第 23 卷 第 1 期 控 制 与 决 策 2008 年 1 月
Vol. 23 No. 1 Control and Decision Jan. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)01-0056-04

群决策中模糊偏好信息转化的若干性质研究

朱建军, 刘思峰
(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘 要: 研究群体决策中偏好信息转化的一致性和权重变化问题. 在一致性方面,得到了不同转化系数转化后的互反判断矩阵次序一致性、完全乘性一致性与互补判断矩阵相同,且一致性比例与转化系数的大小正相关的结论. 在权重数值方面,证明了方案优先顺序与转化系数大小无关,但较大转化系数能放大方案之间的差别,而较小系数则缩小方案之间差别的性质. 相关结论可为互补判断矩阵的权重求解以及一致性分析提供参考.

关键词: 群决策; 模糊偏好; 判断矩阵; 信息转化
中图分类号: C943 **文献标识码**: A

Mechanism of fuzzy preference translation in group decision

ZHU Jian-jun, LIU Si-feng
(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: ZHU Jian-jun, E-mail: zhujianjun@nuaa.edu.cn)

Abstract: The preference information translation problem of consistency and weight variation during the group decision-making process is studied. In the consistency side, the conclusion is obtained that the ordinal consistency and complete multiplicative consistency of the complementary comparison matrix are the same to the reciprocal comparison matrix which is translated from the complementary matrix via the different factor. In addition, the consistency ratio of the reciprocal matrix has the positive correlation with the translation factor. In the weight side, the alternative sequence is independent of the translation factor. Furthermore, the bigger value of the translation factor can magnify the alternative weight difference, while the smaller value can reduce the difference. The conclusions are avail to the consistency and weight approach analysis of the comparison matrix.

Key words: Group decision-making; Fuzzy preference; Comparison matrix; Information translation

1 引 言

随着社会的发展、科学技术的进步,知识和信息量急剧增加,使得各种决策问题错综复杂,多个决策者参与的决策情况越来越多,群决策问题逐渐受到国内外学者的广泛关注[1]. 群决策中决策者可能给出多种类型的偏好信息[2],其中 0.1～0.9 标度由于既具有较强的心理学基础,又吸收了模糊数学的理论,能较好地解决判断矩阵的一致性问题,而越来越受到人们的重视[3,4],由此形成了互补判断矩阵. 比较典型的权重求解方法是基于互补判断矩阵和互反判断矩阵之间的关系,将互补判断矩阵转化成互反判断矩阵后求解[5-7]. 此外,群决策中常采用信息转化的方法来集结专家给出的多种结构的偏好信息[8]. 然而,各种偏好信息一致化时都不可避免地引起信息失真. 据作者掌握的资料,目前对转化方法是否保存了原有偏好信息以及转化过程的内在机理尚无全面的研究报道,而缺乏理论支持的转化方法是没有依据的. 本文对此进行了研究,得出了一些有益的结论.

2 转换过程的一致性变化

定义 1[5] 称判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 为互补判断矩阵,若 $b_{ij} + b_{ji} = 1, b_{ii} = 0.5, i, j = 1, 2, \cdots, n.$

定义 2[9] 称判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为互反判断矩阵,若 $a_{ij} a_{ji} = 1, a_{ii} = 1, i, j = 1, 2, \cdots, n.$

定义 3[5] 对于互补判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$,若对任意 i, j, k,有 $b_{ik} b_{kj} b_{ji} = b_{ki} b_{jk} b_{ij}$,则称 B 具有完全

收稿日期: 2006-08-23; **修回日期**: 2006-12-12.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70473037,70701017); 中国博士后科学研究基金项目(2005038575); 江苏省博士后科学研究基金项目(苏人通[2005]255 号).
作者简介: 朱建军(1976 —),男,江苏丹阳人,副教授,博士后,从事群决策理论方法、决策支持系统等研究; 刘思峰(1955 —),男,河南平舆人,教授,博士生导师,从事灰色系统理论等研究.

乘性一致性.

