

文章编号: 1001-0920(2007)09-0977-06

## 受时变约束柔性臂鲁棒 RBF 神经网络力/位置控制

曹小涛, 李元春

(吉林大学 通信工程学院, 长春 130022)

**摘要:** 研究了受时变约束的柔性臂系统, 建立了分布参数模型, 通过奇异摄动方法将该模型划分为表征系统刚性运动的集中参数子系统和表征系统振动的分布参数子系统. 设计了集中参数子系统的鲁棒 RBF 神经网络力/位置控制算法和分布参数子系统的鲁棒自适应振动抑制控制算法. 理论分析及仿真结果验证了该方法的有效性.

**关键词:** 柔性臂; 分布参数; 奇异摄动; RBF 神经网络; 鲁棒自适应

**中图分类号:** TP241      **文献标识码:** A

## Robust RBF neural network force/position control of time varying constrained flexible manipulator

CAO Xiaotao, LI Yuanchun

(College of Communication Engineering, Jilin University, Changchun 130022, China. Correspondent: LI Yuanchun, E-mail: liyc@jlu.edu.cn)

**Abstract:** Time varying constrained flexible manipulator system is studied. The distributed parameter model is obtained. Then, the obtained model is divided into two subsystems which include a lumped parameter subsystem describing the rigid motion and a distributed parameter subsystem expressing the vibration by virtue of the singular perturbation method. A robust RBF neural network force/position controller of lumped parameter subsystem is designed and a robust adaptive controller is designed to suppress the vibration of the system. Theoretic analysis and numerical simulation show the effectiveness of the proposed control method.

**Key words:** Flexible manipulator; Distributed parameter; Singular perturbation; RBF neural network; Robust adaptive

### 1 引言

柔性机械臂在从事装配、抛光、擦洗等受约束的工作中, 环境会施加给机械臂作用力, 因此必须考虑力和位置的混合控制问题. 而在实际工作中环境有可能是变动的, 因此可将系统受到的约束划分为非时变和时变两种. 针对受非时变约束的刚性臂系统已经有很多学者进行了研究<sup>[1,2]</sup>; 针对受时变约束的刚性臂系统, 文献[3]提出了基于关节空间正交化的自适应控制方法. 针对受非时变约束柔性臂系统, 一些学者提出了自适应模糊<sup>[4]</sup>、奇异摄动<sup>[5]</sup>、递归神经网络<sup>[6]</sup>等方法. 然而对于受时变约束的柔性臂系统却很少有学者研究.

从国内外研究现状来看, 柔性臂系统的模型多数建立于集中参数模型的基础上. 集中参数模型由于存在控制和观测溢出等问题, 被忽略的剩余模态

容易使闭环系统不稳定. 另一方面, 基于集中参数模型设计的控制器, 为解决溢出等问题, 通常控制器结构和阶次比较高, 不易工程实现. 因此, 一些学者直接研究了柔性臂的分布参数模型, 提出了剪切力反馈<sup>[7]</sup>、应变反馈<sup>[8]</sup>、变结构<sup>[9]</sup>等控制方法. 然而这些方法均是针对不受约束的柔性臂系统设计的, 而针对受约束柔性臂系统的准静态控制方法<sup>[10]</sup>无法保证系统理论上的稳定性.

本文针对受时变约束的柔性臂系统, 建立了分布参数模型, 避免了集中参数模型带来的问题. 通过奇异摄动方法将模型划分为表征系统刚性运动的集中参数子系统和表征系统振动的分布参数子系统, 降低了分布参数模型的复杂性. 本文针对集中参数子系统, 设计了鲁棒 RBF 神经网络力位置控制器; 针对分布参数子系统, 设计了鲁棒自适应控制器以

收稿日期: 2006-05-29; 修回日期: 2006-09-30.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60375030, 60674091).

作者简介: 曹小涛(1980—), 男, 河南巩义人, 博士生, 从事机器人控制的研究; 李元春(1962—), 男, 长春人, 教授, 博士生导师, 从事智能机械与机器人控制的研究.

抑制系统的振动.

## 2 分布参数模型的建立

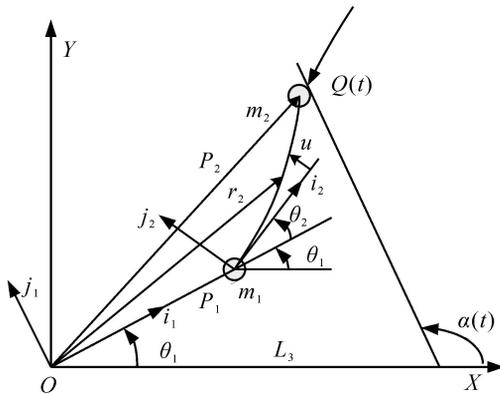


图1 受时变约束双连杆柔性臂

如图1所示,本文的研究对象为水平面的柔性臂系统,时变约束面与X轴的夹角为 $\alpha(t)$ .柔性臂第1个连杆为刚性,第2个为柔性.长度分别为 $L_i (i = 1, 2)$ ,柔性连杆质量密度为 $\rho$ ;抗挠刚度为 $EI$ ;  $J_i$ 和 $i$ 分别表示电机 $i$ 的转动惯量和力矩; $i$ 为关节角; $m_i$ 表示连杆末端的集中质量. $u(t, r)$ 表示柔性连杆在 $r$ 处的形变; $L_3$ 为约束面与X轴的交点到原点的距离. $Q(t)$ 表示 $i_2$ 方向轴向力.本文以上标“ $\cdot$ ”表示对 $t$ 的导数;以右上标“ $\prime$ ”表示对 $r$ 的导数.下标“ $E$ ”表示“ $r = L_2$ ”;下标“ $0$ ”表示“ $r = 0$ ”.以 $(X_{P_2}, Y_{P_2})$ 表示柔性臂末端与约束面接触点的坐标,系统的约束条件可表示为

