第 22 卷 第 9 期 控 制 与 决 策 2007 年 9 月
Vol. 22 No. 9 Control and Decision Sep. 2007

文章编号: 1001-0920(2007)09-1005-06

损失约束下多产品报童问题的求解方法研究

周艳菊[1,2], 邱菀华[1], 王宗润[2]
(1. 北京航空航天大学 经济管理学院, 北京 100083; 2. 中南大学 商学院, 长沙 410083)

摘 要: 分析损失约束下多产品报童问题的解空间,并将其分为三个区域,给出了不同解区域的求解思路. 参照 Abdel-Malek 的研究,提出了基于损失边际效用排序的删除法(LMU-D),来解决模型的非负约束问题,并与线性近似规划法相结合解决带积分符号的非线性约束优化问题. 最后通过算例验证了方法和模型的有效性.

关键词: 多产品报童问题; 损失约束; 非线性优化; 近似规划方法
中图分类号: F273 **文献标识码**: A

Solving approach to multi-product newsvendor model with loss constraint

ZHOU Yan-ju[1,2], *QIU Wan-hua*[1], *WANG Zong-run*[2]
(1. School of Economics and Management, Beihang University, Beijing 100083, China; 2. Business School, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: ZHOU Yan-ju, E-mail: zyj4258@sina.com)

Abstract: The solution space of multi-product newsvendor problem with loss constraint is analyzed and divided by three solution regions. The solving approaches to different solution regions are proposed. According to Abdel-Malek's study, a method for dealing with non-negative constraint is proposed. Then the linear approximate programming approach is used to solve non-linear constraint optimal problem with integral. Numerical examples show the effectiveness of the model and algorithm.

Key words: Multi-product newsvendor problem; Loss constraint; Non-linear optimization; Approximate programming

1 引 言

报童问题(NV)或单期订货问题(SPP)反映了许多现实情况,例如制造或零售领域的时尚和体育运动行业的订货决策问题[1],服务行业中航空和酒店业客户容量管理以及评估预定问题等[2]. 另外,随着信息技术的发展,信息产品和电子产品的生命周期越来越短,应用报童问题处理有关信息产品和电子产品的订货和库存问题越来越受到重视. 多产品报童问题(MPNP)作为 NV 的一个重要扩展领域,由于其更贴近现实的决策环境而重新引起研究者的关注.

现存的求解能力约束(都为线性约束)的 MPNP 文献没有考虑损失约束[3-13]. 但对决策者而言面,对激烈竞争的市场环境限制一个损失上限是通常的商业做法,即在既定的损失承受能力下如何进行订货决策. 另外,大多数的 MPNP 文献也没有考虑订货量的下限(非负约束)[3,6-10,12,13]. 因为当处理 3 个产品的报童问题时,若考虑非负约束,应用库恩-塔克条件求解,非线性方程数量超过了 20 个,大多数的现存模型放松了非负约束. 文献[12,13]首先观察到这将有可能导致不可行的订货量(负数解),他们以一个大面包店为例,对这一现象的发生作了概念性的解释. 文献[4]在研究基于预算约束的 MPNP 时提出了一种方法,避免了不可行订货量的出现. 文献[7]的方法也很类似,但他研究的是无约束问题.

本文受到文献[4]的启发,研究损失约束下的 MPNP 的求解方法. 其模型是基于经典的 MPNP,不管是目标函数还是约束条件都与本文的模型有所不同. 因此,本文的研究方法不是对文献[4]解法的简单摹仿,而是将方法扩展到了非线性约束条件下,并在最后处理放松非负约束的规划问题时采用近似

收稿日期: 2006-05-21; **修回日期**: 2006-11-02.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70372011); 高校博士点专项科研基金项目(20030006009).
作者简介: 周艳菊(1972—),女,湖南湘潭人,博士,从事风险决策、供应链管理的研究; 邱菀华(1946—),女,南昌人,教授,博士生导师,从事决策理论、风险管理等研究.

规划技术而不是 GIM 迭代技术. GIM 迭代技术无法给出模型步长的闭型表达式.

