第 22 卷 第 9 期 控 制 与 决 策 2007 年 9 月
Vol. 22 No. 9 Control and Decision Sep. 2007

文章编号: 1001-0920(2007)09-1032-03

# T-S 模糊系统 $H_2/H_\infty$ 混合控制器设计的 LMI 方法

刘国义, 张庆灵, 翟 丁
(东北大学 理学院, 沈阳 110004)

**摘 要**: 应用线性矩阵不等式(LMI)方法研究 T-S 模糊系统的 $H_2/H_\infty$ 混合控制器的设计问题. 首先针对 T-S 模糊系统分别设计 $H_2$ 和 $H_\infty$ 控制器;然后以线性矩阵不等式的形式给出 T-S 模糊系统 $H_2/H_\infty$ 混合控制器存在的充分条件及相应的控制器设计方法. 在给定的 $H_\infty$ 干扰约束下,通过优化 $H_2$ 控制性能指标实现了模糊状态反馈次优控制. 最后通过例子验证了所给出的 $H_2/H_\infty$ 混合控制器设计方法的可行性和有效性.

**关键词**: T-S 模糊系统; 二次稳定; $H_2/H_\infty$ 混合控制; 线性矩阵不等式
**中图分类号**: TP13 **文献标识码**: A

# LMI-based $H_2/H_\infty$ mixed controller designs for T-S fuzzy systems

*LIU Guo-yi, ZHANG Qing-ling, ZHAI Ding*
(College of Science, Northeastern University, Shenyang 110004, China. Correspondent: LIU Guo-yi, E-mail: liuguoyineu@163.com)

**Abstract**: By using the LMI methods, the problem of the design of $H_2/H_\infty$ mixed controller for T-S fuzzy systems is studied. The $H_2$ and $H_\infty$ controllers are designed respectively. Then, the sufficient condition for the existence of the $H_2/H_\infty$ mixed controller is given in term of LMIs. The fuzzy state feedback suboptimal controller is achieved by minimizing the $H_2$ control performance with the desired $H_\infty$ infinity disturbance rejection constraint. Finally, a simulation example shows the feasibility and effectiveness of the design procedures.

**Key words**: T-S fuzzy systems; Quadratic stability; $H_2/H_\infty$ mixed control; Linear matrix inequalities

## 1 引 言

在现代控制理论中,系统的 $H_2$ 优化控制虽然具有许多优良特性,但其鲁棒性较差; $H_\infty$ 控制理论虽能较好地解决系统的鲁棒性问题,但其是以损失系统的其他性能为代价[1]. $H_2/H_\infty$ 混合优化控制问题主要解决在保证系统的 $H_\infty$ 范数受限的同时,极小化系统的 $H_2$ 性能指标. 自 1989 年 Berstein 等[2]提出 $H_2/H_\infty$ 混合控制问题的设计方法,该问题就以其良好的应用实际背景而成为优化控制领域的一个热点问题,并取得了令人瞩目的结果[3-5].

T-S 模糊系统模型是通过一些模糊规则给出一个非线性系统的局部线性表示,Cao 等[6-8]已证明了 T-S 模糊系统可以任意精度逼近 $R$ 上的紧致集上的连续实函数. 近年来,许多学者对 T-S 模糊系统的 $H_\infty$ 和 $H_2$ 控制问题进行了研究,相应控制器的存在条件依赖于系统的稳定性分析. 基于 Lyapunov 方法,Tanaka 和 Sugeno[9]研究了 T-S 模糊系统的二次稳定性问题. 随后,Tanaka 等[10]给出了进一步的研究结果,所给的判定条件在一定程度上放宽了 Tanaka 和 Sugeno 给出的二次稳定性判定条件. Liu 等[11]对此问题又作了进一步的研究,其研究结果对已有的二次稳定性判定条件有了较大程度的放宽.

本文基于 LMI 方法,在文献[11]基础上研究 T-S 模糊系统的混合 $H_2/H_\infty$ 次优控制问题,给出了系统 $H_2/H_\infty$ 混合状态反馈控制器存在的充分条件和设计方法,在满足闭环系统 $H_\infty$ 范数小于给定正常数的同时,极小化闭环系统的 $H_2$ 性能指标.

## 2 系统描述

考虑如下的 T-S 模糊控制系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \sum_{i=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_{1i}\omega(t) + B_{2i}u(t)),\\ z(t) &= \sum_{i=1}^{r}\lambda_i(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t)).\end{aligned} \tag{1}$$

收稿日期: 2006-07-17; 修回日期: 2006-11-15.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60574011); 中国博士后科学基金项目(2005037758).
作者简介: 刘国义(1974—),男,辽宁锦州人,博士生,讲师,从事大系统模糊控制、广义系统鲁棒控制等研究;
张庆灵(1956—),男,辽宁营口人,教授,博士生导师,从事广义系统的分散控制、容错控制等研究.