$$(X_{P_2}, Y_{P_2}) = (L_3 - X_{P_2}) \tan \alpha + Y_{P_2} = 0; \quad (1)$$

正交单位矢量 $(i_1, j_1)$ 和 $(i_2, j_2)$ 可以表示为

$$\begin{aligned} i_1 &= [\cos \theta_1, \sin \theta_1]^T, j_1 = [-\sin \theta_1, \cos \theta_1]^T, \\ i_2 &= [\cos(\theta_1 + \theta_2), \sin(\theta_1 + \theta_2)]^T, \\ j_2 &= [-\sin(\theta_1 + \theta_2), \cos(\theta_1 + \theta_2)]^T. \end{aligned} \quad (2)$$

以 $P_i$ 表示连杆 $i$ 末端的位置矢量, $r_2$ 表示柔性连杆上位置 $r$ 处的位置矢量,则

$$\begin{aligned} P_1 &= L_1 i_1, P_2 = L_1 i_1 + L_2 i_2 + u_E j_2, \\ r_2 &= L_1 i_1 + r i_2 + u j_2. \end{aligned} \quad (3)$$

由式(1)~(3)可知系统的约束条件为

$$\begin{aligned} &= [L_3 - L_1 \cos \theta_1 - L_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \\ &u_E \sin(\theta_1 + \theta_2)] \tan \alpha + L_1 \sin \theta_1 + \\ &L_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + u_E \cos(\theta_1 + \theta_2); \end{aligned} \quad (4)$$

系统的动能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\ &\frac{1}{2} \int_{i=1}^2 m_i \dot{P}_i^T \dot{P}_i + \frac{1}{2} \int_0^{L_2} \rho r_2^T \dot{r}_2 dr; \end{aligned} \quad (5)$$

势能为

$$V = \frac{1}{2} \int_0^{L_2} EI (u')^2 dr - \frac{1}{2} \int_0^{L_2} Q(t) (u')^2 dr; \quad (6)$$

虚功为

$$W = \int_{i=1}^2 \lambda_i \delta i_i. \quad (7)$$

定义 $\lambda_i$ 为与约束条件(4)相关的拉格朗日乘子.将式(4)~(7)代入哈密顿原理<sup>[10]</sup>,可得系统的分布参数模型为

$$\begin{aligned} M(\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2) + C(\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) + F(\theta_1, \theta_2, \dot{u}_E, \ddot{u}_E) = \\ + \frac{\partial}{\partial u}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t, r) + \frac{EI}{\rho} u''(t, r) + \frac{Q(t)}{\rho} u'(t, r) = \\ - r(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - L_1 \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 - L_1 \dot{\theta}_1^2 \sin \theta_2; \end{aligned} \quad (9)$$

$$EI \left( \frac{m_2}{\rho} u_{EE} + u_{EEE} \right) + Q(t) u_E = - \frac{\partial}{\partial u_E}. \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} M &= [M_{11}, M_{12}]^T, C = [C_1, C_2]^T, F = [F_1, F_2]^T, \\ M &= \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial} = \left[ \frac{\partial}{\partial \theta_1}, \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right]^T. \\ M_{11} &= J_1 + J_2 + m_1 L_1^2 + m_2 L_1^2 + m_2 L_2^2 + \\ &2m_2 L_1 L_2 \cos \theta_2 + L_1^2 L_2 + \\ &L_1^3/3 + L_1 L_2^2 \cos \theta_2, \\ M_{12} &= M_{21} = \\ J_2 + m_2 L_2^2 + m_2 L_1 L_2 \cos \theta_2 + \\ &L_1^3/3 + L_1 L_2^2 \cos \theta_2/2, \\ M_{22} &= J_2 + m_2 L_2^2 + L_1^3/3, \\ C_{11} &= -m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 - L_1 L_2^2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2/2, \\ C_{12} &= -m_2 L_1 L_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 - \\ &L_1 L_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2/2, \\ C_{21} &= m_2 L_1 L_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 + L_1 L_2^2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2/2, \\ C_{22} &= 0, \\ F_1 &= -2(m_2 L_1 \dot{u}_E + L_1 \int_0^{L_2} \dot{u} dr) (\dot{\theta}_1 + \\ &\dot{\theta}_2) \sin \theta_2 + m_2 (L_1 \cos \theta_2 + L_2) \ddot{u}_E + \\ &\int_0^{L_2} (L_1 \sin \theta_2 + r) \ddot{u} dr, \\ F_2 &= m_2 L_2 \ddot{u}_E + \int_0^{L_2} r \ddot{u} dr. \end{aligned}$$

由动力学方程可以看出,系统是复杂的微分偏微分混合方程组,直接从其出发研究控制策略十分困难.为便于以下奇异摄动模型的推导,根据式(9)和(10),在(8)中消去 $\ddot{u}$ 和 $\ddot{u}_E$ 项可得式(8)的另一种形式为

$$J_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + G(\theta_2, \theta_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_1, \dot{u}, \dot{u}_E) +$$

$$EIL_1 \cos \alpha_2 u_0''' - EIu_0 + Q(t) u_E = \left(1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - (L_2 + L_1 \cos \alpha_2) \frac{\partial}{\partial u_E}\right) \ddot{z}_1 \quad (11)$$

$$J_2 (\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2) - EIu_0 + Q(t) u_E = \left(2 + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - L_2 \frac{\partial}{\partial u_E}\right) \ddot{z}_2 \quad (12)$$

