

文章编号: 1001-0920(2007)09-1049-04

时滞切换系统的时滞相关性稳定判据

丛 岫¹, 费树岷², 李 涛²

(1. 南京理工大学 自动化学院, 南京 210094; 2. 东南大学 自动化研究所, 南京 210096)

摘 要: 考虑由时滞子系统构成的切换系统, 分析其在任意切换作用下保持指数稳定性的条件. 利用较为一般的 Lyapunov-Krasovskii 泛函构造方式及相关的解析技巧给出了以线性矩阵不等式表述的时滞相关性稳定判据; 进而证明了其指数衰减率对于所有切换序列一致成立, 即其完全取决于子系统的结构特征. 仿真算例证实了方法的有效性.

关键词: 切换系统; 时滞; 指数稳定; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Delay-dependent stability criterion of switched systems with time-delay

CONG Shen¹, FEI Shumin², LI Tao²

(1. Department of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China; 2. Research Institute of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China. Correspondent: CONG Shen, E-mail: shen_tsong@163.com)

Abstract: The switched dynamical system consisting of linear subsystems with time-delay is considered. The condition for guaranteeing exponential stability of the system under arbitrary switching sequence is investigated. Based on a less conservative construction of Lyapunov-Krasovskii functional and some analytic techniques, the delay-dependent criterion is established in terms of linear matrix inequalities. Furthermore, it is strictly verified that the exponential decay rate holds uniformly for all switching sequences, and is definitely determined by the characteristics of subsystems. A numerical example demonstrates the effectiveness of the proposed method.

Key words: Switched systems; Time-delay; Exponential stability; Linear matrix inequality

1 引 言

本文考虑由若干线性时滞子系统

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + A_{i1} x(t-r), \\ t & \geq t_0, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (1a)$$

在取值于指标集 $\{1, \dots, N\}$ 的右连续切换信号

$$s(t) = (t, s(t^-), x(t)), \quad t \geq t_0 \quad (1b)$$

驱动下构成的切换动力系统. 其中: $x \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$ 为状态变量与时滞常数; $\{A_i, A_{i1}\}_{i=1}^N$ 为适当维数矩阵; $s: [t_0, \infty) \times \{1, \dots, N\} \times \mathbf{R}^n \rightarrow \{1, \dots, N\}$ 表征切换信号的动力学行为. 根据切换信号随时间的演化, 可将其表述为切换序列的形式, 即

$$s: = \{(t_0, (0)), \dots, (t_k, (k)), \dots / \lim_k t_k = \infty\}. \quad (2)$$

其中: $t_k, (k) \in \{1, \dots, N\}$ 为切换时刻及相应的切换序列取值, $k = 0, 1, \dots$

时滞与切换是影响稳定性的重要因素, 二者相互耦合可能导致复杂的系统动力学行为. 如果给定切换序列 (2), 系统 (1) 成为非连续时变系统, 满足所谓 Caratheodory 条件, 文献 [1] 证明了其解的整体存在唯一性, 并且其一致渐近稳定性等价于指数稳定性.

无时滞条件下, 非二次型 Lyapunov 函数^[2,3] 与多 Lyapunov 函数^[4] 方法是切换系统稳定性分析中具有代表性的成果. 前者构建于有限维欧式空间中不变集的几何结构, 而后者根植于不同 Lyapunov 函数在有限维欧式空间上的几何相容性 (拓扑空间

收稿日期: 2006-06-04; 修回日期: 2006-10-27.

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60574006).

作者简介: 丛岫 (1976—), 男, 哈尔滨人, 讲师, 博士, 从事切换系统与时滞系统稳定性研究; 费树岷 (1961—), 男, 安徽宣城人, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统与切换系统稳定性研究.

$\{ \cdot, \cdot \}$ 上非负连续实值函数 u, v 具有几何相容性, 如果存在 $0 < \alpha < 1$, 使得 $v(w) \leq u(w) \leq v(w)^\alpha, \forall w \in \mathbb{R}^n$. 在时滞条件下, 相空间为无穷维函数空间, 上述方法的适用条件不再成立, 因此在切换系统稳定性问题的研究模式下, 时滞现象的存在丰富了其理论体系, 但在相关方法与结论推广中存在根本的局限性. 文献 [5,6] 分别基于 Lyapunov-Krasovskii 泛函与 Lyapunov-Razumikhin 函数方法将文献 [7] 中关于度量空间上非连续混杂动力系统稳定性分析的方法与充分性结论推广至时滞情形.

