文章编号: 1001-0920(2007)09-1070-03

不确定广义时滞系统的鲁棒稳定方法研究

王天成, 辛 杰, 魏新江
(鲁东大学 数学与信息学院, 山东 烟台 264025)

摘 要: 研究一类带有时滞不确定广义系统的鲁棒渐近稳定问题. 利用 Lyapunov 稳定性定理和线性矩阵不等式工具,得到了广义系统正则、鲁棒渐近稳定的时滞相关充分条件. 为了降低所得结果的保守性,避免了采用系统模型变换和利用矩阵不等式方法. 进一步,建立一个具有线性矩阵不等式约束的凸优化问题,利用 Matlab 软件中的 LMI 工具箱求解,得到保证广义系统鲁棒渐近稳定的最大可允许时滞上界. 仿真示例表明了该方法的有效性.

关键词: 广义系统; 时滞相关; 线性矩阵不等式; 鲁棒稳定
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Improved robust stability criteria for uncertain descriptor system with time-delay

WANG Tian-cheng, XIN Jie, WEI Xin-jiang
(College of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, China. Correspondent: WANG Tian-cheng, E-mail: cumt_wtc@163.com)

Abstract: The problem of robust asymptotic stability for a class of uncertain descriptor system with time-delay is considered. By means of Lyapunov function and linear matrix inequalities (LMIs) technique, delay-dependent sufficient conditions are deduced such that the solution of the descriptor system is regular and robust asymptotic stable for all admissible uncertainties. To reduce the conservatism of the existed results, neither model transformation nor LMI is adopted. Furthermore, a convex optimization problem with LMIs constraints is formulated, such that the maximum upper bound on the admissible delay can be determined by using the LMI toolbox in Matlab. Finally, an illustrative example demonstrates the effectiveness of proposed method.

Key words: Descriptor system; Delay-dependent; LMI; Robust stability

1 引 言

对一个实际控制系统,不确定和时滞是普遍存在的,并且它们往往是导致系统不稳定或性能下降的主要原因,因而对不确定时滞系统的研究是必要的. 对时滞不确定系统的渐近稳定性研究已有很多结果,包括时滞无关的结论和时滞相关的结论[1-3]. 在时滞较小的情况下,显然时滞相关的条件比时滞无关的条件优越. 对时滞相关的结论一般采用系统模型变换和矩阵向量不等式方法得到. 在随后的研究中,人们发现这样得到的时滞相关的条件仍十分保守. 为了降低所得结果的保守性,许多学者作了不懈的努力. 文献[4]充分考虑了 $x(t-\tau)$ 和 $x(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s$ 之间相互关系的最优权矩阵,文献[5,6]则避免采用系统模型变换和向量不等式,使所得的时滞相关的条件有了很大的改进.

广义系统比正常系统更能准确地描述实际的动态系统[7],因而随着科学技术的发展和大型工程技术的需要,广义系统的研究受到了广泛关注. 目前对于广义不确定时滞系统的研究已有一些结果[8-11],但由于广义系统的复杂性,关于时滞相关的相应结果很少.

本文利用 Lyapunov 稳定性理论和线性矩阵不等式工具,将文献[4]及文献[6]的思想和方法相结合来讨论广义系统,无须对广义系统作假设和模型变换,得到了广义不确定时滞系统的时滞相关稳定性条件. 最后给出的仿真示例,表明了本文方法的有

收稿日期: 2006-06-09; 修回日期: 2006-10-07.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60474029).
作者简介: 王天成(1967—),男,山东烟台人,副教授,博士,从事鲁棒控制理论与应用的研究; 辛杰(1974—),男,山东烟台人,副教授,博士,从事微分方程稳定性理论与应用的研究.

效性.