其中

$$G = [J_1 + m_1 L_1^2 + (m_2 + L_2) L_1^2 \sin^2 \alpha_2] \ddot{z}_1 - (m_2 + L_2) L_1^2 \dot{\alpha}_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 - (m_2 L_2 + L_2^2/2) L_1 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2)^2 \sin \alpha_2 - 2(m_2 \dot{u}_E + \int_0^{L_2} \dot{u} dr) L_1 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \sin \alpha_2$$

### 3 分布参数奇异摄动模型

首先,引入摄动参数  $1/\epsilon = EIL_2^4$ , 定义新变量  $x = r/L_2, x \in [0, 1], y = u/L_2$ , 设  $y = z$ .

#### 3.1 集中参数子系统

将以上所定义的变量代入动力学方程(8)中,并令摄动参数  $\epsilon = 0$ , 可得集中参数子系统为

$$M(\alpha_s) \ddot{z}_s + C(\alpha_s, \dot{\alpha}_s) \dot{z}_s = \dot{\alpha}_s + \frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} \quad (13)$$

其中:下标“s”表示集中参数子系统的变量,下标“ $\epsilon = 0$ ”表示摄动参数为0时的值.式(13)与受约束刚性臂的动力学方程相同.

#### 3.2 分布参数子系统

利用式(9),在式(11)中消去  $\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2$  项,并将所定义的变量代入其中,可得

$$\begin{aligned} & \ddot{z}(t, x) + z_{xxxx}(t, x) + QL_2^2 z_{xx}(t, x)/\epsilon = \\ & - x \left[ 1 + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - (L_2 + L_1 \cos \alpha_2) \frac{\partial}{\partial u_E} - \right. \\ & G(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_1) - \\ & L_1 L_2^2 \cos \alpha_2 z_{xxx}(t, 0) + \\ & \left. L_2^3 z_{xx}(t, 0) - Q(t) L_2 z(t, 1) \right] / J_2 - \\ & (L_1 \cos \alpha_2 + L_1^2 \sin^2 \alpha_2) / L_2, \end{aligned} \quad (14)$$

其中下标“x”表示变量对 x 的偏导数.

为推导分布参数子系统,首先在式(14)中令摄动参数  $\epsilon = 0$ , 可得

$$\begin{aligned} & z_{xxxx}(t, x) = \\ & - x \left[ 1_s + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \Big|_{\alpha=0} - (L_2 + \right. \\ & L_1 \cos \alpha_2) \frac{\partial}{\partial u_E} \Big|_{\alpha=0} - G(\alpha_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, 0, 0) - \\ & \left. L_1 L_2^2 \cos \alpha_2 z_{xxxx}(t, 0) + L_2^3 z_{xx}(t, 0) \right] / J_2 - \\ & (L_1 \cos \alpha_2 + L_1^2 \sin^2 \alpha_2) / L_2. \end{aligned} \quad (15)$$

定义新变量  $z_f = z - z_s, f = \alpha - \alpha_s$ , 其中下标“f”表示分布参数子系统的变量.将这两个变量以及式(15)代入(14)并考虑到  $\epsilon = 0$ , 可得

$$\begin{aligned} & \ddot{z}(t, x) + z_{xxxxf}(t, x) + QL_2^2 z_{xx}(t, x)/\epsilon = \\ & - x \left[ 1_f - L_1 L_2^2 \cos \alpha_2 z_{xxxxf}(t, 0) + \right. \\ & L_2 z(t, 1) [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \text{tg} \alpha_1 - \\ & \left. \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] + 2 [m_2 L_2 \dot{z}(t, 1) + \right. \\ & \left. L_2^2 \int_0^1 \dot{z} dx] L_1 (\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2) \sin \alpha_2 + \right. \\ & \left. L_2^3 z_{xxf}(t, 0) - Q(t) L_2 z(t, 1) \right] / J_2. \end{aligned} \quad (16)$$

在式(16)中引入伸长时标  $\mu = t/\sqrt{\epsilon}$ , 并考虑集中参数子系统的变量  $z_s$  和  $\alpha_s$  在伸长时标的情况下为常量, 即对伸长时标  $\mu$  的导数为 0, 可得

$$\begin{aligned} & z_{\mu f}(\mu, x) + z_{xxxxf}(\mu, x) + \\ & QL_2^2 z_{xx}(\mu, x)/\epsilon = \\ & - x \left[ 1_f - L_1 L_2^2 \cos \alpha_2 z_{xxxxf}(\mu, 0) + \right. \\ & L_2 z(\mu, 1) [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) \text{tg} \alpha_1 - \\ & \left. \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] + L_2^3 z_{xxf}(\mu, 0) - \right. \\ & \left. Q(\mu) L_2 z(\mu, 1) \right] / J_2. \end{aligned} \quad (17)$$

由于摄动参数很小,  $\epsilon \rightarrow 0$ , 由上式可得

$$\begin{aligned} & z_{\mu f}(\mu, x) + z_{xxxxf}(\mu, x) = \\ & - x \left[ 1_f - L_1 L_2^2 \cos \alpha_2 z_{xxxxf}(\mu, 0) + \right. \\ & \left. L_2^3 z_{xxf}(\mu, 0) \right] / J_2. \end{aligned} \quad (18)$$