2 模型描述

2.1 符号说明

$j(j=1,\cdots,N)$ 为产品的下标;x_j 是决策变量,为产品 j 的订货量;y_j 是随机变量,为产品 j 的市场需求;c_j 为产品 j 的采购价格;p_j 为产品 j 的销售价格;h_j 为产品 j 的单位存储成本;o_j 为产品 j 的单位订货成本;r_j 为产品 j 的残值;L_S 为损失上限;$P_j(y_j)$ 为产品 j 的需求概率密度函数;$F_j(y_j)$ 为产品 j 的需求累积分布函数;u_j 为产品 j 的需求均值;σ_j 为产品 j 的需求方差.

设 $r_j \le c_j \le p_j$,其他符号在需要时说明.

2.2 建 模

建立如下的 MPNP 模型 M1:

(M1)
$$\max f(x_1,\cdots,x_N)=\sum_{j=1}^{N}\Big[(p_j-C_j)x_j-(p_j-r_j)\int_0^{x_j}(x_j-y_j)P_j(y_j)\,\mathrm{d}y_j\Big],$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{N}(C_j-r_j)\int_0^{x_j}(x_j-y_j)P_j(y_j)\,\mathrm{d}y_j\le L_S,$$
$$x_j\ge 0,\ j=1,\cdots,N.$$

其中:$C_j=c_j+h_j+o_j$,约束 1 和约束 2 分别为损失约束和非负约束.

目标函数为收益函数,考虑损失约束,假设各产品的市场需求相互独立,分布函数已知. 损失为当订货量大于需求量时,所发生的采购、订货和存储的费用与残值之差. M1 是经典 MPNP 的扩展,在经典的 MPNP 中目标函数成本最小,没有考虑报童的收益[14]. 另外 M1 在目标函数和损失函数中都没有考虑当需求量大于订货量时所造成的损失(如机会损失或商誉损失),即本文所考虑的决策者是实际损失厌恶型. 之所以这样处理是因为损失约束是带积分符号的非线性约束,考虑机会损失会大大地将问题复杂化;另外不考虑机会损失的模型仍不失实用性,因为在竞争异常激烈的零售商业环境下决策者更看重的是实际损失,害怕库存滞压会占用更多的流动资金而影响企业的正常运作并带来财务风险. 另外,随着物流业的蓬勃发展,零售商补货系统的运作效率大大提高,因此缺货风险较之过去低很多.

对 M1 作拉格朗日函数,有

$$L(x_1,\cdots,x_N;\lambda)=\sum_{j=1}^{N}\Big[(p_j-C_j)x_j-(p_j-r_j)\int_0^{x_j}(x_j-y_j)P_j(y_j)\,\mathrm{d}y_j\Big]-\lambda\Big[\sum_{j=1}^{N}(C_j-r_j)\int_0^{x_j}(x_j-y_j)P_j(y_j)\,\mathrm{d}y_j-L_S\Big].\quad(1)$$

M1 是一个凹规划问题(目标函数是凹函数,约束条件为凸函数),因此若 $\bar{x}=(\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_N)^{\mathrm{T}}$ 处的如下库恩 - 塔克条件:

$$(p_j-C_j)-(p_j-r_j)F_j(\bar{x}_j)-\lambda(C_j-r_j)F_j(\bar{x}_j)=0,\quad(2)$$
$$\lambda\Big[\sum_{j=1}^{N}(C_j-r_j)\int_0^{\bar{x}_j}(\bar{x}_j-y_j)P_j(y_j)\,\mathrm{d}y_j-L_S\Big]=0,\quad(3)$$
$$\lambda\ge 0,\quad(4)$$
$$\bar{x}_j\ge 0,\ j=1,\cdots,N\quad(5)$$

满足,则 $\bar{x}$ 为整体最优解,λ 为拉格朗日乘子.

求解上述问题非常复杂. 若 $N=3$,一般情况下要讨论 $x_1>0, x_1=0; x_2>0, x_2=0; x_3>0, x_3=0; \lambda>0, \lambda=0$ 组合的 16 种情形. 这非常复杂,若产品不止 2 种而为 20 种时,组合将达 2^{21} 种情形. 因此,许多学者在处理能力约束的 MPNP 时往往放松非负约束. 然而正如前面提到的如果预算约束太紧而放松非负约束,将导致不可行(即负数) 的订货量. 因此本文参照文献[4] 的思路提出基于损失边际效用排序的删除法(简称 LMU-D) 和线性近似规划法相结合的求解方法来解决此问题.

