文章编号: 1001-0920(2007)08-0882-07

直觉模糊集的聚类方法研究

张洪美[1], 徐泽水[1,2], 陈 琦[1]

(1. 解放军理工大学 理学院, 南京 211101; 2. 清华大学 经济管理学院, 北京 100084)

摘 要: 对基于直觉模糊集的聚类问题进行了研究. 首先给出直觉模糊相似度的概念, 并构建了直觉模糊相似矩阵和直觉模糊等价矩阵; 然后定义了直觉模糊相似矩阵的合成运算法则, 给出直觉模糊相似矩阵转化为直觉模糊等价矩阵的途径; 此外, 还分别定义了直觉模糊相似矩阵和直觉模糊等价矩阵的 λ-截矩阵, 进而给出了直觉模糊集的一种聚类方法; 最后通过算例对该方法进行了说明和分析.

关键词: 直觉模糊集; 直觉模糊相似矩阵; 聚类; 直觉模糊等价矩阵; 直觉模糊相似度

中图分类号: C934　　**文献标识码**: A

On clustering approach to intuitionistic fuzzy sets

ZHANG Hong-mei[1], *XU Ze-shui*[1,2], *CHEN Qi*[1]

(1. Institute of Sciences, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China; 2. School of Economics and Management, Tsinghua University, Beijing 100084, China. Correspondent: XU Ze-shui, E-mail: xu_zeshui@263.net)

Abstract: To investigate the problems of clustering intuitionistic fuzzy sets, the concept of intuitionistic fuzzy similarity degree is defined, and intuitionistic fuzzy similarity matrix and intuitionistic fuzzy equivalence matrix are constructed. A compound operational law of intuitionistic fuzzy similarity matrix is defined and an approach to transforming the intuitionistic fuzzy similarity matrices into the intuitionistic fuzzy equivalence matrices is given. Moreover, λ-cutting matrices of the intuitionistic fuzzy similarity matrix and intuitionistic fuzzy equivalence matrix are given, and then an approach to clustering intuitionistic fuzzy sets is proposed. Finally, a numerical example is given to illustrate and analyze the proposed approach.

Key words: Intuitionistic fuzzy set; Intuitionistic fuzzy similarity matrix; Clustering; Intuitionistic fuzzy equivalence matrix; Intuitionistic fuzzy similarity degree

1 引 言

自 1965 年 Zadeh[1] 提出模糊集理论以来, 该理论得到迅速发展. Atanassov[2] 对模糊集进行了拓展, 给出了直觉模糊集概念, 并指出模糊集是直觉模糊集的特殊情形. 有关直觉模糊集理论及其在决策、逻辑规划、医疗诊断、机器学习和市场预测等诸多领域中的应用研究已引起人们的高度重视, 并取得了丰硕成果[3,4]. 此外, 许多学者对基于模糊集的聚类问题进行了研究, 提出了多种聚类方法, 常见的聚类算法有 FCM 聚类算法[5]、最大树聚类算法[6]、编网聚类算法[7]等. 然而, 目前有关直觉模糊集的聚类问题研究尚未见报道. 直觉模糊信息的聚类在医疗诊断、模式识别等领域有着广泛的应用前景, 因此有必要对该类问题进行探讨.

本文首先给出了直觉模糊相似度概念, 并构建了直觉模糊相似矩阵. 考虑到直觉模糊相似矩阵不具有传递性, 因而给出了具有传递性的直觉模糊等价矩阵. 另外还定义了直觉模糊相似矩阵和直觉模糊等价矩阵的 λ-截矩阵, 进而给出了直觉模糊集的一种简洁聚类方法.

2 预备知识

定义 1[2] 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一非空经典集合, 则称 $A = \{\langle x_j, \mu_A(x_j), f_A(x_j)\rangle \mid x_j \in X\}$ 为 X 上的一个直觉模糊集. 其中: $\mu_A: X \to [0,1]$ 是 X 中元素 x_j 属于 A 的隶属度; $f_A: X \to [0,1]$ 是 x_j 属于 A 的非隶属度, 且 $\forall x_j \in X$, 有 $0 \leq \mu_A(x_j) + f_A(x_j) \leq 1$. 此外, $\pi(x_j) = 1 - \mu_A(x_j) - f_A(x_j)$ 表示 X 中元素 x_j 属于 X 的犹豫度.

收稿日期: 2006-04-09; 修回日期: 2006-05-25.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70571087); 国家杰出青年科学基金项目(70625005).

作者简介: 张洪美(1980—), 女, 江苏徐州人, 硕士生, 从事信息融合研究; 徐泽水(1968—), 男, 安徽南陵人, 教授, 博士生导师, 从事信息融合与决策分析等研究.

若利用隶属函数 t_A 表示 μ_A 的下限,则元素 x_j 属于 A 的隶属度包含于 $[0,1]$ 的子区间 $[t_A(x_j),1-f_A(x_j)]$ 之中. Gau 和 Buehrer[8] 称区间 $[t_A(x_j),1-f_A(x_j)]$ 为 vague 值. 然而,Bustince 和 Burillo[9] 论证了 vague 集等价于直觉模糊集. 因此,Xu 和 Yager[10] 称 $[t_A(x_j),1-f_A(x_j)]$ 为直觉模糊数,且将直觉模糊集记为 $A=\{\langle x_j,[t_A(x_j),1-f_A(x_j)]\rangle \mid x_j\in X\}$. 对直觉模糊数 $[t_A(x_j),1-f_A(x_j)]$ 可进行物理阐述,例如:若 $[t_A(x),1-f_A(x)]=[0.3,0.8]$,则 $t_A(x_j)=0.3, 1-f_A(x_j)=0.8, f_A(x_j)=0.2$. 其物理意义为"对于某一项方案,有 10 人参加投票,投票结果为 3 人赞成,2 人反对,5 人弃权".