其中：$x\in R^n$ 是状态向量，$z\in R^q$ 是输出向量，$\omega(t)\in R^l$ 是扰动向量；$A_i, B_{1i}, B_{2i}, C_i, D_i$ 是已知的适当维数的实矩阵；$\xi(t)=(\xi_1(t),\cdots,\xi_p(t))^{\mathrm T}$ 是前件变量，一般与 $u$ 相互独立；$M_{ij}$ 是模糊集.

**定义 1**　对于系统(1)，当 $\omega(t)\equiv 0, u(t)\equiv 0$ 时，若存在 $\alpha>0$ 及正定对称矩阵 $P$，使得 $\forall t>0$，$\dot V(x(t))\leq -\alpha x^{\mathrm T}(t)x(t)$，其中 $V(x(t))=x^{\mathrm T}(t)Px(t)$，则称系统(1)是二次稳定的.

**定义 2**　对一给定的常数 $\gamma>0$，如果存在状态反馈矩阵 $F_i(i=1,2,\cdots,r)$ 满足：1) 当 $\omega(t)\equiv 0$ 时，模糊系统(1)二次稳定；2) 对于给定的 $\gamma>0$，$\omega(t)\in L_2[0\ \ \infty]\neq 0$ 的情况下，不等式 $\|z\|_2<\gamma\|\omega\|_2$ 成立；则称模糊系统(2)的 $H_\infty$ 范数小于 $\gamma$. 其中 $\|x\|_2=\left(\int_0^\infty x^{\mathrm T}(t)x(t)\mathrm dx\right)^{\frac12}$ 为 $L_2$ 范数.

## 3　T-S 模糊系统的混合 $H_2/H_\infty$ 次优控制

### 3.1　T-S 模糊系统的 $H_\infty$ 控制

**定理 1**　对于给定的正数 $\lambda$，如果存在矩阵 $Z, Z_{ij}, M_i(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,r)$，其中：$Z>0$，$Z_{ii}=Z_{ii}^{\mathrm T}, Z_{ji}=Z_{ij}^{\mathrm T}, i\neq j$，满足下列线性矩阵不等式：

$$ZA_i^{\mathrm T}+A_iZ+M_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}+B_{2i}M_i+\frac{1}{\gamma^2}B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T}<Z_{ii},\tag{2}$$

$$ZA_i^{\mathrm T}+A_iZ+ZA_j^{\mathrm T}+A_jZ+M_j^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}+B_{2i}M_j+M_i^{\mathrm T}B_{2j}^{\mathrm T}+B_{2j}M_i+\frac{1}{\gamma^2}(B_{1i}B_{1j}^{\mathrm T}+B_{1j}B_{1i}^{\mathrm T})<Z_{ij}+Z_{ij}^{\mathrm T},\tag{3}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1r} & ZC_1^{\mathrm T}+(D_1M_k)^{\mathrm T}\\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ z_{r1} & \cdots & z_{rr} & ZC_r^{\mathrm T}+(D_rM_k)^{\mathrm T}\\ C_1Z+D_1M_k & \cdots & C_rZ+D_rM_k & -I\end{bmatrix}<0,$$
$$k=1,2,\cdots,r.\tag{4}$$

则状态反馈 $u(t)=\sum_{j=1}^r\lambda_j(\xi(t))F_jx(t)$ 使模糊系统(1)所产生的闭环系统的 $H_\infty$ 范数小于 $\gamma$，并且状态反馈增益矩阵 $F_i=M_iZ^{-1}$.

证明略.

### 3.2　T-S 模糊系统的 $H_2$ 优化控制

考虑如下的 $H_2$ 控制性能指标函数：

$$J_u=\int_0^\infty z^{\mathrm T}(t)z(t)\mathrm dt.$$

分析模糊系统(1)的 $H_2$ 性能，可得到如下定理：

**定理 2**　如果存在正定矩阵 $Y$ 及矩阵 $H_{ij}, M_i(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,r)$，其中：$H_{ii}=H_{ii}^{\mathrm T}, H_{ji}=H_{ij}^{\mathrm T}, i\neq j$，满足下列线性矩阵不等式：

$$YA_i^{\mathrm T}+A_iY+M_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}+B_{2i}M_i<H_{ii},\tag{5}$$