3 求解方法

将 M1 的解空间分为 3 个部分:1) 损失约束不起作用;2) 损失约束起作用且可以放松非负约束;3) 损失约束起作用且不可以放松非负约束. 因此存在两个阀值 $L_S^{(1)}$ 和 $L_S^{(2)}$,分别表示损失约束不起作用的损失下限和放松非负约束的损失下限(见图 1).

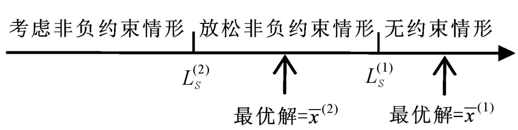

图 1 损失约束阀值及解空间

3.1 损失约束阀值

3.1.1 损失约束不起作用的损失下限

损失约束不起作用的 M1 相当于无约束最优化问题,因此最优解和阀值 $L_S^{(1)}$ 分别为

$$\bar{x}_j^{(1)}=F_j^{-1}\Big(\frac{p_j-C_j}{p_j-r_j}\Big),\ j=1,\cdots,N;\quad(6)$$

$$L_S^{(1)}=\sum_{j=1}^{N}(C_j-r_j)\int_0^{F_j^{-1}\left(\frac{p_j-C_j}{p_j-r_j}\right)}\Big[F_j^{-1}\Big(\frac{p_j-C_j}{p_j-r_j}\Big)-y_j\Big]P_j(y_j)\,\mathrm{d}y_j.\quad(7)$$

若 $L_S \geq L_S^{(1)}$, M1 的最优解为式(6).

3.1.2　放松非负约束的损失下限

令

$$\zeta = \min_j(\zeta_{j,0}),\ j = 1,\cdots,N. \quad (8)$$

$\zeta_{j,0}$ 表示 j 产品在 $x_j = 0$ 时损失的边际效用,即增加 j 产品一单位损失所带来的效用的增加. 用拉格朗日方法求解放松非负约束的 M1,最优解为

$$\bar{x}_j^{(2)} = F_j^{-1}\left[\frac{p_j - C_j}{p_j - r_j + \lambda(C_j - r_j)}\right],$$
$$j = 1,\cdots,N. \quad (9)$$

根据拉格朗日乘子的经济含义可知,λ为在最优解处损失的边际效用,即增加一个单位的损失(不特指某种具体产品,注意λ和$\zeta_{j,0}$在经济含义上的区别)所带来的效用的增加,因此根据 $\zeta_{j,0}$ 的定义以及式(9)有

$$\zeta_{j,0} = \frac{p_j - C_j - (p_j - r_j)F_j(0)}{F_j(0)(C_j - r_j)},$$
$$j = 1,\cdots,N. \quad (10)$$

$F_j(0)$ 为产品 j 在 $x_j = 0$ 时的累积分布函数. 则放松非负约束损失下限的阀值为

$$L_S^{(2)} = \sum_{j=1}^{N}(C_j - r_j)\cdot\int_0^{F_j^{-1}\left[\frac{p_j - C_j}{p_j - r_j + \zeta(C_j - r_j)}\right]} \times$$
$$\left\{F_j^{-1}\left[\frac{p_j - C_j}{p_j - r_j + \zeta(C_j - r_j)}\right] - y_j\right\}P_j(y_j)\,\mathrm{d}y_j. \quad (11)$$

若 $L_S^{(2)} \leq L_S \leq L_S^{(1)}$,可放松非负约束,M1 的最优解为式(9).

若 $L_S < L_S^{(2)}$,表示损失约束太紧,将有一种或几种产品的订货量为 0,如果在 M1 中不考虑非负约束,将会出现不可行解;如果考虑,则如 2.2 节所述基于拉格朗日的方法很难应用.

现在要证明的是:

引理 1　$L_S^{(2)} \leq L_S$ 时,M1 的求解可以放松非负约束.

证明　1) 证明损失边际效用函数的单调性.