时滞系统稳定判据的保守性取决于泛函的构造及其解析技巧. 在一般的泛函构造方式下, 稳定判据归结为一阶线性偏微分方程边值问题^[8], 其数值求解并不属于凸优化的范畴. 对于时不变系统, 通过将离散型时滞转化为分布型时滞的变换及相应的泛函构造技巧, 即可得到各种时滞相关性稳定判据^[9,10]; 对于时变系统, 此类变换导致相应泛函的微分运算中包含未来时刻的系统信息^[11], 即稳定性分析失去基本的因果性. 通过在泛函的构造中引入状态导数或系统系数矩阵可以得到保守性较小、便于控制器设计的稳定准则^[10,11]; 对于非连续系统, 此类泛函中被积函数的非连续性导致其微分运算非常复杂, 在一般条件下其导函数的变化规律是难以分析的.

切换系统的时变性与非连续性取决于切换序列的行为, 这是其区别于一般时变系统的特殊性所在. 本文基于较为一般的泛函构造方式, 分析时滞切换系统 (1) 在任意切换序列 (2) 作用下的指数稳定性, 得到了以线性矩阵不等式表述的时滞相关性判据; 进而证明了其指数衰减率对于所有切换序列是一致成立的, 即完全由子系统属性所确定, 这是切换系统区别于一般时变系统的重要特征^[3].

2 记号与引理

$C_{n,r} := C([-r, 0], \mathbb{R}^n), r > 0$ 表示由 $[-r, 0]$ 映入 \mathbb{R}^n 的具有一致范数的连续函数构成的 Banach 空间, $x_t \in C_{n,r}$ 含义为 $x_t(\cdot) = x(t + \cdot), \cdot \in [-r, 0]$; $\|\cdot\|, \langle \cdot, \cdot \rangle$ 分别表示 $\mathbb{R}^n, C_{n,r}$ 上的度量. 对于实对称矩阵, $\max(\cdot)$ 和 $\min(\cdot)$ 分别表示其最大与最小特征值. D^+ 为实值连续函数的右导数算子.

下述等价条件^[12] 刻画了切换系统的时变本质:

引理 1 设 $0 < m_1, \dots, m_N < 1$ 为 Lebesgue 可测函数, 满足 $\sum_{i=1}^N m_i(t) = 1$; 并设 $A(t) := \sum_{i=1}^N m_i(t) A_i, A_1(t) := \sum_{i=1}^N m_i(t) A_{i1}$, 那么下述泛函微分方程:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_1(t)x(t-r), t \geq t_0 \quad (3)$$

的指数稳定性等价于时滞切换系统 (1) 在任意切换序列 (2) 作用下的一致渐近稳定性.

引理 2^[13] 设 $r > 0; (\cdot), K = K > 0$ 为适当维数的向量与常值矩阵, 那么下列积分不等式成立:

$$\int_{t-r}^t (\cdot) K(\cdot) d\tau \leq 0 \implies \int_{t-r}^t (\cdot) d\tau \leq K \int_{t-r}^t (\cdot) d\tau.$$

3 主要结果

子系统的稳定性是系统在任意切换作用下稳定性的必要条件. 时滞系统的稳定判据非常丰富, 大体上可分为时滞相关性与时滞无关性判据, 更为细微的差别是难以概述的. 作为整体考虑, 则须忽略子系统稳定判据之间的异性, 提取其共性加以描述与分析, 这是本文的基本出发点.

构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函

$$V(x_t) = V_1(x_t) + V_2(x_t) + V_3(x_t) + V_4(x_t). \quad (4)$$

各项说明如下:

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &= x(t) P x(t) + 2x(t) \int_{t-r}^t L x(t+\tau) d\tau, \\ V_2(x_t) &= \int_{t-r}^t x(\tau) R x(\tau) d\tau, \\ V_3(x_t) &= \int_{t-r}^t x(\tau) Q x(\tau) d\tau, \\ V_4(x_t) &= \int_{t-r}^t x(\tau) S x(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

其中 $\cdot := \{ P = P, L, R = R, S = S, Q = Q \in \mathbb{R}^{n \times n} \}$ 为待定的参数集.

定理 1^[1] 若存在参数集 \cdot 满足下列线性矩阵不等式:

$$Q > 0, \quad (5)$$

$$S > 0, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} P & L \\ L & r^{-1}S + R \end{bmatrix} > 0, \quad (7)$$

则泛函 (4) 是正定的, 即存在 $\alpha > 0, \beta > 0$, 使得 $\beta \|x(t)\|^2 \leq V(x_t) \leq \alpha \|x_t\|^2, \forall x_t \in C_{n,r}$.