同理,利用式(9),在(12)中消去  $\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2$  项,并采用与以上相同的方法,可得

$$\begin{aligned} & z_{\mu f}(\mu, x) + z_{xxxxf}(\mu, x) = \\ & - x \left[ 2_f + L_2^3 z_{xxf}(\mu, 0) \right] / J_2. \end{aligned} \quad (19)$$

同理,对于边界条件(10),由以上方法,可得

$$\begin{aligned} & z_f(\mu, 0) = z_{xf}(\mu, 0) = z_{xxf}(\mu, 1) = 0, \\ & \frac{m_2}{L_2} z_{xxxx}(\mu, 1) + z_{xxx}(\mu, 1) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

分布参数子系统的方程为式(18)和(19),其边界条件为式(20).分布参数子系统的动力学方程表示系统的振动,其模型较原分布参数模型简单.

### 4 集中参数子系统鲁棒 RBF 神经网络控制

在  $\epsilon = 0$  的情况下,由式(4)可知约束条件为

$$\begin{aligned} & s(\alpha_1, \alpha_2, 0, \alpha_s) = \\ & [L_3 - L_1 \cos \alpha_1 - L_2 \cos(\alpha_1 + \alpha_2)] \text{tg} \alpha_1 + \\ & L_1 \sin \alpha_1 + L_2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

易验证  $\frac{\partial}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_s}$ , 因此集中参数子系统的模型可表达为

$$\begin{aligned} & M(\alpha_s) \ddot{z}_s + C(\alpha_s, \dot{\alpha}_s) \dot{z}_s + d = \\ & \dot{\alpha}_s + \frac{\partial}{\partial \alpha_s}, \end{aligned} \quad (22)$$

其中  $d$  表示系统未建模的动力学和外在干扰.

集中参数子系统的控制目的是使得系统(22)跟踪期望角度  $s_d$  和拉格朗日乘子  $d$ . 在式(21)的限制下,  $s_1$  和  $s_2$  中仅有一个独立变量, 取该独立变量为  $s_1$ . 假设总存在以下函数关系:

$$s_2 = (s_1, \dots), \tag{23}$$

且二阶连续可微, 定义新的状态变量

$$v = [v_1, v_2]^T = [s_1, s_2 - (s_1, \dots)]^T = [s_1, 0]^T.$$

定义

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \partial / \partial v_1 & 1 \end{bmatrix}, \\ H_1 = [0, \frac{\partial}{\partial}]^T, H_2 = [0, H_{22}]^T, \\ H_{22} = \frac{\partial^2}{\partial v_1^2} v_1^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial v_1 \partial} v_1 + \frac{\partial^2}{\partial^2} + \frac{\partial}{\partial};$$

则以下等式成立:

$$\dot{s} = T\dot{v} + H_1, \ddot{s} = T\ddot{v} + H_2. \tag{24}$$

将式(23), (24) 代入(22), 可得

$$M_1 \begin{bmatrix} \ddot{v}_1 \end{bmatrix} + H + d = \dot{s}. \tag{25}$$

其中

$$M_1 = [MTE - \frac{\partial}{\partial s}], E = [1, 0]^T,$$

$$H = MH_2 + C(T\dot{v} + H_1).$$

假设矩阵  $M_1$  总是满秩的, 定义滑模面

$$S = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 + k_1 e_1 \\ k_2(\ddot{e}_1 - d) + (\dot{e}_1 - d) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

其中:  $e_1 = v_1 - v_{1d}; k_1 > 0, k_2 > 0$  为设计参数. 则

$$\dot{S} = M_1^{-1} \dot{s} + f - M_1^{-1} d, \tag{27}$$

其中

$$f = \begin{bmatrix} -\ddot{v}_{1d} + k_1 \dot{e}_1 \\ k_2(\ddot{e}_1 - d) - \dot{e}_1 \end{bmatrix} - M_1^{-1} H.$$

由于 RBF 神经网络控制无需系统的精确模型且能充分逼近复杂的非线性函数<sup>[11]</sup>, 本文中用 RBF 神经网络来近似非线性函数  $f$ . RBF 结构为

$$y_1 = U_{NN}(W, V, m, c) = W^T (V^T x_1). \tag{28}$$

其中:  $y_1 \in R^{1 \times 1}$  为神经网络输出,  $x_1 \in R^{11 \times 1}$  为输入量,  $x_1 = [v_1, \dot{v}_1, v_{1d}, \dot{v}_{1d}, \ddot{v}_{1d}, \dots, \ddot{d}, \dot{d}]^T; V \in R^{11 \times k}$  表示输入层到隐层的连接权重,  $k$  表示隐层节点数目;  $\phi^k(x_1)$  为径向基函数,  $(V^T x_1) = \exp[-(V^T x_1 - m)^2 / c^2]; m \in R^{k \times 1}, c \in R^{k \times 1}$  为网络的中心和宽度;  $W \in R^{k \times 1}$  表示隐层到输出层连接权重. 假设存在理想参数  $W^{*T}, V^{*T}, m^*, c^*$ , 使得函数

$f$  可被近似为

$$f(x_1) = W^{*T} (V^{*T} x_1) + \epsilon_1, \tag{29}$$

其中  $\epsilon_1$  表示神经网络的近似误差.