放松非负约束得损失边际效用函数

$$\zeta_j = \frac{p_j - C_j - (p_j - r_j)F_j(x_j)}{F_j(x_j)(C_j - r_j)},\ j = 1,\cdots,N,$$

对 x_j 求导得

$$\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_j} = \frac{p_j - C_j}{C_j - r_j}\cdot\frac{-1}{F_j^2(x_j)}\cdot\frac{\partial F_j(x_j)}{\partial x_j}.$$

因$\frac{\partial F_j(x_j)}{\partial x_j} > 0$,$\frac{p_j - C_j}{C_j - r_j} > 0$,所以$\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_j} < 0$,即损失的边际效用是单调减函数. 由于 $\zeta_{j,0}$ 表示 j 产品在 $x_j = 0$ 时损失的边际效用,有

$$\forall\zeta_j < \zeta_{j,0} \Rightarrow x_j > 0,\ j = 1,\cdots,N. \quad (12)$$

2) 证明损失函数的单调性.

放松非负约束得最优解处的损失为

$$L_S(\lambda) = \sum_{j=1}^{N}(C_j - r_j)\cdot\int_0^{F_j^{-1}\left[\frac{p_j - C_j}{p_j - r_j + \lambda(C_j - r_j)}\right]} \times$$
$$\left\{F_j^{-1}\left[\frac{p_j - C_j}{p_j - r_j + \lambda(C_j - r_j)}\right] - y_j\right\}\cdot P_j(y_j)\,\mathrm{d}y_j.$$

损失 $L_S(\lambda)$ 对损失边际效用的导数为

$$\frac{\partial L_S}{\partial\lambda} = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial F_j^{-1}(Z)}{\partial Z}\cdot$$
$$\frac{(p_j - C_j)^2}{(p_j - r_j + \lambda(C_j - r_j))^3}\cdot(C_j - r_j)^2,$$

其中 $Z = \frac{p_j - C_j}{p_j - r_j + \lambda(C_j - r_j)}$.

$\frac{p_j - C_j}{p_j - r_j + \lambda(C_j - r_j)}$ 表示 M1 在最优解处的分布函数值,因此$\frac{p_j - C_j}{p_j - r_j + \lambda(C_j - r_j)} > 0$;根据假设 $p_j - C_j > 0$,有 $p_j - r_j + \lambda(C_j - r_j) > 0$. 又因为 $\frac{\partial F_j^{-1}(Z)}{\partial Z} > 0$,所以$\frac{\partial L_S}{\partial\lambda} < 0$. 可得 L_S 是关于λ的单调减函数. 因此

$$\forall L_S \geq L_S^{(2)} \Rightarrow \lambda \leq \zeta. \quad (13)$$

根据式(8)有 $\zeta \leq \zeta_{j,0}$,以及不等式(12)和(13),有 $\forall L_S \geq L_S^{(2)} \Rightarrow x_j \geq 0$, $j = 1,\cdots,N$. □

3.2　放松非负约束的求解方法

3.2.1　线性近似规划法

研究当 $L_S^{(2)} \leq L_S < L_S^{(1)}$ 时的求解方法($L_S \geq L_S^{(1)}$ 时解如式(6)所示). 由于放松非负约束后的规划模型的目标函数和约束条件都是带积分符号的非线性表达式,无论是一维搜索法、最速下降法、牛顿法、可行方向法,还是惩罚函数法都无法求解. 另外如前言所述,文献[3,4]中所提到的 GIM 法也无法应用. 因此本文考虑用近似规划法(参见文献[15]).

设 $\mathrm{x}^{(k)} = (x_1^{(k)},\cdots,x_N^{(k)})^{\mathrm{T}}$ 是放松非负约束的 M1 模型的可行解. 将 M1 中的目标函数,损失约束在 $\mathrm{x}^{(k)}$ 处展为 Taylor 级数,并取得线性近似,得到线性规划问题 M2(用向量方式表示):

$$\text{(M2)}\ \max\ f(\mathrm{x}^{(k)}) + \nabla f(\mathrm{x}^{(k)})^{\mathrm{T}}(\mathrm{x} - \mathrm{x}^{(k)}),$$
$$\text{s.t.}\ g(\mathrm{x}^{(k)}) + \nabla g(\mathrm{x}^{(k)})^{\mathrm{T}}(\mathrm{x} - \mathrm{x}^{(k)}) \leq 0.$$