定义 4[9]　对于互反判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,若对任意 i,j,k,有 $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$,则称 A 具有完全一致性. 一般在 $CR(A) \le 0.1$ 时认为 A 具有满意一致性,可将 A 导出的权重 w_i 作为决策依据,其中: $CR(A) = \dfrac{\lambda_{\max}(A) - n}{(n-1)RI}$, $\lambda_{\max}(A)$ 为 A 的主特征值, n 为判断矩阵阶数, RI 为随机一致性指标.

定义 5[9]　若由 $a_{ij} > 1$, $a_{jk} > 1$ 能导出 $a_{ik} > 1$,则称判断矩阵具有次序一致性;否则,若 $a_{ik} < 1$,则称其不具有次序一致性.

由于互补判断矩阵转化成互反判断矩阵的方式并不唯一,本文首先提出互补判断矩阵的 α 转化方式,进而研究在 α 不同取值情况下,转化过程中一致性及权重的变化特点.

定义 6　称 $a_{ij} = (b_{ij}/b_{ji})^{\alpha}(\alpha > 0)$ 为互补判断矩阵的 α 转化方式.

当 $\alpha = 1$ 时,即为 $a_{ij} = b_{ij}/b_{ji}$,属 α 转化的特例.

定义 7　称 $d = \sum_{i,j} | a_{ij}^{\alpha} - a_{ij} |$ 为判断矩阵 $(a_{ij}^{\alpha})_{n\times n}$ 与 $(a_{ij})_{n\times n}$ 之间的偏差距离.

2.1　次序一致性和完全一致性的变化

定理 1　若 $b_{ij} \ge 0.5$,则 $a_{ij} \ge 1$;若 $b_{ij} \le 0.5$,则 $a_{ij} \le 1$;若 $b_{ij} = 0.5$,则 $a_{ij} = 1$.

证明　若 $b_{ij} \ge 0.5$,由 $b_{ji} = 1 - b_{ij}$, $b_{ji} \le 0.5$,有 $b_{ij}/b_{ji} \ge 1$,则 $a_{ij} = (b_{ij}/b_{ji})^{\alpha} \ge 1$;若 $b_{ij} \le 0.5$, $b_{ji} \ge 0.5$,有 $b_{ij}/b_{ji} \le 1$,则 $a_{ij} = (b_{ij}/b_{ji})^{\alpha} \le 1$;若 $b_{ij} = 0.5$, $b_{ji} = 0.5$,有 $b_{ij}/b_{ji} = 1$,则 $a_{ij} = (b_{ij}/b_{ji})^{\alpha} = 1$. □

定理 1 描述了互补判断矩阵基于 α 转化后得到的互反判断矩阵元素形式的特点.

定理 2　若互补判断矩阵具有次序一致性,即 $b_{ij} \ge 0.5$, $b_{jk} \ge 0.5$,有 $b_{ik} \ge 0.5$,则基于 α 转换的互反判断矩阵也具有次序一致性,即 $a_{ij} \ge 1$, $a_{jk} \ge 1$,有 $a_{ik} \ge 1$.

证明　根据定理 1, $b_{ij} \ge 0.5 \Rightarrow a_{ij} \ge 1$, $b_{jk} \ge 0.5 \Rightarrow a_{jk} \ge 1$, $b_{ik} \ge 0.5 \Rightarrow a_{ik} \ge 1$,易得到定理 2 的结论. □

定理 3　若互补判断矩阵具有完全乘性一致性,即 $b_{ik}b_{kj}b_{ji} = b_{ki}b_{jk}b_{ij}$,则基于 α 转换的互反判断矩阵也具有完全一致性,即 $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$.