定义 2[2]　设 $A=\{\langle x_j,[t_A(x_j),1-f_A(x_j)]\rangle \mid x_j\in X\}$ 和 $B=\{\langle x_j,[t_B(x_j),1-f_B(x_j)]\rangle \mid x_j\in X\}$ 为集合 X 上的两个直觉模糊集,则:

1) $A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x_j\in X, t_A(x_j)\le t_B(x_j)$ 且 $1-f_A(x_j)\le 1-f_B(x_j)$;

2) $A=B \Leftrightarrow \forall x_j\in X, t_A(x_j)=t_B(x_j)$ 且 $1-f_A(x_j)=1-f_B(x_j)$;

3) $A\cap B=\{\langle x_j,[t_A(x_j)\wedge t_B(x_j),(1-f_A(x_j))\wedge(1-f_B(x_j))]\rangle \mid x_j\in X\}$;

4) $A\cup B=\{\langle x_j,[(t_A(x_j)\vee t_B(x_j),(1-f_A(x_j))\vee(1-f_B(x_j))]\rangle \mid x_j\in X\}$.

定义 3[11]　设 $\tilde a=[t_{\tilde a},1-f_{\tilde a}]$ 和 $\tilde b=[t_{\tilde b},1-f_{\tilde b}]$ 为两个直觉模糊数,则:

1) $\tilde a\wedge\tilde b=[t_{\tilde a}\wedge t_{\tilde b},(1-f_{\tilde a})\wedge(1-f_{\tilde b})]$;

2) $\tilde a\vee\tilde b=\{t_{\tilde a}\vee t_{\tilde b},(1-f_{\tilde a})\vee(1-f_{\tilde b})]$.

3　主要结果

根据定义 3,可得如下定理:

定理 1　设 $\tilde a=[t_{\tilde a},1-f_{\tilde a}]$, $\tilde b=[t_{\tilde b},1-f_{\tilde b}]$ 和 $\tilde c=[t_{\tilde c},1-f_{\tilde c}]$ 均为直觉模糊数,则:

1) $(\tilde a\vee\tilde b)\wedge\tilde c=(\tilde a\wedge\tilde c)\vee(\tilde b\wedge\tilde c)$;

2) $(\tilde a\wedge\tilde b)\vee\tilde c=(\tilde a\vee\tilde c)\wedge(\tilde b\vee\tilde c)$;

3) $(\tilde a\vee\tilde b)\vee\tilde c=\tilde a\vee(\tilde b\vee\tilde c)$;

4) $(\tilde a\wedge\tilde b)\wedge\tilde c=\tilde a\wedge(\tilde b\wedge\tilde c)$.

在模糊数学中,具有自反性和对称性的相似矩阵是一种常见的矩阵. 下面将相似矩阵引入直觉模糊集理论中. 首先定义直觉模糊相似度的概念:

定义 4　设 S: IFSs$(X)\times$IFSs$(X)\to$IFN,其中,IFSs 为所有直觉模糊集的集合,IFN 为直觉模糊数的集合,且设 $A,B,C\in$ IFSs(X),若 $S(A,B)$ 满足下列性质:

1) $S(A,B)$ 是直觉模糊数;

2) $S(A,B)=[1,1]\Leftrightarrow A=B$;

3) $S(A,B)=S(B,A)$;

4) 如果 $A\subseteq B\subseteq C$,则 $S(A,C)\subseteq S(A,B)$ 且 $S(A,C)\subseteq S(B,C)$.

则称 $S(A,B)$ 为 A 和 B 的直觉模糊相似度.

文献[12]给出了直觉模糊集 A 和 B 的相似度公式

$$\rho_w(A,B)=1-\Big[\sum_{i=1}^{n}w_i[\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p]\Big]^{1/p}. \qquad (1)$$

其中: $1<p<+\infty$; $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm T}$, $w_i\in[0,1]$, $\sum_{i=1}^{n}w_i=1$; $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1]$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=1$.

式(1)既对每个直觉模糊数偏差进行加权,又对相应的隶属度偏差、非隶属度偏差以及犹豫度偏差进行加权,因而具有较高的灵活性. 若将 $\rho_w(A,B)$ 看成 w 的函数,则它为一个有界函数. 令

$$h(w)=\sum_{i=1}^{n}w_i[\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p],$$

则求 $\rho_w(A,B)$ 的最大值与最小值的问题,可转化为求 $h(w)$ 的最小值与最大值的问题. 因为

$$h(w)=\sum_{i=1}^{n}w_i[\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p]\le \max_i\{\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\},$$

必然存在一个 k 使得

$$\max_i\{\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\}=\alpha|t_A(x_k)-t_B(x_k)|^p+\beta|f_A(x_k)-f_B(x_k)|^p+\gamma|\pi_A(x_k)-\pi_B(x_k)|^p,$$

所以当 $w_k=1$ 且 $w_i=0, i\ne k$ 时等号成立. 又因为

$$h(w)=\sum_{i=1}^{n}w_i[\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p]\ge \min_i\{\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\},$$

必然存在一个 l 使得

$$\min_i\{\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\}=\alpha|t_A(x_l)-t_B(x_l)|^p+\beta|f_A(x_l)-f_B(x_l)|^p+\gamma|\pi_A(x_l)-\pi_B(x_l)|^p,$$

所以当 $w_l=1$ 且 $i\neq l, w_i=0$ 时等号成立. 令

$$h_*(A,B)=\min_i\{\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\},\tag{2}$$

$$h^*(A,B)=\max_i\{\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\},\tag{3}$$

因此

$$1-\sqrt[p]{h^*(A,B)}\leq\rho_w(A,B)\leq 1-\sqrt[p]{h_*(A,B)}.$$

基于式(2) 和(3) ,给出如下一个新的相似度公式:

定理 2 设 A 和 B 是两个直觉模糊集,则 $S(A,B)=[1-\sqrt[p]{h^*(A,B)},1-\sqrt[p]{h_*(A,B)}]$ 为 A 和 B 的直觉模糊相似度.