其中

$$\nabla f(\mathrm{x}^{(k)}) = (\mathrm{C} - \mathrm{p}) + (\mathrm{p} - \mathrm{r})\cdot F(\mathrm{x}^{(k)}),$$
$$g(\mathrm{x}^{(k)}) = \sum_{j=1}^{N}(C_j - r_j)\int_0^{x_j^{(k)}}(x_j^{(k)} - y_j)p_j(y_j)\,\mathrm{d}y_j - L_S,$$
$$\nabla g(\mathrm{x}^{(k)}) = (\mathrm{C} - \mathrm{r})\cdot F(\mathrm{x}^{(k)}),$$
$$\mathrm{C} = (C_1,\cdots,C_N)^{\mathrm{T}},$$

p, $F(x^{(k)})$ 和 r 类似于 C 的表达.

由于用线性函数逼近非线性函数时,一般只在展开点附近近似程度较好,而远离展开点,可能产生较大偏差,特别是函数的非线性程度较高时,更是如此. 因此需要对变量的取值范围施加限制,在 M2 中增加约束条件

$$|x_j - x_j^{(k)}| \leq \delta_j^{(k)},\ j = 1,\cdots,N. \qquad (14)$$

求解式(14) 和 M2 构成的线性规划问题,设得到的最优解为 $x^{(k+1)}$. 如果 $x^{(k+1)}$ 是原问题的可行解,则在这一点将目标函数和约束函数线性化,构成新的线性规划问题,并且沿用步长限制 $\delta_j^{(k)}$, $j = 1,\cdots,N$. 如果 $x^{(k+1)}$ 违背可行性,则减少步长限制 δ_j,重新求解当前的线性规划问题.

3.2.2 算法步骤

1) 给定初始可行点 $x^{(1)}$,步长限制 $\delta_j^{(1)}$, $j = 1,\cdots,N$,缩小系数 $\beta \in (0,1)$,允许误差 ε_1, ε_2,置 $k = 1$.

2) 求解 M2 和式(14) 组成的线性规划问题,得到最优解 x^*.

3) 若 x^* 满足可行性,则令 $x^{(k+1)} = x^*$,转步骤 4);否则,置 $\delta_j^{(k)} := \beta\delta_j^{(k)}$, $j = 1,\cdots,N$,返回步骤 2).

4) 若 $|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})| < \varepsilon_1$,且满足 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon_2$,则点 $x^{(k+1)}$ 为近似解;否则,令 $\delta_j^{(k+1)} = \delta_j^{(k)}$, $j = 1,\cdots,N$,置 $k = k+1$,返回步骤 2).

3.3 考虑非负约束的求解方法

对非负约束处理的计算步骤如下:

1) 放松非负约束,根据式(10) 计算每种产品在订货量为 0 时损失的边际效用 $\zeta_{j,0}$, $j = 1,\cdots,N$,并按升序排列. 为避免混淆,升序集合用 $A = \{\zeta^{(t)} \mid t = 1,\cdots,N\}$ 表示,$\zeta^{(1)}$ 表示损失的边际效用最小. 同时为了方便表述,将产品重新按集合 A 的顺序排列,调整次序后的产品的下标用 $i(i = 1,\cdots,N)$ 表示以示区别. 因此产品 1(注意这是排序后的产品 1) 就表示其损失的边际效用最小,对应的是 $\zeta^{(1)}$;产品 N 表示损失的边际效用最大,对应的是 $\zeta^{(N)}$. 置 $t = 1$.

2) 按下式:

$$L_{S,t} = \sum_{i=t}^{N}(C_i - r_i) \cdot \int_0^{F_i^{-1}\left[\frac{p_i - C_i}{p_i - r_i + \zeta^{(t)}(C_i - r_i)}\right]} \times \left\{F_i^{-1}\left[\frac{p_i - C_i}{p_i - r_i + \zeta^{(t)}(C_i - r_i)}\right] - y_i\right\} \cdot P_i(y_i)\,\mathrm{d}y_i \qquad (15)$$

计算 $L_{S,t}$,显然 $t = 1$ 时,$L_{S,1} = L_S^{(2)}$,见式(11).

从式(15) 可知,$L_{S,t}$ 表示取边际效用为 $\zeta^{(t)}$ 所计算的损失.

