

文章编号: 1001-0920(2007)09-1053-05

受正弦扰动时滞非线性系统的近似最优减振控制

高德欣¹, 唐功友²

(1. 青岛科技大学 自动化与电子工程学院, 山东 青岛 266042;

2. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100)

摘要: 研究时滞非线性系统在正弦扰动作用下的最优减振控制问题, 给出一种无时滞近似最优减振控制律的迭代方法. 通过假设 Lagrange 算子, 将由原系统最优控制问题得到的既含时滞项又含有超前项的非线性两点边值问题转换为新的有利于求解的形式, 再通过构造序列将其转化为不含时滞项和超前项的线性非齐次两点边值问题序列. 证明了该序列的收敛性. 通过交替迭代序列得到了系统最优减振控制律. 仿真结果表明, 该方法在不同时滞下对扰动都具有很好的鲁棒性.

关键词: 时滞非线性系统; 正弦扰动; 最优控制; 减振控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Approximate optimal damping control for time-delay nonlinear systems with sinusoidal disturbances

GAO De-xin¹, TANG Gong-you²

(1. College of Automation and Electronic Engineer, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, China; 2. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China. Correspondent: GAO De-xin, E-mail: gaodexin@qust.edu.cn)

Abstract: A non-delay approximate optimal approach of solving the optimal damping control (ODC) law is presented. By supposing the Lagrange operator, an original nonlinear two-point boundary value (TPBV) problem with both time-delay and time-advance terms is transformed into new form solved conveniently, then by constructing sequences, a sequence of linear TPBV problems without delay or advance terms are obtained. The sequence of the solutions uniformly converges to the solution of the original optimal control problem. By iterative solution, the approximate ODC law is obtained. Simulation results show the approximate ODC law is robust to sinusoidal disturbances in different time-delay.

Key words: Time-delay nonlinear systems; Sinusoidal disturbances; Optimal control; Damping control

1 引言

许多实际控制系统都具有时滞、非线性和受扰动等特性, 这些都是难以避免的, 因此研究受扰时滞非线性系统更贴近实际控制系统. 在众多扰动中正弦扰动非常典型^[1], 且经常出现在各类实际系统中, 例如飞机姿态控制系统^[2]; 海洋平台的振动控制系统^[3]; 磁盘控制系统等. 对受扰动时滞非线性系统的最优控制问题, 由极大值原理会导致求解既含有时滞项又含有超前项的非线性两点边值问题. 对这类问题的求解很困难, 目前仍没有很好的解决办法, 常采用近似方法求其数值解, 如 Galerkin 逐次逼近

法^[4]、级数展开法^[5,6]、逐次逼近法^[7]、ASRE 方法^[8]及 SDRE 迭代算法^[9]等.

本文针对正弦扰动作用下时滞非线性系统的最优控制问题, 给出一种求解近似最优减振控制律的无滞后迭代方法, 并通过数值仿真验证了该方法的有效性.

2 问题描述

考虑如下受正弦扰动时滞非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + A_1 x(t - \tau) + Bu(t) + \\ & f(x) + Dv(t), \quad t > t_0, \\ x(t) &= \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq t_0. \end{aligned} \quad (1)$$

收稿日期: 2006-06-14; 修回日期: 2006-12-11.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60574023); 青岛科技大学科研启动基金项目.

作者简介: 高德欣(1978—), 男, 山东烟台人, 副教授, 博士, 从事非线性最优控制、计算机控制等研究; 唐功友(1953—), 男, 山东烟台人, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与应用、大系统理论等研究.

其中: $x \in R^n$ 为状态向量; $u \in R^r$ 为控制向量; $v \in R^p$ 为外部干扰向量; $f(x)$ 为非线性项; A, A_1, B, D 为适当维数的常量矩阵; $\Phi(t)$ 为已知的连续初始向量函数; $t_0 > t_0$ 为时滞.

假设 1 非线性项 $f(x)$ 满足 Lipschitz 条件.