证明　由 $b_{ik}b_{kj}b_{ji} = b_{ki}b_{jk}b_{ij} \Rightarrow \dfrac{b_{kj}b_{ji}}{b_{jk}b_{ij}} = \dfrac{b_{ki}}{b_{ik}}$,则

$$a_{ij}a_{jk} = \left(\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\right)^{\alpha}\left(\frac{b_{jk}}{b_{kj}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{b_{ij}b_{jk}}{b_{ji}b_{kj}}\right)^{\alpha} = \left(\frac{b_{ik}}{b_{ki}}\right)^{\alpha} = a_{ik}. \ \square$$

2.2　一致性比例的变化

由于判断矩阵特征值 $\lambda_{\max}$ 和元素 a_{ij} 之间为复杂的非线性关系,当判断矩阵的阶数较大时难以用线性方式表达,本文利用文献[10,11]的结论进行分析,进而研究互补判断矩阵转化一致性比例的变化.

性质 1[10,11]　对于判断矩阵 A,特征多项式 $p_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$ 中 λ^{n-3} 项系数 c_3,主特征值为 $\lambda_{\max}(A)$, c_3 和 $\lambda_{\max}(A)$ 的关系为: c_3 越大, $\lambda_{\max}(A)$ 越小;反之, c_3 越小,则 $\lambda_{\max}(A)$ 越大. 其中

$$c_3 = \sum_{1\le i<j<k\le n}\left(2 - \left(\frac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} + \frac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}\right)\right).$$

定理 4　α 越大,基于 α 转换的互反判断矩阵一致性比例 CR 越大; α 越小,则 CR 越小.

证明　记由 α 转换得到的互反判断矩阵为 $A^{\alpha} = ((b_{ij}/b_{ji})^{\alpha})_{n\times n} = (a_{ij})^{\alpha}_{n\times n}$, A^{α} 对应的最大特征值为 $\lambda_{\max}$,一致性比例 $CR = \dfrac{\lambda_{\max} - n}{RI(n-1)}$. 令 $f(\alpha) = \left(\dfrac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}}\right)^{\alpha}$,由 $f(\alpha)$ 表达式的对称性,若 $\dfrac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} < 1$,则 $\dfrac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} \ge 1$;若 $\dfrac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} \ge 1$,则 $\dfrac{a_{ik}}{a_{ij}a_{jk}} < 1$. 不妨设 $f_1 = \dfrac{a_{ij}a_{jk}}{a_{ik}} \ge 1$,则 $f(\alpha) = f_1^{\alpha} + (1/f_1)^{\alpha}$.

下面分析 $f(\alpha)$ 的单调性. 当 $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$ 时,由假设 $f_1 = a_{ij}a_{jk}/a_{ik} \ge 1$,则 $f_1^{\alpha} = (a_{ij}a_{jk}/a_{ik})^{\alpha} > 1$, $1/f_1^{\alpha} < 1$,即 $f_1^{\alpha} > 1/f_1^{\alpha}$;由 $df(\alpha)/d\alpha = (f_1^{\alpha} - 1/f_1^{\alpha})\ln f_1$,则 $df(\alpha)/d\alpha > 0$,由此, $f(\alpha)$ 呈现单调递增;当 $\alpha = 1$ 时, $df(\alpha)/d\alpha = 0$, $f(\alpha) = C$, C 为常数. 而

$$c_3 = \sum_{1\le i<j<k\le n} 2 - \left(f_1^{\alpha} + \frac{1}{f_1^{\alpha}}\right) = \sum_{1\le i<j<k\le n} 2 - f(\alpha),$$

由 $f(\alpha)$ 递增,则 c_3 递减. 根据性质 1 中 c_3 和 $\lambda_{\max}$ 的关系,可得如下结论:当 α 越大时, $f(\alpha)$ 越大, c_3 越小,则 $\lambda_{\max}$ 越大, CR 越大;反之亦然. □

定理 4 说明了不同的转化方式得到的互反判断矩阵反映出决策者的逻辑判断一致性水平也不尽相同. α 越大,则得到的判断矩阵的一致性越差;反之则越好.

3　转换过程权重的变化

3.1　方案顺序的变化

定理 5　通过 α 转换,方案的优先顺序并不随 α 的数值大小发生变化.