本文提出的集中参数子系统控制器结构为

$$\dot{s} = M_1 (s_0 + s_1). \tag{30}$$

其中  $s_0$  和  $s_1$  分别为 RBF 神经网络和鲁棒控制器.

$$s_0 = -KS - W^T (\hat{V}^T x_1). \tag{31}$$

其中:  $K \in R^{2 \times 2}$  为对角正定矩阵,  $(\hat{\cdot})$  表示函数  $(\cdot)^*$  的估计值,  $(\tilde{\cdot})$  表示函数  $(\cdot)^* - (\hat{\cdot})$ .

$\tilde{\cdot}$  的 Taylor 展开式为

$$\tilde{\cdot} = v \tilde{V}^T x_1 + m \tilde{m} + c \tilde{c} + h. \tag{32}$$

其中

$$v = \left[ \frac{\partial \tilde{v}_1}{\partial (V^T x_1)} \dots \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial (V^T x_1)} \right] \Big|_{v^T x_1 = \hat{v}^T x_1} \in R^{k \times k}, \\ m = \left[ \frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial m} \dots \frac{\partial \tilde{m}_k}{\partial m} \right] \Big|_{m = \hat{m}} \in R^{k \times k}, \\ c = \left[ \frac{\partial \tilde{c}_1}{\partial c} \dots \frac{\partial \tilde{c}_k}{\partial c} \right] \Big|_{c = \hat{c}_1} \in R^{k \times k},$$

$h$  为 Taylor 展开式的高阶项.

将式(29) ~ (32) 代入式(27), 化简得

$$\dot{S} = -KS + \tilde{W}^T \hat{V} + W^T v \tilde{V}^T x_1 + W^T m \tilde{m} + W^T c \tilde{c} + s_1 + E_1, \tag{33}$$

其中

$$E_1 = \tilde{W}^T v \tilde{V}^T x_1 + \tilde{W}^T m \tilde{m} + \tilde{W}^T c \tilde{c} + W^{*T} h + \epsilon_1 - M_1^{-1} d.$$

本文假设  $E_1$  有界,  $\|E_1\| \leq \epsilon$ . 其中  $\epsilon = [ \epsilon_1, \epsilon_2 ]^T$ .

**定理 1** 对于集中参数子系统(22), 取控制律为式(30), 其中鲁棒控制器  $s_1$  为

$$s_1 = - \frac{S / S^T / \hat{\Lambda}(t)}{S^2 + 1}, \\ \dot{s}_1 = - \frac{1 / S^T / \hat{\Lambda}(t)}{S^2 + 1},$$

$s_1$  为设计的时变参数.

$\hat{\Lambda}(t)$  以及神经网络权值的参数调整率为

$$\dot{W} = -s_1 \hat{S}^T, \dot{V} = -s_2 x_1 S^T W^T V, \\ \dot{\hat{\Lambda}}(t) = -s_1 / S, \dot{\hat{m}} = -s_3 (S^T W^T m)^T, \\ \dot{\hat{c}} = -s_4 (S^T W^T c)^T.$$

则集中参数子系统是渐近稳定的. 其中:  $\Lambda_i (i = 1, 2, 3, 4)$  为对称正定常数矩阵,  $\Lambda_i > 0 (i = 1, 2)$  为设计参数.

证明 取 Lyapunov 函数为

$$L_a = \frac{1}{2} S^T S + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{W}^T \Lambda_1^{-1} \tilde{W}) + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{V}^T \Lambda_2^{-1} \tilde{V}) + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{m}^T \Lambda_3^{-1} \tilde{m}) +$$

$$\frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{c}^T \tilde{c}) + \frac{1}{2} \tilde{v}^T \tilde{v} + \frac{1}{2} \tilde{s}_i^2, \quad (35)$$

则  $L_a$  对时间的导数为

$$\begin{aligned} \dot{L}_a = & -S^T KS + \text{tr}[\tilde{W}^T (\dot{\tilde{W}} + \wedge S^T) J + \\ & \text{tr}[\tilde{V}^T (\dot{\tilde{V}} + x_1 S^T W^T v) J + \\ & \text{tr}[\dot{\tilde{m}}^T (\dot{\tilde{m}} + S^T W^T m) J + \\ & \text{tr}[\tilde{c}^T (\dot{\tilde{c}} + S^T W^T c) J + S^T s_1 + \\ & S^T E_1 + \frac{1}{2} \tilde{v}^T \dot{\tilde{v}} + \frac{1}{2} \dot{\tilde{s}}_i^2 = \\ & -S^T KS - S^T \frac{S / S^T / \wedge(t)}{S^2 + 1} + \\ & S^T E_1 - \tilde{v}^T / S / - \frac{1}{2} \frac{S^T / \wedge(t)}{S^2 + 1} \\ & - S^T KS - / S^T / [ (t) - E_1 ] \\ & - \sum_{i=1}^2 k_{0i} \tilde{s}_i^2. \end{aligned} \quad (36)$$

因此  $L_a$  负半定且  $L_a \leq L$ . 这表明  $s_1, \tilde{W}, \tilde{V}, \tilde{m}, \tilde{c}, \tilde{v}, \tilde{s}_i$  均是有界的. 由式(33)可知  $w, v, m, c, s_i$  也是有界的.  $L_a$  是时间的非增函数且有界, 因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} L_a(t)$

$= L_a(\infty)$  存在. 式(36)对时间积分可得  $\int_0^t k_{0i} \tilde{s}_i^2 dt = L_a(0) - L_a(\infty)$ .