证明 1) 先证 $S(A,B)$ 为直觉模糊数的形式. 因为 $\alpha+\beta+\gamma=1$,且 $\forall i$,有

$$0\leq\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\leq(\alpha+\beta+\gamma)\max\{|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p,|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p,|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\}=\max\{|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p,|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p,|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\}\leq 1,$$

所以 $0\leq 1-\sqrt[p]{h^*(A,B)}\leq 1$. 同理可证 $0\leq 1-\sqrt[p]{h_*(A,B)}\leq 1$. 又因为 $0\leq h_*(A,B)\leq h^*(A,B)\leq 1$,所以 $0\leq\sqrt[p]{h^*(A,B)}-\sqrt[p]{h_*(A,B)}\leq 1$,即

$$0\leq 1-\sqrt[p]{h^*(A,B)}+\sqrt[p]{h_*(A,B)}=1-(\sqrt[p]{h^*(A,B)}-\sqrt[p]{h_*(A,B)})\leq 1.$$

故 $S(A,B)$ 为直觉模糊数.

2) 显然有 $S(A,B)=S(B,A)$.

3) 若 $S(A,B)=[1,1]$,则 $1-\sqrt[p]{h^*(A,B)}=1,1-\sqrt[p]{h_*(A,B)}=1$. 又因为

$$1=1-\sqrt[p]{h^*(A,B)}\leq\rho_w(A,B)\leq 1-\sqrt[p]{h_*(A,B)}=1,$$

即 $\rho_w(A,B)=1$,由式(1) 知 $A=B$. 反之,若 $A=B$,则由式(2) 和(3) ,即得 $S(A,B)=[1,1]$.

4) 如果 $A\subseteq B\subseteq C$,即 $t_A\leq t_B\leq t_C, f_A\geq f_B\geq f_C$,则 $\forall i$,有

$$|t_A(x_i)-t_B(x_i)|\leq|t_A(x_i)-t_C(x_i)|,$$
$$|f_A(x_i)-f_B(x_i)|\leq|f_A(x_i)-f_C(x_i)|,$$
$$|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|=|t_B(x_i)-t_A(x_i)+f_B(x_i)-f_A(x_i)|=t_B(x_i)-t_A(x_i)+f_B(x_i)-f_A(x_i)\leq t_C(x_i)-t_A(x_i)+f_C(x_i)-f_A(x_i)=|t_C(x_i)-t_A(x_i)+f_C(x_i)-f_A(x_i)|\leq|\pi_A(x_i)-\pi_C(x_i)|,$$

因此

$$h^*(A,B)=\max_i\{\alpha|t_A(x_i)-t_B(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_B(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_B(x_i)|^p\}\leq\max_i\{\alpha|t_A(x_i)-t_C(x_i)|^p+\beta|f_A(x_i)-f_C(x_i)|^p+\gamma|\pi_A(x_i)-\pi_C(x_i)|^p\}=h^*(A,C),$$

则 $1-\sqrt[p]{h^*(A,C)}\leq 1-\sqrt[p]{h^*(A,B)}$. 同理可证 $1-\sqrt[p]{h_*(A,C)}\leq 1-\sqrt[p]{h_*(A,B)}$. 因此 $S(A,C)\subseteq S(A,B)$. □

定义 5 设矩阵 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$,若 $\tilde{r}_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 均为直觉模糊数,则称 $\tilde{R}$ 为直觉模糊矩阵.

定义 6 设 $\tilde{Q}=(\tilde{q}_{ij})_{n\times n}$ 和 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 是直觉模糊矩阵,若 $\tilde{S}=\tilde{Q}\circ\tilde{R}=(\tilde{s}_{ij})_{n\times n}$,则称 $\tilde{S}$ 是 $\tilde{Q}$ 和 $\tilde{R}$ 的合成矩阵,其中

$$\tilde{s}_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(\tilde{q}_{ik}\wedge\tilde{r}_{kj})=\left[\bigvee_{k=1}^{n}(t_{\tilde{q}_{ik}}\wedge t_{\tilde{r}_{kj}}),\bigvee_{k=1}^{n}((1-f_{\tilde{q}_{ik}})\wedge(1-f_{\tilde{r}_{kj}}))\right].$$

基于定义 6,易知:

定理 3 直觉模糊矩阵 $\tilde{Q}$ 和 $\tilde{R}$ 的合成矩阵 $\tilde{S}$ 仍为直觉模糊矩阵.

定义 7 若直觉模糊矩阵 $\tilde{R}=(\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 满足下列条件:

1) 自反性

$$\tilde{r}_{ii}=[1,1],\ i=1,2,\cdots,n;$$

2) 对称性

$$\tilde{r}_{ij}=\tilde{r}_{ji},\text{即 } t_{\tilde{r}_{ij}}=t_{\tilde{r}_{ji}}, f_{\tilde{r}_{ij}}=f_{\tilde{r}_{ji}},\quad i,j=1,2,\cdots,n.$$

则称 $\tilde{R}$ 为直觉模糊相似矩阵.

基于定理 3 和定义 7 可得如下推论:

推论 1　直觉模糊相似矩阵的合成矩阵为直觉模糊矩阵.

直觉模糊相似矩阵的合成矩阵不一定为直觉模糊相似矩阵.然而,当直觉模糊相似矩阵与其自身合成时,所得的合成矩阵仍为直觉模糊相似矩阵,即有如下定理:

定理 4　设 $\tilde{R}$ 为直觉模糊相似矩阵,则合成矩阵 $\tilde{S} = \tilde{R} \circ \tilde{R}$ 也为直觉模糊相似矩阵.

定理 5　设 $\tilde{Q}, \tilde{R}$ 和 $\tilde{H}$ 是直觉模糊相似矩阵,则其合成运算满足结合律 $(\tilde{Q} \circ \tilde{R}) \circ \tilde{H} = \tilde{Q} \circ (\tilde{R} \circ \tilde{H})$.