证明 设

$$(t + \cdot) := \int_0^\cdot x(t + \tau) d\tau, \quad \cdot \in [-r, 0],$$

则对于 $t \geq t_0$, 有

$$\dot{(t + \cdot)} = x(t + \cdot), \quad (t) = 0.$$

泛函 (4) 中的各项具有如下解析形式及相应的不等式估计:

$$\begin{aligned} V_1(x_t) &= x(t) P x(t) + 2x(t) L [(t) - (t-r)] = \\ &= x(t) P x(t) + 2x(t) L (t-r); \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-r) \\ \vdots \\ x(t-r) \end{bmatrix} = \|x(t)\|^2.$$

据此,根据定理1的结论推知

$$\|x(t)\|^2 \leq V(x_t) - V(x_{t_0}) + \int_{t_0}^t D^+ V(x) dt, \quad t \geq t_0. \quad (18)$$

设 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\beta = \frac{1}{2}$, 依据式(18)及

Gronwall-Bellman 不等式^[11]得到 $\|x(t)\| \leq e^{-\beta(t-t_0)}, t \geq t_0$.

4 仿真算例

例1 设时滞常数 $r = 2s$, 子系统系数矩阵分别为

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$P = \begin{bmatrix} 1.16 & -0.5 \\ -0.5 & 1.61 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 0.46 & -0.31 \\ -0.31 & 0.56 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.05 \\ 0.02 & -0.02 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0.04 & 0.05 \\ 0.05 & 0.04 \end{bmatrix}.$$

$S = \begin{bmatrix} 1.82 & -0.2 \\ -0.2 & 2.28 \end{bmatrix}$ 为 LMIs(5,6,7,12)的一组解.

随机切换驱动下系统(1)的解轨线如图1所示.

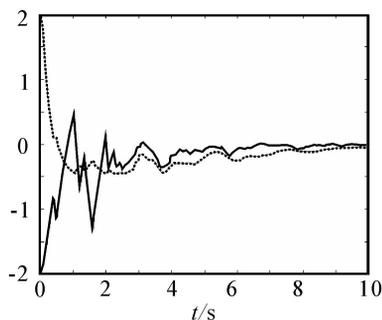


图1 随机切换作用下系统状态轨线

5 结语

本文考虑时滞切换系统在任意切换作用下的稳定性问题,构造较为一般 Lyapunov-Krasovskii 泛函,得到以线性矩阵不等式表述的时滞相关性判据.揭示公共 Lyapunov-Krasovskii 泛函的存在性与系

统属性之间的内在联系是今后主要的研究方向.

参考文献(References)

- [1] Hale J. Theory of functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [2] Molchanov A P, Pyatnitskiy Y S. Criteria of asymptotic stability of differential and difference inclusions encountered in control theory [J]. Systems & Control Letter, 1989, 13(1): 59-64.
- [3] Dayawansa W, Martin C. Converse Lyapunov theorem for a class of dynamical system with undergo switching [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(4): 751-760.
- [4] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 475-482.
- [5] Sun Y, Michel A N, Zhai G. Stability of discontinuous retarded functional differential equations with applications[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(8): 1090-1105.
- [6] Yuan R, Jing Z, Chen L. Uniform asymptotic stability of hybrid dynamical systems with delay[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(2): 344-348.
- [7] Ye H, Michel A N, Hou L. Stability theory for hybrid dynamical systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 461-474.
- [8] Barabanov N E. Quadratic Lyapunov functions for linear control systems with delays [C]. Proc of 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Hawaii, 2003: 5573-5578.
- [9] Fridman E, Shaked U. Delay-dependent stability and H-infinity control: Constant and time-varying delays [J]. Int J of Control, 2003, 76(1): 48-60.
- [10] Kolmanovskii V B, Richard J-P. Stability of some linear systems with delays [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(5): 984-989.
- [11] de Souza C E, Li X. Delay-dependent robust H-infinity control of uncertain linear state-delayed systems [J]. Automatica, 1999, 35(7): 1313-1321.
- [12] Pyatnitskiy Y S, Rapoport L B. Criteria of asymptotic stability of differential inclusions and periodic motions of time-varying nonlinear control systems [J]. IEEE Trans on Circuits & Systems, 1996, 43(3): 219-229.
- [13] Gu K. An integral inequality in the stability problem of time-delay systems [C]. Proc of 39th IEEE Conf on Decision and Control. Sydney, 2000: 2805-2810.