2　问题描述

考虑如下一类不确定广义时滞系统:

$$E\dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (A_1 + \Delta A_1(t))x(t-\tau),$$
$$x(t) = \phi(t),\ t \in [-d, 0]. \quad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 为系统的状态; E, A, A_1 为已知的适当维数矩阵且 $\operatorname{rank} E \le n$; $\Delta A(t)$, $\Delta A_1(t)$ 为系统的不确定项, 并且假设它们具有如下结构:

$$[\Delta A(t) \quad \Delta A_1(t)] = HF(t)[N \quad N_1], \quad (2a)$$

H, N, N_1 为适当维数的已知常数矩阵, $F(t)$ 是一个具有 Lebesgue 可测元的未知函数矩阵, 且满足

$$F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \le I; \quad (2b)$$

系统的状态时滞 τ 为定常不确定但有界的正数, 满足 $0 < \tau \le d$, d 为已知常数; $\phi(t) \in c[-d, 0]$ 为已知相容的初始函数. 为方便, 记 $\overline{A} = A + \Delta A(t)$, $\overline{A_1} = A_1 + \Delta A_1(t)$.

定义 1[8]　设 E, A 同为 n 阶方阵, 对于标量 s, 如果行列式 $\det(sE - A)$ 不恒等于零, 则称 (E, A) 是正则的.

引理 1[8]　如果 (E, A) 是正则的, 则时滞广义系统

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-\tau),$$
$$x(t) = \phi(t),\ t \in [-d, 0]$$

满足相容初始函数 $\phi(t)$ 的解存在唯一.

引理 2　若存在矩阵 P, 满足不等式 $P^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}P < 0$, 则 (E, A) 是正则的.

引理 3[12]　给定适当维数的实数矩阵 Σ, H, L, 其中 Σ 为对称矩阵, 则

$$\Sigma + HF^{\mathrm{T}}(t)L + L^{\mathrm{T}}F(t)H^{\mathrm{T}} < 0$$

成立的充分必要条件为存在正数 ε, 使得 $\Sigma + \varepsilon L^{\mathrm{T}}L + \varepsilon^{-1}HH^{\mathrm{T}} < 0$ 成立, 其中 $F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \le I$.

3　主要结果

定理 1　对不确定广义时滞系统 (1), 如果存在对称正定矩阵 Q, Z, 适当维数矩阵 P, M_1, M_2, 使得对广义系统 (1) 的任意不确定性 (2), 下列矩阵不等式成立:

$$P^{\mathrm{T}}E = E^{\mathrm{T}}P \ge 0, \quad (3)$$
$$\overline{A}^{\mathrm{T}}P + P^{\mathrm{T}}\overline{A} < 0, \quad (4)$$
$$\boldsymbol{\Omega} < 0, \quad (5)$$
$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} & y \\ y^{\mathrm{T}} & -\rho E^{\mathrm{T}}ZE \end{bmatrix} \le 0, \quad (6)$$

则不确定广义时滞系统 (1) 是鲁棒渐近稳定的. 其中

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} P^{\mathrm{T}}\overline{A} + \overline{A}^{\mathrm{T}}P + Q + M_1 + M_1^{\mathrm{T}} & P^{\mathrm{T}}\overline{A_1} - M_1 + M_2^{\mathrm{T}} & \overline{A}^{\mathrm{T}}Z \\ * & -Q - M_2 - M_2^{\mathrm{T}} & \overline{A_1}^{\mathrm{T}}Z \\ * & * & -\rho Z \end{bmatrix},$$

$$y = \begin{bmatrix} -M_1 \\ -M_2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \rho = \frac{1}{d}.$$

证明　由引理 1 和引理 2, 若不等式 (4) 成立, 则广义系统 (1) 的解存在唯一. 下面证明广义系统 (1) 的解的渐近稳定性. 构造如下 Lyapunov 泛函

$$V(x(t)) = x^{\mathrm{T}}(t)P^{\mathrm{T}}Ex(t) + \int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\,\mathrm{d}s + \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\alpha}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}ZE\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\alpha,$$