推论 2　设 $\tilde{R}$ 是直觉模糊相似矩阵,则对任意正整数 m_1, m_2,有 $\tilde{R}^{m_1+m_2} = \tilde{R}^{m_1} \circ \tilde{R}^{m_2}$,其中,$\tilde{R}^{m_1}$ 和 $\tilde{R}^{m_2}$ 分别表示 $\tilde{R}$ 的 m_1 和 m_2 次合成,且 $\tilde{R}^{m_1}$, $\tilde{R}^{m_2}$ 和其合成矩阵 $\tilde{R}^{m_1+m_2}$ 均为直觉模糊相似矩阵.

定义 8　若直觉模糊矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 满足下列条件:

1) 自反性

$$\tilde{r}_{ii} = [1,1],\ i = 1,2,\cdots,n;$$

2) 对称性

$$\tilde{r}_{ij} = \tilde{r}_{ji}, \text{即 } t_{\tilde{r}_{ij}} = t_{\tilde{r}_{ji}}, f_{\tilde{r}_{ij}} = f_{\tilde{r}_{ji}},\quad i,j = 1,2,\cdots,n;$$

3) 传递性

$$\tilde{R}^2 \subseteq \tilde{R}, \text{即 } \bigvee_{k=1}^{n}(t_{\tilde{r}_{ik}} \wedge t_{\tilde{r}_{kj}}) \le t_{\tilde{r}_{ij}},$$

$$\bigvee_{k=1}^{n}((1 - f_{\tilde{r}_{ik}}) \wedge (1 - f_{\tilde{r}_{kj}})) \le 1 - f_{\tilde{r}_{ij}},$$

$$i,j = 1,2,\cdots,n.$$

则称 $\tilde{R}$ 为直觉模糊等价矩阵.

为节省计算量,类似文献[7]的思路,可得下列结论:

定理 6　设 $\tilde{R}$ 为直觉模糊相似矩阵,则 $R \to R^2 \to R^4 \to \cdots \to R^{2^k} \to \cdots$ 经过有限次运算后,必有 $R^{2^k} = R^{2^{k+1}}$,且 R^{2^k} 为直觉模糊等价矩阵.

定义 9　设 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 为直觉模糊相似矩阵,其中 $\tilde{r}_{ij} = [t_{\tilde{r}_{ij}}, 1 - f_{\tilde{r}_{ij}}]$, $i,j = 1,2,\cdots,n$,则称 $\tilde{R}_\lambda = ({}_\lambda\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 为 $\tilde{R}$ 的 λ- 截矩阵,其中

$$ {}_\lambda\tilde{r}_{ij} = \begin{cases} 0, & 1 - f_{\tilde{r}_{ij}} < \lambda; \\ 1/2, & t_{\tilde{r}_{ij}} < \lambda \le 1 - f_{\tilde{r}_{ij}}; \\ 1, & t_{\tilde{r}_{ij}} \ge \lambda \end{cases} \tag{4}$$

定义 10[7]　若矩阵 $\dot{R} = (\dot{r}_{ij})_{n\times n}$ 满足下列条件:

1) 自反性

$$\dot{r}_{ii} = 1, i = 1,2,\cdots,n,$$

且 $\forall \dot{r}_{ij} \in [0,1]$, $i,j = 1,2,\cdots,n$;

2) 对称性

$$\dot{r}_{ij} = \dot{r}_{ji};$$

3) 传递性

$$\bigvee_{k=1}^{n}(\dot{r}_{ik} \wedge \dot{r}_{kj}) \le \dot{r}_{ij},\ i,j = 1,2,\cdots,n.$$

则称 $\dot{R}$ 为模糊等价矩阵.

定理 7　$\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 为直觉模糊等价矩阵的充分必要条件是它的 λ- 截矩阵 $\tilde{R}_\lambda = ({}_\lambda\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 为模糊等价矩阵,其中,$\tilde{r}_{ij} = [t_{\tilde{r}_{ij}}, 1 - f_{\tilde{r}_{ij}}]$, $i,j = 1,2,\cdots,n$.

证明　先证必要性.

1) 自反性. 因为 $\tilde{r}_{ii} = [1,1]$, $\lambda \in [0,1]$,所以 $\lambda \le t_{\tilde{r}_{ii}} = 1$, ${}_\lambda\tilde{r}_{ii} = 1$.

2) 对称性. 因为 $\tilde{r}_{ij} = \tilde{r}_{ji}$,即 $t_{\tilde{r}_{ij}} = t_{\tilde{r}_{ji}}$, $1 - f_{\tilde{r}_{ij}} = 1 - f_{\tilde{r}_{ji}}$,所以 ${}_\lambda\tilde{r}_{ij} = {}_\lambda\tilde{r}_{ji}$.

3) 传递性. 因为 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 是直觉模糊等价矩阵,所以

$$\bigvee_{k=1}^{n}(t_{\tilde{r}_{ik}} \wedge t_{\tilde{r}_{kj}}) \le t_{\tilde{r}_{ij}},$$

$$\bigvee_{k=1}^{n}((1 - f_{\tilde{r}_{ik}}) \wedge (1 - f_{\tilde{r}_{kj}})) \le 1 - f_{\tilde{r}_{ij}}.$$

又因为直觉模糊等价矩阵 $\tilde{R} = (\tilde{r}_{ij})_{n\times n}$ 与其自身的合成矩阵为直觉模糊矩阵,所以

$$\bigvee_{k=1}^{n}(t_{\tilde{r}_{ik}} \wedge t_{\tilde{r}_{kj}}) \le \bigvee_{k=1}^{n}((1 - f_{\tilde{r}_{ik}}) \wedge (1 - f_{\tilde{r}_{kj}})).$$

①当 $\lambda \le t_{\tilde{r}_{ij}}$ 时, ${}_\lambda\tilde{r}_{ij} = 1$, 且因为 $\bigvee_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde{r}_{ik} \wedge {}_\lambda\tilde{r}_{kj}) \in [0,1]$,所以 $\bigvee_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde{r}_{ik} \wedge {}_\lambda\tilde{r}_{kj}) \le {}_\lambda\tilde{r}_{ij} = 1$.

