1$, $\sum_{i=1}^{n+1} w_i = 1$, 于是定理得证. □

5 结 语

层次分析法属于权重综合评判范畴,对于土地利用评价中需针对大规模数量的对象进行评价的问题,其保序性尤显重要. 保序性不仅是指因子一致性和等比例性,因子等比例性更是其重要条件. 对于绝对测度问题,选择合适的权重综合算子(函数)是保证保序性的根本途径. 经证明,加权积法是能满足各种保序条件的综合评判算子.

通过证明可知,加权积法是唯一满足所有保序条件的递结算子. 从证明过程来看,该结论对于模糊综合评判等其他类别数学方法的权重综合评判算子的选择也具有指导意义.

参考文献(References)

[1] Saaty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw Hill, 1980.

[2] 骆正清, 杨善林. 层次分析法中几种标度的比较[J]. 系统工程理论与实践, 2004, 24(9): 51-60.
(Luo Zheng-qing, Yang Shan-lin. Comparison of some scaling in AHP[J]. System Engineering and Practice, 2004, 24(9): 51-60.)

[3] 吕跃进. 层次分析法标度系统评价研究[C]. 决策科学理论与方法. 北京: 海洋出版社, 2001: 50-58.
(Lv Yue-jin. Research of scaling system of AHP[C]. Decision Science Theory and Methodology. Beijing: Press of Ocean, 2001: 50-58.)

[4] Saaty T L. Fundamentals of decision making and priority theory[C]. RWS Publications. Pittsburgh, 1994: 1-127.

[5] 刘奇志. 层次分析积因子方法的特性及其理论基础[C]. 决策科学理论与方法. 北京:海洋出版社, 2001: 19-33.
(Liu Qi-zhi. Characteristics and theory base of factored product method of AHP[C]. Decision Science Theory and Methodology. Beijing: Press of Ocean, 2001: 19-33.)

[6] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京:国防工业出版社, 2003.
(Li Deng-feng. Decisions and countermeasures for fuzzy multiobjectives and mulitimen[M]. Beijing: Press of National Defense Industry, 2003.)

[7] 张跃. 模糊数学方法及其应用[M]. 北京:煤炭工业出版社, 1992.
(Zhang Yue. Methodology and application of fuzzy mathematics[M]. Beijing: Press of Coal Industry, 1992.)

[8] 唐有文. 模糊层次分析法[J]. 青海师范大学学报, 2002, (3): 19-23.
(Tang You-wen. Fuzzy AHP[J]. J of Qinghai Normal University, 2002, (3): 19-23.)

[9] 吴殿廷, 李东方. 层次分析法的不足及其改进的途径[J]. 北京师范大学学报, 2004, 40(2): 264-268.
(Wu Dian-ting, Li Dong-fang. Disadvantages of AHP and improvement approach[J]. J of Beijing Normal University, 2004, 40(2): 264-268.)

[10] 马荣国, 杨立波. 一种基于模糊理论的AHP改进算法[J]. 长安大学学报, 2002, 22(2): 92-94.
(Ma Rong-guo, Yang Li-bo. Improved arithmetic of AHP based on fuzzy theory[J]. J of Chang'an University, 2002, 22(2): 92-94.)

[11] Aczel J, Alsina C. Synthesizing judgments: A functional equations approach[J]. Applied Mathematical Modelling, 1987, 9(3): 311-320.

(上接第 872 页)

参考文献(References)

[1] Liebeherr J, Nahas M, Si Weisheng. Application-layer multicasting with delaunay triangulation overlays[J]. IEEE J on Selected Areas in Communications, 2002, 20(8): 1472-1488.

[2] Pendarakis D, Shi S, Verma D, et al. ALMI: An application level multicast infrastructure[C]. Proc of 3rd Usenix Symposium on Internet Technologies and Systems. San Francisco, 2001.

[3] Ratnasamy S, Handley M, Karp R, et al. Application level multicast using content-addressable networks[C]. Proc of 3rd Int Workshop on Networked Group Communication. UK, 2001: 14-29.

[4] Chu Y H, Rao S G, Zhang H. A case for end system multicast[C]. Proc of ACM Sigmetrics. Santa Clara, 2000: 1-12.

[5] 程鹏, 吴秋峰, 戴琼海. 基于遗传算法的应用层多播路由方案[J]. 控制与决策, 2006, 21(4): 381-385.
(Cheng Peng, Wu Qiu-feng, Dai Qiong-hai. Application layer multicast routing solution based on genetic algorithms[J]. Control and Decision, 2006, 21(4): 381-385.)

[6] Shi S Y, Turner J S. Routing in overlay multicast networks[C]. Proc of IEEE INFOCOM. New York, 2002: 1200-1208.

[7] Pan Yun, Yu Zhen-wen, Wang Li-cheng. A genetic algorithm for the overlay multicast routing problem[C]. Proc of ICCNMC'03. Shanghai, 2003.

[8] Waxman B. Routing of multipoint connections[J]. IEEE J Select Areas Commun, 1988, 6(9): 1617-1622.

[9] Saaty T L. The analytic hierarchy process[M]. New York: McGraw- Hill, 1980.

[10] Kranakis E, Singh H, Urrutia J. Compass routing on geometric networks[C]. Proc of CCCG. Vancouver, 1999: 51-54.

[11] Zegura E W, Calvert K, Bhattacharjee S. How to model an internetwork[C]. Proc of IEEE Infocom'96. San Francisco, 1996: 594-602.