并利用关系式

$$2[x^{\mathrm{T}}(t)M_1 + x^{\mathrm{T}}(t-\tau)M_2] \times \left[x(t) - x(t-\tau) - \int_{t-\tau}^{t}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s\right] = 0,$$

求 $V(x(t))$ 沿广义系统 (1) 的解轨线的时间导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) = {} & 2x^{\mathrm{T}}(t)P^{\mathrm{T}}E\dot{x}(t) + x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) - x^{\mathrm{T}}(t-\tau)Qx(t-\tau) + \tau\dot{x}^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}ZE\dot{x}(t) - \\
& \int_{t-\tau}^{t}\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}ZE\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s + 2[x^{\mathrm{T}}(t)M_1 + x^{\mathrm{T}}(t-\tau)M_2] \times \\
& \left[x(t) - x(t-\tau) - \int_{t-\tau}^{t}\dot{x}(s)\,\mathrm{d}s\right] = \\
& \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\{x^{\mathrm{T}}(t)[P^{\mathrm{T}}\overline{A} + \overline{A}^{\mathrm{T}}P + Q + M_1 + M_1^{\mathrm{T}} + \tau\overline{A}^{\mathrm{T}}Z\overline{A}]x(t) + 2x^{\mathrm{T}}(t)[P^{\mathrm{T}}\overline{A_1} + \\
& \tau\overline{A}^{\mathrm{T}}Z\overline{A_1} - M_1 + M_2^{\mathrm{T}}]x(t-\tau) - 2\tau x^{\mathrm{T}}(t)M_1\dot{x}(s) + x^{\mathrm{T}}(t-\tau)[-Q + \\
& \tau\overline{A_1}^{\mathrm{T}}Z\overline{A_1} - M_2 - M_2^{\mathrm{T}}]x(t-\tau) - 2\tau x^{\mathrm{T}}(t-\tau)M_2\dot{x}(s) - \tau\dot{x}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}ZE\dot{x}(s)\}\mathrm{d}s = \\
& \frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t}\xi^{\mathrm{T}}(t,s)\boldsymbol{\Pi}\xi(t,s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{\Pi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi} & P^{\mathrm{T}}\overline{A_1} - M_1 + M_2^{\mathrm{T}} + \tau\overline{A}^{\mathrm{T}}Z\overline{A_1} & -\tau M_1 \\ * & -Q - M_2 - M_2^{\mathrm{T}} + \tau\overline{A_1}^{\mathrm{T}}Z\overline{A_1} & -\tau M_2 \\ * & * & -\tau E^{\mathrm{T}}ZE \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Psi} = P^{\mathrm{T}}\overline{A} + \overline{A}^{\mathrm{T}}P + Q + M_1 + M_1^{\mathrm{T}} + \tau\overline{A}^{\mathrm{T}}Z\overline{A},$$

$$\xi^{\mathrm{T}}(t,s) = [x^{\mathrm{T}}(t) \quad x^{\mathrm{T}}(t-\tau) \quad \dot{x}^{\mathrm{T}}(s)].$$

由 Schur 补引理, $\boldsymbol{\Pi} \le 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} \Theta & P^{\mathrm{T}}\overline{A_1} - M_1 + M_2^{\mathrm{T}} & \overline{A}^{\mathrm{T}} Z & -M_1 \\ * & -Q - M_2 - M_2^{\mathrm{T}} & \overline{A}_1^{\mathrm{T}} Z & -M_2 \\ * & * & -\frac{1}{\tau} Z & 0 \\ * & * & * & -\frac{1}{\tau} E^{\mathrm{T}} Z E \end{bmatrix} \leq 0,$$

$\Theta = P^{\mathrm{T}}\overline{A} + \overline{A}^{\mathrm{T}} P + Q + M_1 + M_1^{\mathrm{T}}$.