假设 2 正弦扰动 $v(t)$ 的动态特性方程如下:

$$v(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ \dots \\ v_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \dots \\ \sin(\omega_p t + \varphi_p) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

选取有限时域的二次型性能指标:

$$J = \frac{1}{2} [x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt]. \quad (3)$$

其中: Q, Q_f 为半正定对称矩阵; R 为正定对称矩阵. 最优控制问题是寻找最优控制律 $u^*(t)$ 使 J 在式 (1) 约束下取最小值. 由极大值原理的必要条件, 系统 (1) 关于性能指标 (3) 的最优控制律为

$$u(t) = -R^{-1} B^T (t) \lambda(t). \quad (4)$$

其中 $\lambda(t)$ 为下面两点边值问题的解:

$$\begin{cases} \dot{\lambda}(t) = -[Qx(t) + A^T(t) \lambda(t) + f_x^T(x)(t) + A_1^T(t + t_0)], & t_0 \leq t < t_f; \\ Qx(t) + A^T(t) \lambda(t) + f_x^T(x)(t), & t_f - \epsilon < t < t_f; \\ x(t) = \Phi(t), & t = t_0, \quad \lambda(t_f) = Q_f x(t_f). \end{cases} \quad (5)$$

其中

$$S = BR^{-1}B^T, \quad f_x^T(x) = \partial f^T(x) / \partial x.$$

3 简化两点边值问题

可以看出式 (5) 为既含时滞项 $x(t - t_0)$ 又含超前项 $x(t + t_0)$ 的非齐次两点边值问题. 除了极特殊的情形外, 式 (5) 的解析解是不存在的. 下面给出一种求解该问题的无时滞迭代数值解法.

首先从式 (5) 中分离出线性部分, 假设 Lagrange 算子 $\lambda(t)$ 为

$$\lambda(t) = P(t)x(t) + P_1(t)v(t) + P_2(t)v(t) + g(t); \quad (6)$$

然后对式 (6) 等号两边分别求导数, 有

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}(t) &= \dot{P}(t)x(t) + P(t)\dot{x}(t) + \dot{P}_1(t)v(t) + P_1(t)\dot{v}(t) + \dot{P}_2(t)v(t) + P_2(t)\dot{v}(t) + \dot{g}(t). \end{aligned} \quad (7)$$

因 $v(t)$ 为正弦扰动, 所以存在

$$\dot{v}(t) = \dot{v}(t), \quad (8)$$

$$\dot{v}(t) = \dot{v}(t) = -\omega^2 v(t), \quad (9)$$

其中

$$\omega = \text{Diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_p).$$

把式 (6) 代入式 (5) 中的第 1 式, 然后式 (7) 与式 (5) 中的第 2 式比较系数可得 Riccati 矩阵微分方程

$$\begin{aligned} -\dot{P}(t) &= A^T P(t) + P(t)A - P(t)SP(t) + Q, \\ P(t_f) &= Q_f; \end{aligned} \quad (10)$$

和矩阵微分方程组

$$\begin{aligned} -\dot{P}_1(t) &= [A^T - P(t)S]P_1(t) - P_2(t)\omega^2 + P(t)D, \\ P_1(t_f) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -\dot{P}_2(t) &= [A^T - P(t)S]P_2(t) + P_1(t), \\ P_2(t_f) &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

以及伴随向量方程

$$\begin{cases} -\dot{g}(t) = [A - SP(t)]^T g(t) + P(t)A_1 x(t - t_0) + P(t)f(x) + f_x^T(x)(t) + A_1^T(t + t_0), & t_0 \leq t < t_f - \epsilon; \\ [A - SP(t)]^T g(t) + P(t)A_1 x(t - t_0) + P(t)f(x) + f_x^T(x)(t), & t_f - \epsilon < t < t_f; \\ g(t_f) = 0. \end{cases} \quad (13a)$$

将式 (6) 代入式 (5) 的第 1 式, 可得状态方程

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A - SP(t)]x(t) + [D - SP_1(t)]v(t) - Sg(t) - SP_2(t)v(t) + A_1 x(t - t_0) + f(x), \end{aligned} \quad (13b)$$

$$x(t) = \Phi(t), \quad t < t_0.$$

再代入式 (4), 可唯一地确定系统最优控制律

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T [P(t)x(t) + P_1(t)v(t) + P_2(t)v(t) + g(t)]. \quad (14)$$

由于式 (13) 在变量 $x(t)$ 和 $g(t)$ 上仍是互相耦合的, 仍难于求解, 但方便了构造序列解耦然后求解该问题. 为保证本文方法求解最优控制序列的收敛性, 给出下列引理.