3) 如果 $L_S < L_{S,t}$,则删除 A 中第 t 个元素所代表的产品,置 $t = t+1$,返回步骤 2). 如果 $L_S \geq L_{S,t}$,则计算停止,订货量的初始值为:当 $i = t,\cdots,N$ 时,$x_i' = F_i^{-1}\left[\frac{p_i - C_i}{p_i - r_i + \zeta^{(t)}(C_i - r_i)}\right]$;当 $i = 1,\cdots,t-1$ 时,$x_i' = 0$,即被删除产品的订货量.

这种方法所排除的产品边际效用小. 3.1.2 节已经证明损失的边际效用是单调函数,因此最优解肯定在其边界上取得. 在得到初始值 x'后,可以放松非负约束.

上述方法的合理性可用以下两个引理证明.

引理 2 如果 $L_S < L_{S,t}$,就从表单上删除 t 产品.

证明 令 $\lambda(L_S)$, $x_t(L_S)$ 分别表示损失为 L_S 时的边际效用和订货量,$x_t(L_{S,t})$ 表示损失为 $L_{S,t}$ 的订货量. 由损失函数和损失边际效用函数的单调递减性,有

$$\forall L_S < L_{S,t} \Rightarrow \lambda(L_S) > \zeta^{(t)} \Rightarrow x_t(L_S) < x_t(L_{S,t}).$$

又因为根据 $\zeta^{(t)}$ 的定义,$x_t(L_{S,t}) = 0$,所以 $x_t(L_S) < 0$. 这说明当损失约束小于 $L_{S,t}$ 时,如果考虑 t 产品将会取负的订货量,因此将产品 t 从表单上删除是合理的. □

引理 3 如果 $L_S > L_{S,t}$,以留在表单上的产品为订货对象则可以放松非负约束.

证明 因

$$\forall L_S > L_{S,t} \Rightarrow \lambda(L_S) < \zeta^{(t)} \Rightarrow x_t(L_S) > x_t(L_{S,t}) = 0$$

表示留在表单上边际效用最小的产品的订货量都大于 0,所以其他产品的订货量肯定大于 0,因而放松非负约束是合理的. □

得到初始值 x'后,再采用 3.2 节所叙述的近似规划方法求解.

4 数值分析

考虑 10 种产品情形,表 1 为产品的初始信息及所计算变差系数 $\eta_j(\eta_j = \sigma_j/u_j$, $j = 1,\cdots,N)$,收益率 $\gamma_j(\gamma_j = (p_j - r_j)/C_j$, $j = 1,\cdots,N)$ 和订货量为 0 时损失的边际效用 $\zeta_{j,0}$.

根据式(7) 和(11) 求解得 $L_S^{(1)} = 1\,739$, $L_S^{(2)} = 1\,422$. 取 $\delta^{(1)} = (25,28,30,20,18,8,3,3,2,3)^{\mathrm{T}}$, $\beta = 0.5$, $\varepsilon_1 = 5$, $\varepsilon_2 = 20$,运用 LMU-D 法求出初始值;然后放松非负约束,运用 3.2 节的近似规划技术求出最优解. 整个求解过程用 Matlab7.0 编制程序在 Intel(R) Pentium(R) Ⅲ,Mobile CPU 1 000 MHz, 532 MHz, 376 Mb 内存的机器上完成,结果见表 2.

表 1　基本信息

产品代号	成本	销售价格	残值	均值	标准差	变差系数	收益率	$\zeta_{j,0}$
1	1.4	2	0	2 500	1 200	0.48	1.43	21.599 995 85
2	1.1	1.5	0	1 800	2 500	1.39	1.36	0.178 747 888
3	1.5	2.5	0	3 000	2 200	0.73	1.67	6.054 653 526
4	1.4	2	0	2 000	400	0.2	1.43	1 495 093.48
5	1.1	1.8	0	1 800	620	0.34	1.64	342.958 448 6
6	2.8	4	0	1 000	100	0.1	1.43	5.624 41E + 22
7	4	7	0	600	500	0.83	1.75	4.767 790 47
8	6	8	0	650	150	0.23	1.33	45 390.753 52
9	4.5	8	0	500	115	0.23	1.78	113 134.835
10	4	5.8	0	600	50	0.08	1.45	2.533 1E + 32