证明　用几何平均法求权重,有

$$w_i = \frac{\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\right)^{\alpha}\right)^{1/n}}{\sum_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\right)^{\alpha}\right)^{1/n}},$$

$$\frac{w_i}{w_k}(\alpha)=\frac{\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\right)^{\alpha}\right)^{1/n}}{\left(\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{b_{kj}}{b_{jk}}\right)^{\alpha}\right)^{1/n}}=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{b_{jk}}{b_{kj}}\right)^{\alpha/n},$$

记 $\frac{w_i}{w_k}(\alpha)=r^{\alpha}$. 若 $r>1$, 则 $r^{\alpha}>1$; 若 $0<r<1$, 则 $r^{\alpha}<1$. □

定理5说明, 不同 α 值转化并不改变方案之间的相对优劣顺序, 这体现了 α 转化的保序性.

3.2 权重数值的变化

定理6 通过 α 转换, 方案之间相对重要性差别将发生变化: $\alpha>1$ 时, 相对重要性差别出现放大现象, α 越大, 放大越明显; 当 $1>\alpha>0$ 时, 相对重要性差别出现缩小现象, α 越小, 缩小越明显.

证明 设采用几何平均方法求解权重, 由定理5, $\frac{w_i}{w_k}(\alpha)=\left(\prod_{j=1}^{n}\frac{b_{ij}}{b_{ji}}\frac{b_{jk}}{b_{kj}}\right)^{\alpha/n}$, 记作 $\frac{w_i}{w_k}(\alpha)=r^{\alpha}$. 若 $r>1$, 当 $\alpha>1$ 时, $r^{\alpha}>r>1$. 若 $\alpha_2>\alpha_1$, 则 $r^{\alpha_2}>r^{\alpha_1}$, 且 α_2 与 α_1 的差值越大, 则 r^{α_2} 与 r^{α_1} 的差值也越大. 同理, 当 $0<\alpha<1$ 时, $r>r^{\alpha}>1$.

若 $0<r<1$, 当 $\alpha>1$ 时, $r^{\alpha}<r<1$; 当 $0<\alpha<1$ 时, $1>r^{\alpha}>r$. □

定理7 对某个 α_1, α 越大, 基于 α 转换得到的互反判断矩阵与基于 α_1 时得到判断矩阵之间的偏差距离越大; 反之则越小.

证明 由定义7,

$$d=\sum_{i,j}\left|a_{ij}^{\alpha}-a_{ij}^{\alpha_1}\right|=\sum_{1\le i<j\le n}\left|\left(a_{ij}^{\alpha}-a_{ij}^{\alpha_1}\right)\right|+\left|\left(1/a_{ij}^{\alpha}-1/a_{ij}^{\alpha_1}\right)\right|.$$

若 $a_{ij}>1$, 则 $a_{ij}^{\alpha}>1$, $a_{ij}^{\alpha_1}>1$, 且 $\alpha>\alpha_1\Rightarrow a_{ij}^{\alpha}>a_{ij}^{\alpha_1}$, $1/a_{ij}^{\alpha}<1/a_{ij}^{\alpha_1}$, 有

$$d=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ij}^{\alpha}-a_{ij}^{\alpha_1}\right)+\left(1/a_{ij}^{\alpha_1}-1/a_{ij}^{\alpha}\right).$$

若 $a_{ij}<1$, 则 $a_{ij}^{\alpha}<1$, $a_{ij}^{\alpha_1}<1$, 且 $\alpha>\alpha_1\Rightarrow a_{ij}^{\alpha}<a_{ij}^{\alpha_1}$, $1/a_{ij}^{\alpha}>1/a_{ij}^{\alpha_1}$, 进行如下代换: $b_{ij}^{\alpha}=1/a_{ij}^{\alpha}$, $b_{ij}^{\alpha_1}=1/a_{ij}^{\alpha_1}$, 此时有

$$d=\sum_{1\le i<j\le n}\left(b_{ij}^{\alpha}-b_{ij}^{\alpha_1}\right)+\left(1/b_{ij}^{\alpha_1}-1/b_{ij}^{\alpha}\right).$$