4 系统序列收敛性引理

考虑受扰动的时滞非线性系统

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= G(t)z(t) + A_1 z(t - t_0) + h(z(t), t) + Fw(t), \quad t > t_0, \\ z(t) &= \Phi(t), \quad t < t_0. \end{aligned} \quad (15)$$

其中: $z \in R^n$ 为状态向量; $w \in R^p$ 为输入向量; $G: C^1(R_T) \rightarrow R^{n \times n}$; $R_T = [t_0, t_f]$; F 为适当维数常量矩阵; $\Phi(t)$ 为已知的状态向量的初始函数; $h(t_0, t)$

$0, h: C^1(R^n \times R_{t_0}) \rightarrow R^n$, 假设 h 满足 Lipschitz 条件. 构造序列如下:

$$\begin{aligned} \dot{z}^{(k)}(t) &= G(t)z^{(k)}(t) + A_1 z^{(k-1)}(t - \tau) + \\ &\quad h(z^{(k-1)}(t), t) + Fw(t), \quad t > t_0, \\ z^{(k)}(t_0) &= \Phi(t), \quad t = t_0, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned} \tag{16}$$

引理 1 定义向量函数序列 $\{z^{(k)}(t)\}$ 为

$$\begin{aligned} z^{(0)}(t) &= (t, t_0)\Phi(t_0) + \int_{t_0}^t (t, r)Fw(r)dr, \\ z^{(k)}(t) &= (t, t_0)\Phi(t_0) + \int_{t_0}^t (t, r)[A_1 z^{(k-1)}(r - \tau) + \\ &\quad h(z^{(k-1)}(r), r) + Fw(r)]dr, \quad t > t_0, \\ z^{(k)}(t) &= \Phi(t), \quad t = t_0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{17}$$

其中: (t, t_0) 是系统(15) 对应于矩阵 $G(t)$ 的状态转移矩阵, k 为迭代的次数. 则函数向量序列 $\{z^{(k)}(t)\}$ 一致收敛于系统(15) 的解.

证明略.

5 最优减振控制律设计

对于由式(1) 描述的系统关于性能指标(3) 的最优控制问题, 给出如下结果:

定理 1 系统(1) 关于性能指标(3) 的最优减振控制律由下式确定:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T[P(t)x(t) + P_1(t)v(t) + P_2(t)v(t) + g^{(k)}(t)]. \tag{18}$$

其中: $P(t)$ 是矩阵微分方程(10) 的唯一半正定解; $P_1(t)$ 是矩阵微分方程(11) 的唯一解; $P_2(t)$ 是矩阵微分方程(12) 的唯一解; $g^{(k)}(t) = \lim_k g^{(k)}(t)$, 伴随向量 $g^{(k)}(t)$ 为如下两点边值问题序列的解:

$$\begin{cases} -\dot{g}^{(k)}(t) = \begin{cases} [A - SP(t)]^T g^{(k)}(t) + P(t)A_1 x^{(k-1)}(t - \tau) + \\ P(t)f(x^{(k-1)}(t)) + f_x^T(x^{(k-1)}(t))^{(k-1)}(t) + \\ A_1^T(x^{(k-1)}(t + \tau)), \quad t_0 \leq t \leq t_f - \tau; \\ [A - SP(t)]^T g^{(k)}(t) + P(t)A_1 x^{(k-1)}(t - \tau) + \\ P(t)f(x^{(k-1)}(t)) + f_x^T(x^{(k-1)}(t))^{(k-1)}(t), \\ \quad t_f - \tau < t < t_f; \end{cases} \\ g^{(k)}(t_f) = 0, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{19}$$

$x^{(k)}(t)$ 满足

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(k)}(t) &= [A - SP(t)]x^{(k)}(t) + [D - SP_1(t)]v(t) - \\ &\quad Sg^{(k)}(t) - SP_2(t)v(t) + \\ &\quad A_1 x^{(k-1)}(t - \tau) + f(x^{(k-1)}), \\ x^{(k)}(t) &= \Phi(t), \quad t < t_0, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{20}$$

其中

$$\dot{g}^{(k)}(t) = P(t)x^{(k)}(t) + P_1(t)v(t) +$$

$$P_2(t)v(t) + g^{(k)}(t). \tag{21}$$

证明 求解由式(13) 确定的两点边值问题, 构造两点边值问题族(19) 和(20) 及相应的控制序列

$$\begin{aligned} u^{(k)}(t) &= \\ &\quad -R^{-1}B^T[P(t)x^{(k)}(t) + P_1(t)v(t) + \\ &\quad P_2(t)v(t) + g^{(k)}(t)], \end{aligned} \tag{22}$$

其中 k 为迭代次数.