②当 $1 - f_{\tilde{r}_{ij}} < \lambda$ 时, ${}_\lambda\tilde{r}_{ij} = 0$,且因为 $\bigvee_{k=1}^{n}((1 - f_{\tilde{r}_{ik}}) \wedge 1 - f_{\tilde{r}_{kj}})) \le 1 - f_{\tilde{r}_{ij}} < \lambda$,所以 $\forall k$,有 $(1 - f_{\tilde{r}_{ik}} \wedge 1 - f_{\tilde{r}_{kj}}) < \lambda$,即 $\forall k$, ${}_\lambda\tilde{r}_{ik} \wedge {}_\lambda\tilde{r}_{kj} = 0$,则 $\bigvee_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde{r}_{ik} \wedge {}_\lambda\tilde{r}_{kj}) = 0$,所以 $\bigvee_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde{r}_{ik} \wedge {}_\lambda\tilde{r}_{kj}) \le {}_\lambda\tilde{r}_{ij}$.

③当 $t_{\tilde{r}_{ij}} < \lambda \le 1 - f_{\tilde{r}_{ij}}$ 时,有 ${}_\lambda\tilde{r}_{ij} = 1/2$. 此时,若 $\bigvee_{k=1}^{n}((1 - f_{\tilde{r}_{ik}}) \wedge (1 - f_{\tilde{r}_{kj}})) \le t_{\tilde{r}_{ij}} < \lambda$,则由②得 $\bigvee_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde{r}_{ik} \wedge {}_\lambda\tilde{r}_{kj}) = 0$. 故 $\bigvee_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde{r}_{ik} \wedge {}_\lambda\tilde{r}_{kj}) \le {}_\lambda\tilde{r}_{ij}$;若 $\bigvee_{k=1}^{n}(t_{\tilde{r}_{ik}} \wedge t_{\tilde{r}_{kj}}) \le \lambda \le \bigvee_{k=1}^{n}((1 - f_{\tilde{r}_{ik}}) \wedge (1 - f_{\tilde{r}_{kj}}))$,则 $\bigvee_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde{r}_{ik} \wedge {}_\lambda\tilde{r}_{kj}) = 1/2$, $\bigvee_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde{r}_{ik} \wedge {}_\lambda\tilde{r}_{kj}) = {}_\lambda\tilde{r}_{ij}$. 由已知条件知 $\bigvee_{k=1}^{n}(t_{\tilde{r}_{ik}} \wedge t_{\tilde{r}_{kj}}) \le t_{\tilde{r}_{ij}} < \lambda$,这说明 $\lambda \le \bigvee_{k=1}^{n}(t_{\tilde{r}_{ik}} \wedge t_{\tilde{r}_{kj}})$ 的情形不存在. 因此,当 $t_{\tilde{r}_{ij}} < \lambda \le$

$1-f_{\tilde r_{ij}}$ 时，有 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj})\leq{}_\lambda\tilde r_{ij}$，所以 $\tilde R_\lambda=({}_\lambda\tilde r_{ij})_{n\times n}$ 满足传递性.

下面证明充分性.

1) 自反性. 因为 ${}_\lambda\tilde r_{ii}=1$，所以 $\forall\lambda\in[0,1]$，$\lambda\leq t_{\tilde r_{ii}}$，令 $\lambda=1$，则 $\tilde r_{ii}=[1,1]$.

2) 对称性. 因为 $\forall i,k$，${}_\lambda\tilde r_{ik}={}_\lambda\tilde r_{ki}$，若存在 $\tilde r_{ik}\neq\tilde r_{ki}$，即 $t_{\tilde r_{ik}}\neq t_{\tilde r_{ki}}$ 或 $1-f_{\tilde r_{ij}}\neq 1-f_{\tilde r_{ji}}$，不妨假定 $t_{\tilde r_{ij}}<t_{\tilde r_{ji}}$，且令 $\lambda=(t_{\tilde r_{ij}}+t_{\tilde r_{ji}})/2$，则 $t_{\tilde r_{ij}}<\lambda<t_{\tilde r_{ji}}$，${}_\lambda\tilde r_{ik}=0$ 或 $1/2$，而 ${}_\lambda\tilde r_{ki}=1$，${}_\lambda\tilde r_{ik}\neq{}_\lambda\tilde r_{ki}$，这与已知矛盾. 故 $\tilde R=(\tilde r_{ij})_{n\times n}$ 是对称的.

3) 传递性. 因为 $\forall i,j$，$\bigvee\limits_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj})\leq{}_\lambda\tilde r_{ij}$，且 $\tilde R_\lambda$ 上的各元素均在 $\{0,1/2,1\}$ 上取值，故：

①当 ${}_\lambda\tilde r_{ij}=1$ 时，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，$t_{\tilde r_{ij}}\geq\lambda$，取 $\lambda=1$ 得 $t_{\tilde r_{ij}}=1$，$1-f_{\tilde r_{ij}}=1$，所以

$$\bigvee_{k=1}^{n}(t_{\tilde r_{ik}}\wedge t_{\tilde r_{kj}})\leq t_{\tilde r_{ij}},$$

$$\bigvee_{k=1}^{n}((1-f_{\tilde r_{ik}})\wedge(1-f_{\tilde r_{kj}}))\leq 1-f_{\tilde r_{ij}}.$$

②当 ${}_\lambda\tilde r_{ij}=1/2$ 时，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，$t_{\tilde r_{ij}}<\lambda\leq 1-f_{\tilde r_{ij}}$. 又因为 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj})\leq 1/2$，则 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj})=0$ 或 $1/2$，所以 $\forall k$，${}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj}=0$ 或 $\exists l$，使得 ${}_\lambda\tilde r_{il}\wedge{}_\lambda\tilde r_{lj}=1/2$.