不妨设 $a_{ij}>1$, 将上式统一写成

$$d=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ij}^{\alpha}-a_{ij}^{\alpha_1}\right)+\left(1/a_{ij}^{\alpha_1}-1/a_{ij}^{\alpha}\right).$$

对 α 求导数(用符号 $\mathrm{d}d/\mathrm{d}\alpha$ 表示), α_1 为常数, 即得到

$$\mathrm{d}d/\mathrm{d}\alpha=\sum_{1\le i<j\le n}\frac{\mathrm{d}\left(a_{ij}^{\alpha}-1/a_{ij}^{\alpha}\right)}{\mathrm{d}\alpha}=\sum_{1\le i<j\le n}\left(a_{ij}^{\alpha}+1/a_{ij}^{\alpha}\right)\ln a_{ij}>0.$$

因此, 当 $\alpha>0$, $\alpha\ne1$ 时, d 为递增函数. 由此, α 越大, 则偏离距离越大; 反之亦然. □

定理5表明, 基于 α 的转化不改变方案优劣顺序; 定理6则说明, 尽管 α 转化不改变方案之间的优劣顺序, 但方案之间的重要性差别却随 α 的变化而变化. 在一些情况下, 为了放大方案的相对重要性差别, 可适当增大 α. 但定理4表明, α 越大, 得到的互反判断矩阵的满意一致性将越差. 若基于某个 α_1 值得到的互反判断矩阵能代表决策者的真实偏好, 定理7表明, 基于越大的 α 值得到判断矩阵与决策者的真实偏好偏差也越大. 因此, 通过增大 α 值来放大方案重要性差别将受到一定的限制, 决策者应综合上述结论适当选择 α.

实际操作过程中, 可先取 $\alpha=1$, 若转化后得到的判断矩阵具有满意一致性, 则可适当提高 α 值. 由于 α 越大, 得到判断矩阵的满意一致性越差, 应保证转化后的判断矩阵具有满意一致性, 可作为 α 取值上限. 若 $\alpha=1$ 得到的判断矩阵不具有满意一致性, 可适当降低 α 取值, 但不存在 CR 越小决策效果越好的结论, 一般可将 $\alpha=0.8$ 作为下限值. 若 α 较小(如 $\alpha=0.5$ 甚至更小), 判断矩阵仍不具有满意一致性, 说明决策者原始判断逻辑性较差, 应适当修正原始判断. 权重数值方面, 由于 $\frac{w_i}{w_k}(\alpha)=r^{\alpha}$, 权重放大倍数与 r 有关, 应根据具体 r 值来确定 α 的取值, 同时保证转化后判断矩阵具有满意一致性.

4 算例分析

某风险投资公司有一笔资金要进行最优投资, 有4个备选方案, 即某生物制药公司, 某食品公司, 某时装公司和某计算机软件公司. 设决策者聘请若干专家进行顾问决策, 专家采用1～9和0.1～0.9两种标度, 采用两两比较给出判断. 拟采用将所有互补判断矩阵转化成互反判断矩阵的方法进行集结, 设某位专家给出如下互补判断矩阵(其余判断矩阵略):

$$B=\begin{bmatrix}0.5&0.2&0.6&0.7\\0.8&0.5&0.8&0.7\\0.4&0.2&0.5&0.8\\0.3&0.3&0.2&0.5\end{bmatrix}.$$

基于不同 α 转化得到的判断矩阵一致性和权重见表1. 由表1可看出, 若 α 越大, 转化后互反判断矩阵的一致性比例 CR 越大; 反之则越小. 在 $\alpha<0.8$ 时, 得到的互反判断矩阵的一致性比例 CR ≤0.1. 依据层次分析法的原理, 所得到的判断矩阵具有满意一致性, 可将相应判断矩阵导出的权重作为方案的序. 而在 $\alpha\ge0.8$ 时, 所得到的判断矩阵不具有满意一致性, 并且 α 越大时, 一致性比例 CR 增长越快,