因此,若不等式(6) 成立,则可得 $\Pi \leq 0$,从而 $\dot{V}(x(t)) \leq 0$. 若不等式(5) 及(6) 成立,则由 $\dot{V}(x(t)) = 0$ 可得 $x(t) = 0$,即 $\dot{V}(x(t)) = 0$ 只含有广义系统(1) 的零解. 根据 Lyapunov 稳定性定理,广义系统(1) 是渐近稳定的. □

根据引理 3 和 Schur 补引理,不等式(6) 成立当且仅当存在正常数 ε,使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \begin{matrix} P^{\mathrm{T}}A_1 - M_1 + \\ M_2^{\mathrm{T}} + \varepsilon N^{\mathrm{T}} N_1 \end{matrix} & A^{\mathrm{T}} Z & P^{\mathrm{T}} H & -M_1 \\ * & \begin{matrix} -Q - M_2 - \\ M_2^{\mathrm{T}} + \varepsilon N_1^{\mathrm{T}} N_1 \end{matrix} & A_1^{\mathrm{T}} Z & 0 & -M_2 \\ * & * & -\rho Z & ZH & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon I & 0 \\ * & * & * & * & -\rho E^{\mathrm{T}} Z E \end{bmatrix} \leq 0,$$

其中

$$\Gamma = P^{\mathrm{T}} A + A^{\mathrm{T}} P + Q + M_1 + M_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon N^{\mathrm{T}} N.$$

定义

$$\Xi = \begin{bmatrix} \begin{matrix} P^{\mathrm{T}}A + A^{\mathrm{T}}P + Q + \\ M_1 + M_1^{\mathrm{T}} + \varepsilon N^{\mathrm{T}} N \end{matrix} & \begin{matrix} P^{\mathrm{T}}A_1 - M_1 + \\ M_2^{\mathrm{T}} + \varepsilon N^{\mathrm{T}} N_1 \end{matrix} & A^{\mathrm{T}} Z & P^{\mathrm{T}} H \\ * & \begin{matrix} -Q - M_2 - \\ M_2^{\mathrm{T}} + \varepsilon N_1^{\mathrm{T}} N_1 \end{matrix} & A_1^{\mathrm{T}} Z & 0 \\ * & * & -\rho Z & ZH \\ * & * & * & -\varepsilon I \end{bmatrix},$$

则矩阵不等式(5) 和(6) 分别等价于如下线性矩阵不等式成立:

$$\Xi < 0, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} \Xi & v \\ v^{\mathrm{T}} & -\rho E^{\mathrm{T}} Z E \end{bmatrix} \leq 0, \tag{8}$$

其中

$$v^{\mathrm{T}} = [-M_1^{\mathrm{T}} \quad -M_2^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0].$$

同样,矩阵不等式(4) 等价于如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} P + P^{\mathrm{T}} A + \varepsilon N^{\mathrm{T}} N & P^{\mathrm{T}} H \\ * & -\varepsilon I \end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

综上,利用线性矩阵不等式可得如下不确定广义时滞系统(1) 的时滞相关鲁棒渐近稳定定理:

定理 2 对不确定广义时滞系统(1),如果存在对称正定矩阵 Q, Z,适当维数矩阵 P, M_1, M_2 和正数 ε,使得对广义系统(1) 的任意不确定性(2),线性矩阵不等式(3),(7) ~ (9) 成立,则不确定广义时滞系统(1) 是鲁棒渐近稳定的.

进一步,通过求解如下优化问题:

$$\min \rho,$$
$$\text{s.t. 线性矩阵不等式(3),(7) ～ (9) 成立}, \tag{10}$$

可以得到保证不确定广义时滞系统渐近稳定的最大时滞界 d^*.

4 仿真示例

考虑不确定奇异时滞系统(1),其中[11]

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & -0.1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A(t) = \begin{bmatrix} 0.3\sin\theta & 0.3\cos\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1(t) = \begin{bmatrix} 0.213\sin\theta & 0.213\cos\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

此时取

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} 0.213 & 0 \\ 0 & 0.213 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

则显然 $F^{\mathrm{T}}(t) F(t) \leq I$,利用 Matlab 软件 LMI 工具箱 GEVP 解优化问题(10),没有文献[11] 中的假设 3.1,可得到保证广义系统(1) 渐近稳定的最大时滞界为 $d^* = 0.9187$.