情形1 若 $\forall k$，${}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj}=0$，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，$(1-f_{\tilde r_{ik}})\wedge(1-f_{\tilde r_{kj}})<\lambda$ 故 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}((1-f_{\tilde r_{ik}})\wedge(1-f_{\tilde r_{kj}}))<\lambda\leq 1-f_{\tilde r_{ij}}$. 考虑到 λ 的任意性，当 λ 趋于无限小时，有 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}(t_{\tilde r_{ik}}\wedge t_{\tilde r_{kj}})\leq\bigvee\limits_{k=1}^{n}((1-f_{\tilde r_{ik}})\wedge(1-f_{\tilde r_{kj}}))=0$，因此 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}(t_{\tilde r_{ik}}\wedge t_{\tilde r_{kj}})\leq t_{\tilde r_{ij}}$.

情形2 若 $\exists l$，使得 ${}_\lambda\tilde r_{il}\wedge{}_\lambda\tilde r_{lj}=1/2$，且令 $\forall k\neq l$，${}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj}=0$，则由情形1得 $\bigvee\limits_{k=1,k\neq l}^{n}((1-f_{\tilde r_{ik}})\wedge(1-f_{\tilde r_{kj}}))\leq 1-f_{\tilde r_{ij}}$，$\bigvee\limits_{k=1,k\neq l}^{n}(t_{\tilde r_{ik}}\wedge t_{\tilde r_{kj}})\leq t_{\tilde r_{ij}}$. 而当 $k=l$ 时，假如 $t_{\tilde r_{il}}\wedge t_{\tilde r_{lj}}=t_{\tilde r_{il}}$，$t_{\tilde r_{il}}>t_{\tilde r_{ij}}$，则令 $\lambda=(t_{\tilde r_{ij}}+t_{\tilde r_{il}})/2$，因此 $t_{\tilde r_{ij}}\leq\lambda\leq t_{\tilde r_{il}}$，从而 ${}_\lambda r_{il}={}_\lambda r_{lj}=1$，${}_\lambda r_{il}\wedge{}_\lambda r_{lj}=1$，$\bigvee\limits_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj})=1>{}_\lambda\tilde r_{ij}$，这与已知矛盾，因此 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}(t_{\tilde r_{ik}}\wedge t_{\tilde r_{kj}})$. 同理可得 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}((1-f_{\tilde r_{ik}})\wedge(1-f_{\tilde r_{kj}}))\leq 1-f_{\tilde r_{ij}}$.

③当 ${}_\lambda\tilde r_{ij}=0$ 时，即 $\forall\lambda\in[0,1]$，$1-f_{\tilde r_{ij}}<\lambda$，由 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}({}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj})\leq{}_\lambda\tilde r_{ij}=0$，得 $\forall k$，${}_\lambda\tilde r_{ik}\wedge{}_\lambda\tilde r_{kj}=0$，$(1-f_{\tilde r_{ik}})\wedge(1-f_{\tilde r_{kj}})<\lambda$，考虑到 λ 的任意性，得 $t_{\tilde r_{ij}}=1-f_{\tilde r_{ij}}=0$，且 $\bigvee\limits_{k=1}^{n}(t_{\tilde r_{ik}}\wedge t_{\tilde r_{kj}})\leq\bigvee\limits_{k=1}^{n}((1-f_{\tilde r_{ik}})\wedge(1-f_{\tilde r_{kj}}))=0$. 故 $\tilde R$ 满足传递性.

综上所述，定理 7 的充分性成立，故定理亦成立. □

定义 11 设 $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为一组直觉模糊集，$\tilde R=(\tilde r_{ij})_{n\times n}$ 为由定理 2 中相似度公式得到的直觉模糊相似矩阵，$\tilde R^*=(\tilde r^*_{ij})_{n\times n}$ 为 $\tilde R$ 的直觉模糊等价矩阵，${}_\lambda\tilde R^*=({}_\lambda\tilde r^*_{ij})_{n\times n}$ 为 $\tilde R^*$ 的 λ-截矩阵，若 ${}_\lambda\tilde R^*$ 的第 i 行(列) 和第 j 行(列) 中各对应元素均相等，则称 A_i 和 A_j 同类.

注 1 由于 λ-截矩阵 ${}_\lambda\tilde R^*$ 具有传递性，若 A_i 和 A_k 同类且 A_k 和 A_j 同类，则 A_i 和 A_j 同类.

基于上述理论，下面给出直觉模糊集的一种聚类方法，具体步骤如下：

Step1 对于某一多属性决策问题，设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为方案集，$G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$ 为属性集. 假设有关方案 A_j 的特征信息(属性值) 用直觉模糊集表示 $A_j=\{\langle G_i,[t_{A_j}(G_i),1-f_{A_j}(G_i)]\rangle\mid G_i\in G\}$，$j=1,2,\cdots,n$. 其中：$t_{A_j}(G_i)$ 表示方案 A_j 对属性 G_i 的满足程度，$f_{A_j}(G_i)$ 表示方案 A_j 不满足属性 G_i 的程度，$\pi_{A_j}(G_i)=1-t_{A_j}(G_i)-f_{A_j}(G_i)$ 表示方案 A_j 对属性 G_i 的不确定度. 根据直觉模糊相似度公式建立直觉模糊相似矩阵 $\tilde R=(\tilde r_{ij})_{n\times n}$. 其中

$$\tilde r_{ij}=S(A_i,A_j)=$$
$$[1-\sqrt[p]{h^*(A_i,A_j)},1-\sqrt[p]{h_*(A_i,A_j)}],$$
$$i,j=1,2,\cdots,n;$$
$$h_*(A_i,A_j)=$$
$$\min_k\{\alpha|t_{A_i}(G_k)-t_{A_j}(G_k)|^p+$$
$$\beta|f_{A_i}(G_k)-f_{A_j}(G_k)|^p+$$
$$\gamma|\pi_{A_i}(G_k)-\pi_{A_j}(G_k)|^p\};$$
$$h^*(A_i,A_j)=$$
$$\max_k\{\alpha|t_{A_i}(G_k)-t_{A_j}(G_k)|^p+$$
$$\beta|f_{A_i}(G_k)-f_{A_j}(G_k)|^p+$$
$$\gamma|\pi_{A_i}(G_k)-\pi_{A_j}(G_k)|^p\};$$

且 p,α,β,γ 为事先给定的参数，且 $1<p<+\infty$，$\alpha,\beta,\gamma\in[0,1]$，$\alpha+\beta+\gamma=1$.