首先令 $g^{(0)}(t) = 0, x^{(0)}(t) = 0, f(x^{(0)}) = 0, x^{(0)}(t - \tau) = 0, \dot{x}^{(0)}(t + \tau) = 0$, 则构造序列(19) 式 $g^{(k)}(t)$ 的第 1 次迭代为如下形式:

$$\begin{aligned} -\dot{g}^{(1)}(t) &= [A - SP(t)]^T g^{(1)}(t) + \\ &\quad f_x^T(x^{(0)}(t))^{(0)}(t), \\ g^{(1)}(t_f) &= 0. \end{aligned} \tag{23}$$

这是一个无时滞的线性微分方程, 式中各项都是已知的, 通过反向积分可以解出 $g^{(1)}(t)$. 然后求解 $x^{(k)}(t)$, 可以看出在求 $x^{(1)}(t)$ 的式中 $g^{(1)}(t)$ 已知.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)}(t) &= \\ &\quad [A - SP(t)]x^{(1)}(t) + [D - SP_1(t)]v(t) - \\ &\quad SP_2(t)v(t) - Sg^{(1)}(t), \end{aligned} \tag{24}$$

$$x^{(1)}(t) = \Phi(t), \quad t < t_0.$$

则可方便地解出 $x^{(1)}(t)$, 进而可解出 $f(x^{(1)}), \dot{x}^{(1)}(t), x^{(1)}(t - \tau)$ 和 $g^{(1)}(t + \tau)$. 重新开始第 2 次迭代, 下式中各项都由前一步迭代求出, 即

$$\begin{cases} -\dot{g}^{(2)}(t) = \begin{cases} [A - SP(t)]^T g^{(2)}(t) + P(t)A_1 x^{(1)}(t - \tau) + \\ P(t)f(x^{(1)}(t)) + f_x^T(x^{(1)}(t))^{(1)}(t) + \\ A_1^T(x^{(1)}(t + \tau)), \quad t_0 \leq t \leq t_f - \tau; \\ [A - SP(t)]^T g^{(2)}(t) + P(t)A_1 x^{(1)}(t - \tau) + \\ P(t)f(x^{(1)}(t)) + f_x^T(x^{(1)}(t))^{(1)}(t), \\ \quad t_f - \tau < t < t_f; \end{cases} \\ g^{(2)}(t_f) = 0. \end{cases} \tag{25}$$

所以可解出 $g^{(2)}(t)$, 进而由下式:

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(2)}(t) &= \\ &\quad [A - SP(t)]x^{(2)}(t) + [D - SP_1(t)]v(t) - \\ &\quad Sg^{(2)}(t) - SP_2(t)v(t) + \\ &\quad A_1 x^{(1)}(t - \tau) + f(x^{(1)}), \\ x^{(2)}(t) &= \Phi(t), \quad t < t_0, \end{aligned} \tag{26}$$

解出 $x^{(2)}(t)$.

由式(23) ~ (26) 可以看出两点边值问题族(19) 和(20) 是一个交替迭代求解过程, 很明显 $P(t), P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 都为已知函数, 可通过矩阵方程(10) ~ (12) 一次离线求出, 而且 $f(x^{(k-1)}), x^{(k-1)}(t), \dot{x}^{(k-1)}(t), x^{(k-1)}(t - \tau)$ 和 $x^{(k-1)}(t + \tau)$ 在前一次迭代中可以求出. 当 $k \rightarrow \infty$, 必定可以交替解得

$g^{(k)}(t)$ 与 $x^{(k)}(t)$ 的值,进而对第 k 近似最优化问题,可以求得 $u^{(k)}(t)$ 的值.

现在证明控制序列 $\{u^{(k)}(t)\}$ 的收敛性. 为方便讨论迭代逐次求解收敛性, 分别将 $\{x^{(k)}(t)\}$ 和 $\{g^{(k)}(t)\}$ 视为 $C^N[t_0, t_f]$ 的一个序列. 注意到 k 在序列(19), (20) 和(22) 中意义与引理1 中意义相同, 所以两点边值问题(19) 和(20) 的解序列 $\{g^{(k)}(t)\}$ 和 $\{x^{(k)}(t)\}$ 是一致收敛的. 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 状态向量序列 $\{x^{(k)}(t)\}$ 的极限 $x^*(t)$ 即为最优状态轨线, 即

$$\lim_k g^{(k)}(t) = g(t),$$

$$\lim_k x^{(k)}(t) = x(t). \quad (27)$$

因为式(22) 的解序列 $\{u^{(k)}(t)\}$ 是与 $\{x^{(k)}(t)\}$ 和 $\{g^{(k)}(t)\}$ 相关的, 所以它也是一致收敛的. $\{u^{(k)}(t)\}$ 的极限 $u^*(t)$ 即为最优减振控制律.