表 2　不同损失约束下的最优订货量

损失约束	各产品的最优订货量										期望收益	迭代次数	运行时间/s
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
50	294	0	0	1 255	789	824	0	359	317	507	5.13E + 03	14	26.588
100	599	0	0	1 378	951	840	0	395	341	525	5.63E + 03	26	39.858
300	1 021	0	869	1 494	1 172	871	72	449	396	539	7.25E + 03	24	39.347
500	1 305	0	1 267	1 572	1 305	900	123	476	422	548	7.96E + 03	41	71.814
700	1 418	0	1 588	1 665	1 393	913	147	497	436	558	8.37E + 03	49	84.712
900	1 579	0	1 845	1 697	1 447	929	168	512	452	563	8.64E + 03	56	101.75
1 100	1 696	0	2 067	1 736	1 518	940	189	524	463	566	8.84E + 03	63	123.32
1 300	1 768	0	2 272	1 769	1 585	940	219	539	474	570	9.00E + 03	73	102.53
1 422	1 851	0	2 372	1 793	1 595	948	222	547	480	575	9.05E + 03	74	111.23
1 450	1 768	4	2 236	1 570	1 761	940	465	534	473	570	9.42E + 03	3	11
1 500	1 802	56	2 291	1 751	1 564	938	471	540	474	570	9.45E + 03	4	25.206
1 700	1 852	230	2 416	1 791	1 634	954	500	546	482	576	9.58E + 03	14	27.65
1 739	1 852	224	2 459	1 791	1 634	954	489	546	482	576	9.58E + 03	10	22.242
1 800	1 852	224	2 459	1 791	1 634	954	489	546	482	576	9.58E + 03	10	19.097
1 900	1 852	224	2 459	1 791	1 634	954	489	546	482	576	9.58E + 03	10	20.679

4.1　损失约束阈值的分析

从表 2 可知，当 $L_S = L_S^{(2)} = 1\,422$ 时，产品 2 的订货量仍为 0；而当 $L_S = 1\,450$ 时，所有产品的订货量都大于 0，所以结果完全符合前面的分析. 也就是当损失约束大于放松非负约束的损失下限时，各产品的订货量不可能取负数. 另外，当 $L_S \geq L_S^{(1)} = 1\,739$ 时，订货量不再有变化，即损失约束不再起作用，最优解即为无约束情形下的最优解. 同时从另一个角度说明，求解方法的精确性较好，通过解析方法所求得的两个阈值与优化方法所求的阈值基本上相同，没有较大的偏离.

4.2　最优解与变差系数和收益率的关系

为了验证方法的有效性必须检验结果是否符合“直觉”. 作为一个理性的决策者，当承受损失的能力较小时，将偏向于出现损失可能性较小(损失可能性的大小可以用变差系数来衡量)的产品；当承受损失的能力增大时，对损失的关注程度将降低而偏向于收益率高的产品. 因此从“直觉”而言，当损失约束较小时，变差系数较大的产品 2，3，7 的订货量应该较小. 事实上从表 2 可知，当 $L_S = 50$ 和 100 时，产品 2，3，7 的订货量为 0，尽管产品 3 和 7 的收益率很高. 而变差系数较小的产品 10 和 6 的订货量几乎达到了均值，尽管它们的收益率并不高. 另外随着决策者对损失承受能力的提高，产品 3 和 7 的订货量增长迅速，且远远快于产品 2. 原因在于，产品 3 和 7 的收益率和变差系数均要优于产品 2. 因此该方法符合“直觉”要求.

4.3　迭代次数和运行时间

如果不采取 3.3 节所述的对非负约束的处理方法，而直接将非负约束添加到 3.2 节线性规划模型

里(即指定决策变量的下限值),理论上同样可以求解.但事实上,用线性近似规划方法求解非线性规划问题时,步长限制 $\delta_j(j=1,\cdots,N)$ 的选择对算法影响很大.如果 δ_j 取值太小,则算法收敛很慢;如果 δ_j 取值太大,则线性规划的最优解很可能不是原来问题的可行解.这样,不得不减小 δ_j,重解当前的线性规划,因而增加了计算量.因此初值的选择非常重要,如果初值太小,由于 δ_j 不能太大,计算量和运行时间肯定相当大;如果初值选得太大,同样可能发生 δ_j 取值太大可能出现的问题.因此 LMU-D 方法可以迅速地找到一个合适的初值提高近似线性规划的计算效率.例如当 $L_S=1\,450$ 时,初始值为 $x'=(1\,752,0,2\,219,1\,751,1\,562,938,459,534,470,570)^T$,迭代 3 次就找到了最优解,运行时间为 11 s.如果不采用逐一删除法,迭代次数肯定要高于 $L_S=1\,422$ 时的 74 次,时间也要长于 111.23 s.