上式表明  $S(t) \in L^2$ . 由 Barbalat 引理<sup>[12]</sup>可知: 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $S = 0$ . 因此集中参数子系统是渐近稳定的, 且当  $S = 0$  时,  $v_1 = v_{1d}, \dots, d$ , 由式(23)可知  $s = s_d$ .

### 5 分布参数子系统的鲁棒自适应控制

分布参数子系统控制目的是抑制振动, 即当时标  $\mu = 0$  时,  $z_f(\mu, x) = 0$ . 由式(18)和(19)可知控制力矩  $1_f$  和  $2_f$  是非独立的, 满足函数关系

$$1_f = 2_f + L_1 L_2^2 \cos 2s z_{xxxxf}(\mu, 0). \quad (37)$$

定义滑模面

$$s_1 = z_{\mu f}(\mu, 1) + k_3 z_{xf}(\mu, 1), \quad (38)$$

其中常数  $k_3 > 0$  为设计参数.

式(19)对变量  $x$  求偏导后令  $x = 1$ , 可得

$$\begin{aligned} z_{\mu f}(\mu, 1) + z_{xxxxf}(\mu, 1) = \\ - [ 2_f + L_2^3 z_{xxf}(\mu, 0) ] / J_2. \end{aligned} \quad (39)$$

由式(38)和(39), 可得

$$\begin{aligned} \frac{ds_1}{d\mu} = - [ 2_f + L_2^3 z_{xxf}(\mu, 0) ] / J_2 - \\ z_{xxxxf}(\mu, 1) + k_3 z_{\mu f}(\mu, 1). \end{aligned} \quad (40)$$

由于变量  $z_{xxxxf}(\mu, 1)$  很难通过测量的手段得到其确切值, 本文假设  $|z_{xxxxf}(\mu, 1)| \leq \dots$ .

**定理 2** 对于分布参数子系统(18), (19)以及边界条件(20), 设计控制律为(37)以及

$$2_f = 2_{f1} + 2_{f2}. \quad (41)$$

其中:  $2_{f1}$  为补偿控制器,  $2_{f2}$  为鲁棒控制器, 有

$$2_{f1} = -L_2^3 z_{xxf}(\mu, 0), \quad (42)$$

$$2_{f2} = J_2 [ k_4 s_1 + k_3 z_{\mu f}(\mu, 1) + \frac{s_1 / s_1 / \wedge}{s_1^2 + 2} ]. \quad (43)$$

参数  $(\mu)$  和  $s_1$  的调整率为

$$\frac{d\mu}{dt} = -s_1 / s_1, \quad \frac{ds_1}{dt} = -k_4 \frac{s_1 / \wedge}{s_1^2 + 2}.$$

则分布参数子系统是渐近稳定的. 其中  $k_4 > 0, s_1 > 0, k_4 > 0$  为设计参数.

**证明** 取 Lyapunov 函数为

$$L_b = \frac{1}{2} s_1^2 + \frac{1}{2} \tilde{v}^T \tilde{v} + \frac{1}{2} \tilde{s}_i^2. \quad (44)$$

$L_b$  对时标  $\mu$  的导数为

$$\begin{aligned} dL_b/d\mu = & -k_4 s_1^2 - s_1 \frac{s_1 / s_1 / \wedge}{s_1^2 + 2} - \\ & s_1 z_{xxxxf}(\mu, 1) - \tilde{v}^T / s_1 / - \frac{1}{2} \frac{s_1 / \wedge}{s_1^2 + 2} \\ & - k_4 s_1^2 + / s_1 / [ - z_{xxxxf}(\mu, 1) - ] - k_4 s_1^2. \end{aligned} \quad (45)$$

由 Barbalat 引理易证当  $\mu \rightarrow 0$  时,  $s_1 = 0$ . 为证明系统是渐近稳定的, 只需证明当  $s_1 = 0$  时, 系统稳定在  $z_f(\mu, x) = 0$ . 当  $s_1 = 0$  时, 显然有  $z_{xf}(\mu, 1) = 0, z_{\mu f}(\mu, 1) = 0$ . 此时闭环方程为

$$z_{\mu f}(\mu, x) + z_{xxxxf}(\mu, x) = 0, \quad (46)$$

$$z_f(\mu, 0) = z_{xf}(\mu, 0) = z_{xf}(\mu, 1) = 0;$$

$$\frac{m_2}{L_2} z_{xxxx}(\mu, 1) + z_{xxx}(\mu, 1) = 0. \quad (47)$$

利用特征值展开的方法<sup>[13]</sup>可知该方程的解为

$$z_f(\mu, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{v_n(\mu)} v_n(x). \quad (48)$$

其中: 特征值  $\lambda_n = \frac{4}{n^2}$ ,  $v_n$  满足

$$\begin{aligned} 1 + \cosh n \cos n + \frac{m_2}{L_2} n (\sinh n \cos n - \\ \cosh n \sin n) = 0; \end{aligned} \quad (49)$$

$v_n(x)$  为特征值  $\lambda_n$  所对应的特征函数, 满足

$$\begin{aligned} v_n(x) = \frac{1}{C_n} [ \cosh(n x) - \cos(n x) - \\ \frac{\cosh n + \cos n}{\sinh n + \sin n} (\sinh(n x) - \\ \sin(n x)) ] = 0, \end{aligned} \quad (50)$$

$C_n$  为非零常数;  $v_n(\mu)$  满足常微分方程

$$\frac{d^2 v_n}{d\mu^2} + \lambda_n v_n = 0. \quad (51)$$

常微分方程(51)的解为

$$v_n(x) = d_n \sin(\sqrt{\lambda_n} \mu + \phi_n), \quad (52)$$

其中  $d_n$  和  $\phi_n$  均为常数.