$$YA_i^{\mathrm T}+A_1Y+YA_j^{\mathrm T}+A_jY+M_j^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}+B_{2i}M_j+M_i^{\mathrm T}B_{2j}^{\mathrm T}+B_{2j}M_i<H_{ij}+H_{ij}^{\mathrm T},\tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} H_{11} & \cdots & H_{1r} & (C_1Y+D_1M_k)^{\mathrm T}\\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ H_{r1} & \cdots & H_{rr} & (C_rY+D_rM_k)^{\mathrm T}\\ C_1Y+D_1M_k & \cdots & C_rY+D_rM_k & -I\end{bmatrix}<0,$$
$$k=1,2,\cdots,r.\tag{7}$$

则状态反馈 $u(t)=\sum_{j=1}^r\lambda_j(\xi(t))F_jx(t)$ 使模糊系统(1)所产生的闭环系统的 $H_2$ 性能指标的上界为 $x^{\mathrm T}(0)Y^{-1}x(0)$，并且状态反馈增益矩阵为 $F_i=M_iY^{-1}$.

证明略.

**注 1**　定理 1 和定理 2 针对模糊系统(1)，以线性矩阵不等式形式分别给出了 $H_2$ 和 $H_\infty$ 控制器存在的充分条件和相应控制器的设计方法. 下面将给出 T-S 模糊系统 $H_2/H_\infty$ 混合控制器存在的充分条件和设计方法.

### 3.3　T-S 模糊系统的 $H_2/H_\infty$ 混合次优控制

**定理 3**　若存在正定矩阵 $N$ 及矩阵 $Z_{ij}, M_i(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,r)$，其中：$Z_{ii}=Z_{ii}^{\mathrm T}, Z_{ji}=Z_{ij}^{\mathrm T}, i\neq j$，满足下列线性矩阵不等式：

$$ZA_i^{\mathrm T}+A_iZ+M_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}+B_{2i}M_i+\frac{1}{\gamma^2}B_{1i}B_{1i}^{\mathrm T}<Z_{ii},\tag{8}$$

$$ZA_i^{\mathrm T}+A_iZ+ZA_j^{\mathrm T}+A_jZ+M_j^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}+B_{2i}M_j+M_i^{\mathrm T}B_{2j}^{\mathrm T}+B_{2j}M_i+\frac{1}{\gamma^2}(B_{1i}B_{1j}^{\mathrm T}+B_{1j}B_{1i}^{\mathrm T})<Z_{ij}+Z_{ij}^{\mathrm T},\tag{9}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & \cdots & Z_{1r} & ZC_1^{\mathrm T}+(D_1M_k)^{\mathrm T}\\ \cdots & \ddots & \cdots & \cdots\\ Z_{r1} & \cdots & Z_{rr} & ZC_r^{\mathrm T}+(D_rM_k)^{\mathrm T}\\ C_1Z+D_1M_k & \cdots & C_rZ+D_rM_k & -I\end{bmatrix}<0,$$
$$k=1,2,\cdots,r,\tag{10}$$

$$ZA_i^{\mathrm T}+A_iZ+M_i^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}+B_{2i}M_i<Z_{ii},\tag{11}$$

$$ZA_i^{\mathrm T}+A_iZ+ZA_j^{\mathrm T}+A_jZ+M_j^{\mathrm T}B_{2i}^{\mathrm T}+B_{2i}M_j+M_i^{\mathrm T}B_{2j}^{\mathrm T}+B_{2j}M_i<Z_{ij}+Z_{ij}^{\mathrm T}.\tag{12}$$

则由状态反馈 $u(t)=\sum_{j=1}^r\lambda_j(\xi(t))F_jx(t)$ 使模糊系统(2)所产生的闭环系统二次稳定，并且 $H_\infty$ 范数小于 $\lambda$，同时闭环系统的 $H_2$ 性能指标的上界为 $x^{\mathrm T}(0)N^{-1}x(0)$，状态反馈增益矩阵为 $F_i=M_iN^{-1}$.

证明略.