最后证明 $u^*(t)$ 的唯一性. $u^*(t)$ 的唯一性由 $P(t)$, $P_1(t)$ 和 $P_2(t)$ 唯一确定, 方程(10) 是关于 $P(t)$ 的 Riccati 矩阵微分方程, 有唯一的半正定解. 而式(11) 和(12) 是微分方程, 必定有唯一解 $P_1(t)$ 与 $P_2(t)$, 所以 $u^*(t)$ 是唯一的.

在实际系统的最优减振控制律设计中, 伴随方程解序列 $\{g^{(k)}(t)\}$ 的极限 $g^{(k)}(t)$ 一般是无法精确求出的, 通常可通过伴随方程的第 k 次迭代值来近似其精确解, 从而得到第 k 阶近似最优减振控制律

$$u_k(t) = -R^{-1}B^T[P(t)x(t) + P_1(t)v(t) + P_2(t)v(t) + g^{(k)}(t)], \quad (28)$$

其中 $x(t)$ 是将 $u^{(k)}(t)$ 代入式(1) 解得的精确解.

迭代次数 k 的选取有多种方法, 本文根据事先给定性能指标误差精度 $\epsilon > 0$ 的方法选取, 如果性能指标满足 $J = |(J_k - J_{k-1})/J_k| < \epsilon$, 则确定 k , 得到第 k 阶近似最优减振控制律.

6 举例与仿真

考虑由(1) 描述的系统, 参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 \\ -0.8 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}, x(t) = 0.$$

正弦扰动表达式为

$$v(t) = \begin{bmatrix} 0.2 \sin(\omega_1 t) \\ 0.1 \sin(\omega_2 t) \end{bmatrix},$$

选取系统的性能指标(3) 的参数为

$$Q_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$R = 1, t_f = 40.$$

若预先取定 $\epsilon = 0.05$, 当有 $J < \epsilon$ 时, 满足控制精度要求, 可以认为 $u_k(t)$ 为近似最优减振控制律.

1) 当时滞 $\tau = 0.5$ 时, $x_1(t)$ 和 $u(t)$ 在不同的迭代次数 k 下的仿真曲线如图1 和图2 所示. 其中: 为 $k = 1$; 为 $k = 2$; 为 $k = 4$.

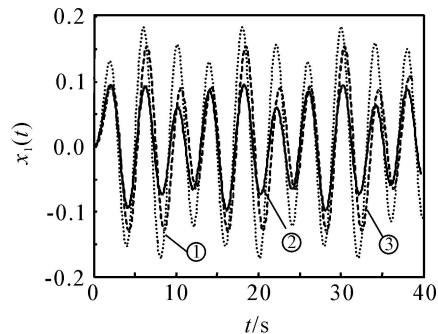


图1 当 $\tau = 0.5$ 时状态变量 $x_1(t)$ 曲线

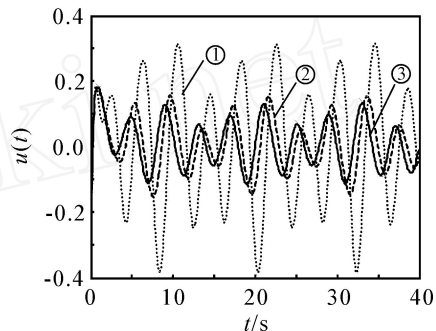


图2 当 $\tau = 0.5$ 时控制律 $u(t)$ 曲线

当 $\tau = 0.5$ 时性能指标及控制精度如表1 所示.

表1 当 $\tau = 0.5$ 时不同迭代次数时的性能指标

k	1	2	3	4
J_k	0.048 6	0.013 0	0.012 3	0.011 9
J	/	0.731 5	0.053 3	0.035 4

从表1 中可以看出, 性能指标 $J_1 > J_2 > J_3 > J_4$, 即性能指标值随迭代次数增加而减小, 并趋于一个稳定的最优性能指标 J^* . 从表1 也可看出, 随着迭代次数增加, 性能指标相对误差逐渐减小. 当 $k = 4$ 时, 满足控制精度要求, 因此可把 $u_4(t)$ 作为近似最优减振控制律.