5 结 语

研究结果表明文章的模型及方法具有以下特点:

1) 考虑了损失对决策者的影响.传统的 MPNP 对约束条件的研究局限在预算约束或资源约束等线性约束上.但现实中商业环境的竞争激烈,决策者在决策时往往会设定一个损失上限以规避商业风险.传统 MPNP 无法满足决策者的这一要求.

2) 符合"直觉"要求.本文的模型完全符合一个理性决策者的决策行为,当对损失的承受能力小时,决策者会对损失发生可能性大的产品采取回避的态度;当对损失的承受能力大时,决策者会倾向于收益率高的产品.

3) 优化方法的计算效率较高.如果初值选得不合适,线性近似规划方法将大大影响计算效率.因此当产品很多时,一般的选定初始值的方法根本不可行.本文根据 Abdel-Malek[4] 研究所提出的 LMU-D 方法有效地解决了初值的选定问题,大大降低了求解过程的迭代次数和时间.

4) 优化方法的精确性较好.通过优化方法所计算的损失约束阀值与解析方法所计算的结果基本一致,没有较大偏离.

5) 对模型解空间的分析有助于决策者根据损失约束值的大小确定最优的求解方法,提高决策效率.

参考文献(References)

[1] Gallego G, Moon I. The distribution free newsboy problem: Review and extensions [J]. J of Operation Research Society, 1993, 44(8): 825-834.

[2] Weatherford LR, Pfeifer PE. The economic value of using advance booking of orders [J]. Omega, 1994, (22): 105-111.

[3] Abdel-Malek L, Montanari R, Morales L C. Exact, approximate, and generic iterative mode ls for the Newsboy problem with budget constraint [J]. Int J of Production Economic, 2004, 91(2): 189-198.

[4] Abdel-Malek L, Montanari R. An analysis of the multi-product newsboy problem with a budget constraint [J]. Int J of Production Economic, 2005, 97(3): 296-307.

[5] Abdel-Malek L, Areeratchakul N. A quadratic programming approach to the multi-product newsvendor problem with side constraints [J]. European J of Operational Research, 2007, 176(3): 1607-1619.

[6] Niederhoff J A. Using separable programming to solve the multi. product multiple ex-ante constraint newsvendor problem and extensions[J]. European J of Operational Research, 2007, 176(2): 941-955.

[7] Silver E, Moon I. The multi-item single period problem with an initial stock of convertible units[J]. European J of Operational Research, 2001, 132(2): 466-477.

[8] Erlebacher S J. Optimal and heuristic solutions for the multi-item newsvendor problem with a single capacity constraint [J]. Production and Operations Management, 2000, 9 (3): 303-318.

[9] Moon I, Silver E. The multi-item newsvendor problem with a budget constraint and fixed ordering costs[J]. J of Operational Research Society, 2000, 51 (5): 602-608.

[10] Vairaktarakis GL. Robust multi-item newsboy models with a budget constraint [J]. Int J of Production Economics, 2000, 66(3): 213-226.

[11] Lau H S, Lau A H L. The newsstand problem: A capacitated multiple-product single-period inventory problem [J]. European J of Operational Research, 1996, 94(1): 29-42.

[12] Lau H S, Lau A H L. The multi-product multiconstraint newsboy problem: Applications formulation and solution [J]. J of Operations Management, 1995, 13(2): 153-162.

[13] Ben-Daya M, Raouf A. On the constrained multi-item single period inventory problem[J]. Int J of Operations & Production Management, 1993, 13(11): 104 − 112.

[14] Hadley G, Whitin T M. Analysis of inventory systems [M]. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ. 1963.

[15] 陈宝林. 最优化理论与算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 508-503.
(Chen Bao-lin. Optimal theory and algorithm [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004: 508-503.)