**注 2**　定理 3 以线性矩阵不等式的形式给出了 T-S 模糊系统(1)的 $H_2/H_\infty$ 混合控制器存在的充分条件和控制器的设计方法，因此，可以通过优化 $H_2$ 性能指标函数的上界 $x^{\mathrm T}(0)N^{-1}x(0)$ 得到

$H_2/H_\infty$ 混合优化控制器的设计方法,即 $H_2/H_\infty$ 混合优化控制问题转化为下列可用 Matlab 工具箱求解的优化问题:

$$\min_N x^T(0)N^{-1}x(0),$$
$$\text{s.t.}\ N > 0 \text{ and 式}(8) \sim (12).$$

## 4　仿真例子

考虑如下模糊系统:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_{1i}\omega(t) + B_{2i}u(t)),$$
$$z(t) = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i(\xi(t))(C_i x(t) + D_i u(t)). \tag{13}$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$
$$B_{22} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ B_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ C_1 = [3\quad 1],$$
$$C_2 = [2\quad 1],\ D_1 = 0.5,\ D_2 = 0.3.$$

采用高斯型隶属函数

$$\lambda_1 = 1 - 1/(1 + \exp(-7(x_1 - \pi/4))) \times (1/(1 + \exp(-7(x_1 + \pi/4)))),$$
$$\lambda_2 = 1 - \lambda_1.$$

给定系统的初值为 $x_1(0) = 0.3$, $x_2(0) = 0.5$, 扰动 $\omega(t) = \sin(2t)$ 以及正常数 $\lambda = 1$. 应用 Matlab 工具箱解定理 3 中的优化问题得到

$$N = \begin{bmatrix} 0.9213 & 0.2360 \\ 0.2360 & 0.9213 \end{bmatrix},$$

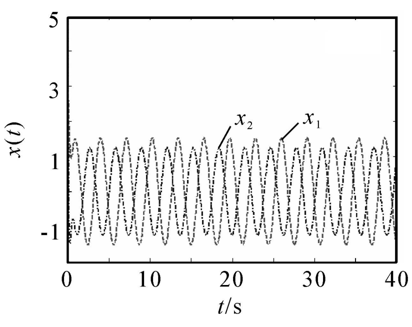


图 1　系统(12) 的状态响应曲线

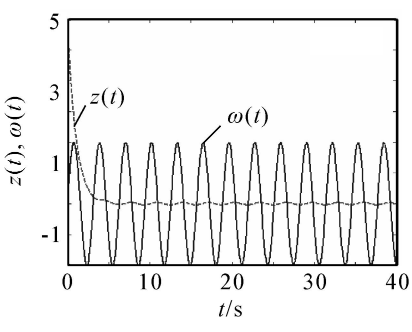


图 2　系统(12) 的 z, ω 响应曲线

$$F_1 = [-5.5630\quad -2.1858],$$
$$F_2 = [-3.7968\quad -1.4548].$$

图 1 和图 2 为系统(13) 的响应曲线. 从响应曲线可以看出,其效果是可行的,且是令人满意的.

## 5　结　论

本文研究了 T-S 模糊系统的 $H_2/H_\infty$ 混合优化控制问题,以线性矩阵不等式的形式给出了 T-S 模糊系统的 $H_2/H_\infty$ 混合控制器存在的充分条件及其设计方法,并将 $H_2/H_\infty$ 混合优化控制问题转化为可用 Matlab 工具箱求解的优化问题. 最后通过例子验证了该设计方法的可行性及有效性.

## 参考文献(References)

[1] Wang De-jin. $H_2$ and $H_\infty$ optimal control theory[M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 2001.

[2] Bernstein D S, Haddad W M. LQG control with an $H_\infty$ performance bound: A Riccati equation approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(3):293-305.

[3] Zhou K, Glover K, Bodenheimer B, et al. Mixed $H_2/H_\infty$ performance objectives I: Robust performance analysis[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39: 1564-1574.

[4] Limebeer D J N, Anderson B D O, Hendel B. A Nash game approach to mixed $H_2/H_\infty$ control[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39: 69-82.

[5] Chen B S, Lee C H, Chang Y C. Nonlinear mixed $H_2/H_\infty$ control for robust tracking design of robotic systems[J]. Int J of Control, 1997, 67(6): 837-857.

[6] Cao S G, Rees N W, Feng G. Stability analysis and design for a class of continuous time fuzzy control systems[J]. Int J of Control, 1996, 64:1069-1087.

[7] Feng G, Cao S G, Rees N W, et al. Design of fuzzy systems with guaranteed cost control stability[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 85(1): 1-10.

[8] Takatgi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its application to model and control[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1985, 15(1): 116-132.

[9] Tanaka, Sugeno. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 45: 135-156.

[10] Tanaka K, Ikeda T, Wang H O. A unified approach to controlling chaos via LMI-based fuzzy control system design[J]. IEEE Trans on Circuits Systems I, 1998, 45: 1021-1040.

[11] Liu Xiao-dong, Zhang Qing-ling. New approaches to $H_\infty$ controller designs based on the fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI[J]. Automatic, 2003, 39: 1571-1582.