5 结 语

对于一个实际控制系统,时滞和不确定是不可避免的. 本文利用 Lyapunov 泛函方法和线性矩阵不等式工具,讨论了不确定广义时滞系统的时滞相关渐近稳定性问题,无需对广义系统作变换和假设. 进一步,求解基于线性矩阵不等式(LMI) 约束的凸优化问题,可得到保证广义系统渐近稳定的最大时滞界.

参考文献(References)

[1] Park P. A delay-dependent stability criterion for systems with uncertain time- invariant delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1999, 44(4): 876-877.

[2] Moon Y S, Park P, Kwon W H. Delays-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems [J]. Int J Control, 2001, 74: 1447-1455.

[3] Fridman E, Shaked U. An improved stabilization method for linear time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1931-1937.

(下转第 1080 页)

工业出版社, 2003.
(Li Deng-feng. Fuzzy multi-objective many-person decision makings and games [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003.)

[6] 李敏. 试论指派问题的对称解法[J]. 青海大学学报, 1997, 15(3): 13-19.
(Li Min. A trial discussion on the symmetrical solving method of allotter problem[J]. J of Qinghai University, 1997, 15(3): 13-19.)

[7] Kang C Y, Zhang X H, Zhang A H, et al. Underwater acoustic targets classification using welch spectrum estimation and neural networks[C]. Advances in Neural Networks ISNN2004. Dalian: Springer, 2004: 930-935.

[8] Zhang X H, Kang C Y, Xia Z J. Recognition of radiated noises of ships using auditory features and support vector machines [C]. Advances in Neural Networks ISNN2005. Chongqing: Springer, 2005: 387-392.

(上接第 1072 页)

[4] Wu M, He Y, She J H. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems [J]. Automatica, 2004, 40:1435-1439.

[5] Xu S, James L. Improved delay-dependent stability criteria for time-delay systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(3): 384-387.

[6] Xu S, James L, Zou Y. New results on delay-dependent robust H_∞ control for systems with time-varying delays [J]. Automatica, 2006, 42(2): 343-348.

[7] Dai L Y. Singular Control Systems[M]. Berlin: Spring-Verlag, 1989.

[8] Xu S Y, Paul V D, Stefan R, et al. Robust stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(7): 1122-1128.

[9] Masubuchi, Kamitane Y, Ohara A, et al. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach [J]. Automatica, 1997, 33(4): 669-673.

[10] Fridman E. Stability of linear descriptor systems with delay: A Lyapunov-based approach [J]. J of Mathematics Analysis and Application, 2002, 273(1): 24-44.

[11] Zhong R X, Yang Z. Robust stability analysis of singular linear system with delay and parameter uncertainty [J]. J of Control Theory and Appplications, 2005, 22(2): 195-199.

[12] Xie Li. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J Control, 1996, 63(4): 741-750.

(上接第 1076 页)

[15] Nersesov S G, Chellaboina V, Haddad W M. A generalization of Poincare's theorem to hybrid and impulsive dynamical systems [C]. Proc of American Control Conf. Anchorage, 2002: 1240-1245.

[16] Lygeros J, Johansson K H, Simic S N, et al. Dynamical properties of hybrid automata [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(1): 2-16.

[17] 林相泽, 田玉平. 切换系统的不变性原理与不变集的状态反馈镇定[J]. 控制与决策, 2005, 20(2): 127-131.
(Lin Xiang-ze, Tian Yu-ping. Invariance principle and state feedback stabilization of invariant sets of switched systems[J]. Control and Decision, 2005, 20(2): 127-131.)

下 期 要 目