Step2 检验直觉模糊矩阵 $\tilde R$ 是否为直觉模糊等价矩阵(也即检验是否满足 $\tilde R^2\subseteq\tilde R$)，否则进行合成运算 $\tilde R\to\tilde R^2\to\tilde R^4\to\cdots\to\tilde R^{2^k}\to\cdots$，直到 $\tilde R^{2^k}=\tilde R^{2^{k+1}}$，于是 $\tilde R^{2^k}$ 即为所求的直觉模糊等价矩阵. 为方

便起见,不妨记 $\widetilde{R}^{*}=(\overrightarrow{r_{ij}})_{n\times n}$ 为所求的直觉模糊等价矩阵,其中,$\overrightarrow{r_{ij}}=[t_{\tilde{r}_{ij}^{*}},1-f_{\tilde{r}_{ij}^{*}}],i,j=1,2,\cdots,n$.

Step3　对于给定的置信水平 λ,由式(4) 计算出直觉模糊等价矩阵 $\widetilde{R}_{*}$ 的 λ- 截矩阵 ${}_{\lambda}\widetilde{R}^{*}=(\lambda\overrightarrow{r_{ij}})_{n\times n}$.

Step4　依据 λ- 截矩阵 ${}_{\lambda}\widetilde{R}^{*}$ 及定义 11 对方案进行聚类.

4　算例分析

某汽车市场欲对 5 种不同的车 $A_j(j=1,2,\cdots,5)$ 进行分类,每辆车有 6 个可供评价的因素:燃料消耗量(G_1),摩擦度(G_2),价格(G_3),舒适度(G_4),设计(G_5),安全性(G_6). 每辆车在各评价因素(属性)下的特征信息用直觉模糊数表示,见表 1.

表 1　特征信息

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
G_1	[0.3,0.5]	[0.6,0.7]	[0.4,0.6]	[0.2,0.6]	[0.5,0.8]
G_2	[0.6,0.9]	[0.5,0.8]	[0.8,0.9]	[0.4,0.9]	[0.3,0.4]
G_3	[0.4,0.7]	[0.6,0.9]	[0.5,0.9]	[0.9,1]	[0.6,0.7]
G_4	[0.8,0.9]	[0.7,0.9]	[0.6,0.8]	[0.8,0.9]	[0.7,0.9]
G_5	[0.1,0.4]	[0.3,0.4]	[0.4,0.5]	[0.2,0.5]	[0.6,0.8]
G_6	[0.5,0.6]	[0.4,0.7]	[0.3,0.8]	[0.7,0.9]	[0.5,0.7]

Step1　根据表 1 中的特征信息以及定理 2 中相似度公式建立直觉模糊相似矩阵(不妨令 $p=2,\alpha=\beta=\gamma=1/3$)

$$\widetilde{R}=\begin{bmatrix}[1,1] & [0.78,0.92] & [0.72,0.92] & [0.64,1] & [0.63,0.92]\\ [0.78,0.92] & [1,1] & [0.78,0.92] & [0.71,0.92] & [0.71,1]\\ [0.72,0.92] & [0.78,0.92] & [1,1] & [0.69,0.86] & [0.59,0.92]\\ [0.64,1] & [0.71,0.92] & [0.67,0.86] & [1,1] & [0.63,0.92]\\ [0.63,0.92] & [0.71,1] & [0.59,0.92] & [0.63,0.92] & [1,1]\end{bmatrix}.$$

Step2　计算

$$\widetilde{R}^{2}=\widetilde{R}\circ\widetilde{R}=\begin{bmatrix}[1,1] & [0.78,0.92] & [0.78,0.92] & [0.71,1] & [0.71,0.92]\\ [0.78,0.92] & [1,1] & [0.78,0.92] & [0.71,0.92] & [0.71,1]\\ [0.78,0.92] & [0.78,0.92] & [1,1] & [0.71,0.92] & [0.71,0.92]\\ [0.71,1] & [0.71,0.92] & [0.71,0.92] & [1,1] & [0.71,0.92]\\ [0.71,0.92] & [0.71,1] & [0.71,0.92] & [0.71,0.92] & [1,1]\end{bmatrix}.$$

因为 $\widetilde{R}^{2}\neq\widetilde{R}$,所以 $\widetilde{R}$ 不是直觉模糊等价矩阵. 需进一步计算 $\widetilde{R}^{4}=\widetilde{R}^{2}\circ\widetilde{R}^{2}=\widetilde{R}^{2}$. 故 $\widetilde{R}^{2}$ 为直觉模糊等价矩阵.

Step3　由于置信水平 λ 取值仅与直觉模糊等价矩阵 $\widetilde{R}^{*}=\widetilde{R}^{2}=(\overrightarrow{r_{ij}})_{5\times5}$ 中各元素 $\overrightarrow{r_{ij}}=[t_{\tilde{r}_{ij}^{*}},1-f_{\tilde{r}_{ij}^{*}}]$ 的上限 $1-f_{\tilde{r}_{ij}^{*}}$ 和下限 $t_{\tilde{r}_{ij}^{*}}$ 有关,所以可取 $\widetilde{R}^{*}$ 中各元素的上下限作为其 λ- 截矩阵 ${}_{\lambda}\widetilde{R}^{*}$ 中置信水平 λ 的界限值进行讨论:

1) 当 $\lambda\leq0.71$ 时,有

$${}_{\lambda}\widetilde{R}^{*}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\\1&1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

2) 当 $0.71<\lambda\leq0.78$ 时,有

$${}_{\lambda}\widetilde{R}^{*}=\begin{bmatrix}1&1&1&1/2&1/2\\1&1&1&1/2&1/2\\1&1&1&1/2&1/2\\1/2&1/2&1/2&1&1/2\\1/2&1/2&1/2&1/2&1\end{bmatrix}.$$