2) 当时滞 $\tau = 2$ 时, $x_1(t)$ 和 $u(t)$ 在不同迭代次

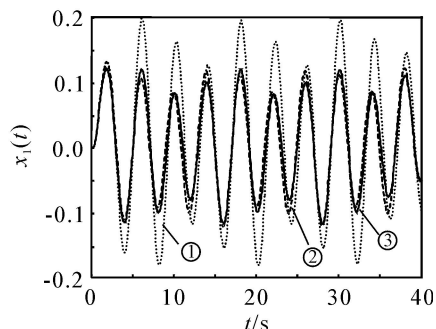


图3 当 $\tau = 2$ 时状态变量 $x_1(t)$ 曲线

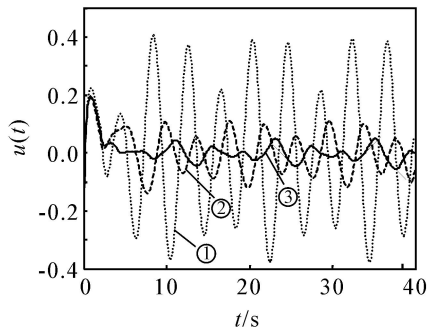


图 4 当 $\tau = 2$ 时控制律 $u(t)$ 曲线

数 k 下仿真曲线如图 3 和图 4 所示. 其中: 为 $k = 1$; 为 $k = 3$; 为 $k = 7$.

当 $\tau = 2$ 时性能指标及控制精度如表 2 所示.

表 2 当 $\tau = 2$ 时不同迭代次数时的性能指标

k	1	2	4	6	7
J_k	0.062 5	0.023 5	0.012 7	0.010 7	0.010 3
J	/	0.655 4	0.490 2	0.415 1	0.044 7

从表 2 也可看出,随着迭代次数增加,性能指标相对误差逐渐减小. 当 $k = 7$ 时,满足控制精度要求,因此可以把 $u_7(t)$ 作为近似最优减振控制律.

由两个表对照可以得出,随着时滞的增大,本文给出方法的迭代次数增加,控制质量也随之降低,但系统的性能指标仍趋于一稳定值,同时对扰动仍有很好的抑制作用.

7 结 论

本文研究时滞非线性系统在外部正弦干扰作用下的最优减振控制问题,给出了最优减振控制律的设计过程,并给出了一种设计实际近似最优减振控制律的无滞后方法. 仿真结果表明该方法对外部正弦扰动在不同的时滞下都有良好的鲁棒性.

参考文献(References)

[1] Bodson M. Performance of an adaptive algorithm for sinusoidal disturbance rejection in high noise [J]. Automatica, 2001, 37(7): 1133-1140.

[2] Mulgund S S, Stengel R F. Optimal nonlinear estimation for aircraft flight control in wind shear [J]. Automatica, 1996, 32(1): 3-13.

[3] Wang W, Tang G Y. Feedback and feedforward optimal control for offshore jacket platforms [J]. China Ocean Engineering, 2004, 18(4): 515-526.

[4] Beard R W, McLain T W. Successive Galerkin approximation algorithms for nonlinear optimal and robust control [J]. Int J of Control, 1998, 71(5): 717-743.

[5] Kurina G A. Asymptotic expansion of solutions of optimal control problems for discrete weakly controllable systems [J]. J Applied Mathematics and Mechanics, 2002, 66(2): 201-213.

[6] Garrard W L, Enns D F, Snell S A. Nonlinear feedback control of highly manoeuvrable aircraft [J]. Int J Control, 1992, 56(4): 799-812.

[7] 唐功友,高德欣. 带有持续扰动非线性系统的前馈-反馈最优控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 366-371. (Tang Gong-you, Gao De-xin. Feedforward and feedback optimal control for nonlinear systems with persistent disturbances [J]. Control and Decision, 2005, 20(4): 366-371.)

[8] Cimen T, Banks S P. Nonlinear optimal tracking control with application to super-tankers for autopilot design [J]. Automatica, 2004, 40(11): 1845-1863.

[9] McCaffrey D, Banks S P. Lagrangian manifolds and asymptotically optimal stabilizing feedback control [J]. Systems and Control Letters, 2001, 43(3): 219-224.

(上接第 1048 页)

[7] Baudat G, Anouar F. Kernel-based methods and function approximation [C]. Proc of the International Joint Conf on Neural Networks. Piscataway: Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc, 2001: 1244-1249.

[8] Cheng Y P. Theory of matrix [M]. Xi'an: Northwest

University Press, 1989.

[9] Mike S, Scholkopf B, Smola A J. Kernel PCA and denoising in feature space [C]. In Advances in Neural Information Processing Systems. Cambridge: MIT Press, 1999: 524-536.