由  $z_{xf}(\mu, 1) = 0$ , 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(\sqrt{n}\mu + \phi_n) \frac{d_n(1)}{dx} = 0. \quad (53)$$

在条件(49)和(50)约束下,易证  $d_n(1)/dx = 0$ , 由特征值的性质  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  和  $\sin$  函数  $\{\sin \sqrt{1}\mu, \sin \sqrt{2}\mu, \dots\}$  的相互独立性可知,若式(53)成立,必须满足  $d_1 = d_2 = \dots = 0$ , 因此

$$z_f(\mu, x) = 0. \quad (54)$$

由此,定理 2 得证.

由奇异摄动控制方法,系统的混合控制器为

$$= s + f. \quad (55)$$

### 6 仿真结果

柔性机械臂系统的参数为:  $L_1 = 0.65 \text{ m}$ ,  $L_2 = 0.71 \text{ m}$ ,  $L_3 = 0.8 \text{ m}$ ,  $\rho = 0.9 \text{ kg/m}$ ,  $m_1 = 1.3 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0.8 \text{ kg}$ ,  $EI = 225.31 \text{ N} \cdot \text{m}^3$ . 系统末端接触点的初始位置为  $X_{p_2} = 0.2 \text{ m}$ ,  $Y_{p_2} = 0.6 \text{ m}$ .

RBF 神经网络隐层节点选为 5, 权值矩阵  $W, V$  中的每一个元素的初始值均选为区间  $(0, 1)$  中的随机值. 控制器参数选择为  $k_1 = 38.5$ ,  $K = \text{diag}(80, 39)$ ,  $k_2 = 0.015$ ,  $\lambda_1 = 10$ ,  $\lambda_2 = 13$ ,  $\lambda_1 = \text{diag}(32, 25, 24, 16, 31)$ ,  $\lambda_2 = \text{diag}(12, 15, 34, 16, 11, 18, 19, 14, 17, 16, 15)$ ,  $\lambda_3 = \text{diag}(34, 25, 24, 16, 11)$ ,  $\lambda_4 = \text{diag}(29, 25, 24, 16, 31)$ ,  $k_3 = 21$ ,  $k_4 = 40$ ,  $\lambda_3 = 13$ ,  $\lambda_4 = 10$ .

约束面与  $X$  轴的夹角  $\alpha(t)$  为

$$\alpha(t) = 0.75 + 0.2\sin(0.6t) \text{ (rad)}.$$

系统存在的未建模的动力学以及外在干扰为

$$a = [0.75\sin(1.2t + 0.13), 0.23\cos(1.2t + 0.13)]^T.$$

拉格朗日乘子初始值为 2, 期望值为 10. 柔性臂系统末端相对于约束面以  $0.015 \text{ m/s}$  的速度沿约束面向约束面与  $X$  轴交点方向移动 20 s, 其仿真结果如图 2 ~ 图 5 所示.

由仿真结果可以看出, 本文所提出的控制策略使得柔性臂系统能够较好地跟踪期望的位置和力,

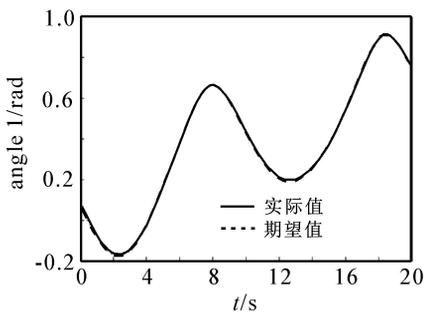


图 2 关节角 1 的跟踪曲线

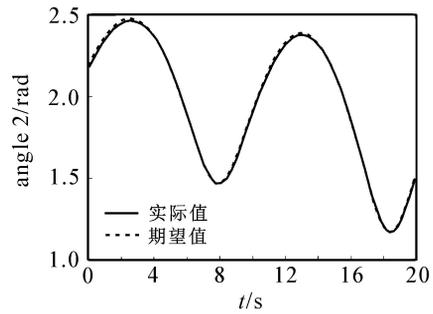


图 3 关节角 2 的跟踪曲线

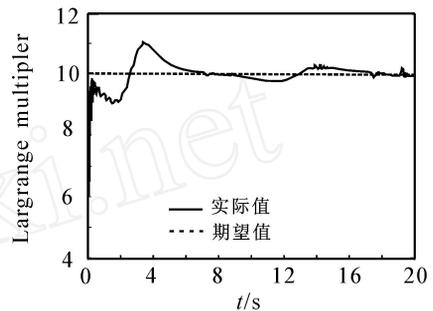


图 4 拉格朗日乘子的跟踪曲线

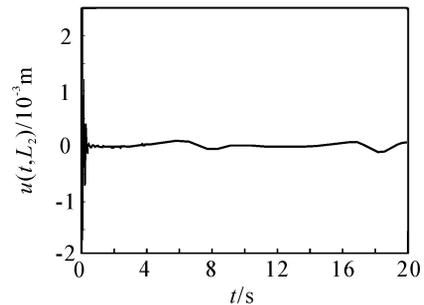


图 5 柔性连杆末端变形  $u(t, L_2)$

系统的弹性振动得到抑制, 并对系统未建模动力学和外在干扰具有较好的鲁棒性.