3) 当 $0.78<\lambda\leq0.92$ 时,有

$${}_{\lambda}\widetilde{R}^{*}=\begin{bmatrix}1&1/2&1/2&1/2&1/2\\1/2&1&1/2&1/2&1/2\\1/2&1/2&1&1/2&1/2\\1/2&1/2&1/2&1&1/2\\1/2&1/2&1/2&1/2&1\end{bmatrix}.$$

4) 当 $0.92<\lambda\leq1$ 时,有

$${}_{\lambda}\widetilde{R}^{*}=\begin{bmatrix}1&0&0&1/2&0\\0&1&0&0&1/2\\0&0&1&0&0\\1/2&0&0&1&0\\0&1/2&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Step4　根据 ${}_{\lambda}R^{*}$ 及定义 11,可得:

1) 当 $0\leq\lambda\leq0.71$ 时,车组 $A_j(j=1,2,\cdots,5)$ 分为 1 类,即 $\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$;

2) 当 $0.71 < \lambda \leq 0.78$ 时,车组 $A_j (j = 1,2,\cdots,5)$ 分为 3 类,即 $\{A_1, A_2, A_3\}, \{A_4\}, \{A_5\}$;

3) 当 $0.78 < \lambda \leq 1$ 时,车组 $A_j (j = 1,2,\cdots,5)$ 分为 5 类,即 $\{A_1\}, \{A_2\}, \{A_3\}, \{A_4\}, \{A_5\}$.

从上述分析可知,方案(或直觉模糊集) 的聚类与给定的置信水平 λ 有着密切的关系. 而对于如何选取置信水平 λ 的研究,可参阅文献[7],限于篇幅,这里不再赘述.

5 结 语

自 Atanassov[2] 提出直觉模糊集以来,国内外尚没有文献对直觉模糊集的聚类问题进行研究. 本文对该类问题进行了初步探讨,定义了直觉模糊相似度、直觉模糊相似矩阵和直觉模糊等价矩阵等新概念;给出了直觉模糊相似矩阵的合成运算法则,以及直觉模糊相似矩阵转化为直觉模糊等价矩阵的途径;此外,还分别定义了直觉模糊相似矩阵和直觉模糊等价矩阵的 λ-截矩阵,并给出了直觉模糊矩阵为直觉模糊等价矩阵的一个充分必要条件;进而基于直觉模糊等价矩阵的 λ-截矩阵,给出了一种简便易行的直觉模糊聚类方法. 该方法在医疗诊断、模式识别等诸多领域将有着良好的应用前景.

参考文献(References)

[1] Zadeh L A. Fuzzy sets[J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-356.

[2] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87-96.

[3] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets: Theory and applications[M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 1999.

[4] Bustince H, Herrera F, Montero J. Fuzzy sets and their extensions: Representation, aggregation and models [M]. Heidelberg: Physica-Verlag, 2007.

[5] 樊治平, 于春海, 尤天慧. 一种基于三角模糊数多指标信息的 FCM 聚类算法[J]. 控制与决策, 2004, 19 (12): 1407-1411.
(Fan Zhi-ping, Yu Chun-hai, You Tian-hui. An FCM clustering algorithm for multiple attribute information with triangular fuzzy numbers[J]. Control and Decision, 2004, 19(12): 1407-1411.)

[6] Christopher J, Burges C. A tutorial on support vector machines for pattern recognition[J]. Data Mining and Knowledge Discovery, 1998, 2(2): 121-167.

[7] 汪培庄. 模糊集合论及其应用 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1983.
(Wang Pei-zhuang. Fuzzy sets: Theory and applications [M]. Shanghai: Shanghai Scientific and Technical Publishers, 1983.)

[8] Gau W L, Buehrer D J. Vague Sets[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1993, 23(2): 610-614.

[9] Bustince H, Burillo P. Vague sets are intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1996, 79(3): 403-405.

[10] Xu Z S, Yager R R. Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets[J]. Int J of General Systems, 2006, 35(4): 417-433.

[11] Chen S M, Tan J M. Handling multicriteria fuzzy decision-making problems based on vague set theory [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2): 163-172.

[12] Liu H W. New similarity measures between intuitionistic fuzzy sets and between elements [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2005, 42(1): 61-70.

(上接第 881 页)

[4] Utkin V, Guldner J, Shi J. Sliding modes in electromechanical systems [M]. London: Taylor and Francis, 1999.

[5] Edwards C, Spurgeon S. Sliding mode control [M]. Bristo: Taylor and Francis, 1998.

[6] Koshkouei A J, Burnham K J, Zinober A S I. Dynamic sliding mode control design [J]. IEE — Proc Control Theory Appllication, 2005, 152(4): 392-396.

[7] Don R Krupp, Ilya A Shkolnikov, Yuri B Shtessel. High order sliding modes in dynamic sliding manifolds: SMC design with uncertain actuator[C]. Proc of the American Control Conf. Chicago, 2000: 1124-1128.

[8] Giorgio Bartolini, Antonella Ferrara, Elio Usai, et al. On multi-input chattering-free second-order sliding mode control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45 (9): 1711-1717.

[9] Garc L G, Parra-Vega V, Arteaga M A. Higher-order sliding mode impedance bilateral teleoperation with robust state estimation under constant unknown time delay[C]. Proc of the 2005 IEEE/ASME Int Conf on Advanced Intelligent Mechatronics. California, 2005: 1293-1298.

[10] Cavallo A, Natale C. High-order sliding control of mechanical systems: Theory and experiments [J]. Control Engineering Practice, 2004 (12): 1139-1149.

[11] Low T S, Guo W. Modeling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis [J]. J of Microelectromechanical Systems, 1995, 4(4): 230-237.

[12] Arie Levant. Robust exact differentiation via sliding mode technique [J]. Automatica, 1998, 34 (3): 379-384.