### 7 结 语

本文推导了受时变约束的柔性臂系统的分布参数模型, 避免了传统的集中参数模型所带来的问题. 将复杂的分布参数系统划分为两个子系统, 简化了系统的动力学描述, 便于系统分析和设计. 针对两个子系统, 鲁棒神经网络控制器用以跟踪期望位置和力, 鲁棒自适应控制器用以抑制系统的弹性振动.

### 参考文献(References)

[1] 魏立新, 李二超, 王红瑞. 基于 CMAC 在线自学习模糊自适应控制的机器人力/位置鲁棒控制[J]. 电工技术学报, 2005, 20(5): 40-44.  
(Wei Li-xin, Li Er-chao, Wang Hong-rui. Fuzzy adaptive control based on CMAC on-line learning and its application on robot [J]. Trans of China Electrotechnical Society, 2005, 20(5): 40-44.)

(下转第 988 页)

标和极点约束条件都可归结为一组线性矩阵不等式的凸优化问题.

### 参考文献(References)

- [1] Takagi T, Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control [J]. IEEE Trans on Systems Man Cybernet, 1985, 15(1): 116-132.
- [2] Teixeira M C M, Zak S H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 1999, 7(2): 133-142.
- [3] Lee H J, Park J B, Chen G. Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(2): 369-379.
- [4] Feng G. Approaches to quadratic stabilization of uncertain continuous time fuzzy dynamic systems [J]. IEEE Trans on Circuits Systems, 2001, 48(6): 760-769.
- [5] 刘飞, 苏宏业, 褚健. 基于模糊模型的不确定非线性系统鲁棒镇定[J]. 控制与决策, 2002, 17(5): 532-535. (Liu Fei, Su Hong-ye, Chu Jian. Robust  $D$ -stabilization for uncertain nonlinear systems based on fuzzy models [J]. Control and Decision, 2002, 17(5): 532-535.)
- [6] 周武能, 苏宏业, 褚健. 不确定 T-S 模型的  $D$ -域极点约束鲁棒控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(1): 46-50. (Zhou Wu-neng, Su Hong-ye, Chu Jian. Robust control for uncertain T-S systems with  $D$ -region pole constraints [J]. Control and Decision, 2005, 20(1): 46-50.)
- [7] Wang H O, Tanaka K, Griffin M F. Parallel distributed compensation of nonlinear systems by Takagi-Sugeno fuzzy model [C]. Proc of the FUZZ-IEEE/IFES. Yokohama, 1995: 531-538.
- [8] Boyd S, Ghaoui L E, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [9] Xie L. Output feedback  $H$  control of systems with parameter uncertainty [J]. Int J of Control, 1996, 63(4): 741-750.
- [10] 佟绍成, 王涛, 王艳平, 等. 模糊控制系统的设计及稳定性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 218-222. (Tong Shao-cheng, Wang Tao, Wang Yan-ping, et al. Design and stability analysis of fuzzy control system [M]. Beijing: Science Press, 2004: 218-222.)
- [1] Tsuji T, Tanaka Y. On-line learning of robot arm impedance using neural networks [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2005, 52(4): 257-271.
- [2] Liu Y H, Arimoto S. Adaptive and nonadaptive hybrid controllers for rheonomically constrained manipulators [J]. Automatica. 1998, 34(4): 483-491.
- [3] 樊晓平, 徐建闽, 毛宗源, 等. 平面双连杆受限柔性机器人臂的自适应模糊力/位置控制[J]. 机器人, 1999, 21(6): 454-465. (Fan Xiao-ping, Wu Jian-min, Mao Zong-yuan, et al. Adaptive fuzzy position/force control for a planar two-link constrained flexible manipulator [J]. Robot, 1999, 21(6): 454-465.)
- [4] Siciliano B, Villani L. Two-time scale force and position control of flexible manipulators [C]. Proc of the 2001 IEEE Int Conf on Robotics & Automation. Seoul, 2001: 2729-2734.
- [5] Tian L F, Collins C. A dynamic recurrent neural network-based controller for a rigid-flexible manipulator system [J]. Mechatronics, 2004, (14): 471-490.
- [6] Luo Z H, Guo B Z, Morgul O. Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications [M]. London: Springer-Verlage, 1999.
- [7] Zhang X P, Xu W W, Nair S S, et al. PDE modelling and control of a flexible two-link manipulator [J]. IEEE Trans on Control Systems Technology, 2005, 13(2): 301-312.
- [8] Ge S S, Lee T H, Zhu G, et al. Variable structure control of a distributed-parameter flexible beam [J]. J of Robotic Systems, 2001, 18(1): 17-27.
- [9] Matsuno F, Sakawa Y, Asano T. Quasi-static hybrid position/force control of a flexible manipulator [C]. Proc of the 1991 IEEE Int Conf on Robotics & Automation. Sacramento, 1991: 2838-2843.
- [10] Lee M G, Choi Y K. An adaptive neurocontroller using RBFN for robot manipulators [J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 2004, 51(3): 711-717.
- [11] Slotine J J E, Li W P. Applied nonlinear control [M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991.
- [12] Matsuno F, Murata K. Passivity and PDS control of flexible mechanical systems on the basis of distributed parameter system [C]. Proc of the IEEE Int Conf on Systems, Man and Cybernetics. Tokyo, 1999, 5: 51-56.

(上接第 982 页)