表 1　α不同取值时的结果

α	CR	方案排序	w_1/w_2
0.2	0.006 2	2,1,3,4	1.21
0.4	0.025	2,1,3,4	1.47
0.6	0.056 8	2,1,3,4	1.80
0.8	0.102 5	2,1,3,4	2.20
1.0	0.163 1	2,1,3,4	2.70
1.2	0.239 8	2,1,3,4	3.31
1.4	0.334 2	2,1,3,4	4.06

导致判断矩阵的一致性也越差. 然而不管 α的大小如何,方案之间的优劣顺序并不发生变化,即始终有方案排列顺序 2,1,3,4,该性质为采用转化方式求解互补判断矩阵的权重提供了理论保障,即方案之间的相对排序不受人为 α值的选择影响. 此外,由表 1 可见,α越大,方案之间相对重要性差别也越大,即放大了方案之间的差距,这为一些决策情况下要适当拉开方案之间的差距提供了一种解决途径.

5　结　　论

1) 基于α转化得到的互反判断矩阵次序一致性与转换前的互补判断矩阵相同,且若互补判断矩阵具有乘性一致性,则互反判断矩阵具有完全一致性. 因此,α转化并不改变决策者判断的一致性特性,说明采用信息转化来求解互补判断矩阵的权重方法是可行的,相关结论为互补判断矩阵的权重求解提供了理论依据.

2) 采用不同数值的 α转化,得到互反判断矩阵的一致性比例不同,且一致性比例数值的大小随着 α的增大而增大. 从改善判断矩阵的一致性角度来看,应采用较小的 α 此外,这种特点也为改进不一致判断矩阵提供了一种方法,即若适当地将判断矩阵的各元素进行 α次乘幂($\alpha < 1$),则得到判断矩阵的一致性比例数值较原判断矩阵的一致性有所改善.

3) α转化方法不改变方案之间的优劣顺序,但较大的 α($\alpha > 1$) 能放大方案之间的优劣关系,而较小的α($\alpha < 1$) 则能缩小差距. 就此而言,可选择适当的 α数值,以调整方案相对权重的数值大小. 比如,决策者若想得到差异较大的排序向量,则可选择较大的 α,但由定理 4 和定理 7,α的选择受到满意一致性等条件的限制.

参考文献(References)

[1] Hwang C, Lin M. Group decision-making under multiple criteria[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

[2] Chiclana F, Herrera F. Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision-making based in fuzzy preference relations [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1998, 97(1): 33-48.

[3] 肖四汉, 樊治平, 王梦光. Fuzzy 判断矩阵的一致性分析[J]. 系统工程学报, 2001, 16(1): 142-145.
(Xiao Si-han, Fan Zhi-ping, Wang Meng-guang. Consistency analysis of the fuzzy comparison matrix[J]. J of Systems Engineering, 2001, 16(1): 142-145.)

[4] Herrera V, Herrera F, Chiclana F. Some issues on consistency of fuzzy preference relations[J]. European J of Operational Research, 2004, 154(1): 98-109.

[5] 徐泽水. AHP 中两类标度法的关系研究[J]. 系统工程理论与实践, 1999, 19(7): 97-101.
(Xu Ze-shui. Relationship of two scales of AHP[J]. Systems Engineering Theory and Practice, 1999, 19 (7): 97-101.)

[6] 徐泽水. 不确定多属性决策方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2004.
(Xu Ze-shui. Uncertain multiple attribute decision-making: Methods and applications [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)

[7] 宋光兴, 杨德礼. AHP 判断矩阵与模糊判断矩阵相互转化方法[J]. 大连理工大学学报, 2003, 43(4): 535-539.
(Song Guang-xing, Yang De-li. Approaches to transformation between AHP judgment matrix and fuzzy judgment matrix [J]. J of Dalian University of Technology, 2003, 43(4): 535-539.)

[8] 樊治平, 姜艳萍. 基于 OWG 算子的不同形式偏好信息的群决策方法[J]. 管理科学学报, 2003, 6(1): 32-36.
(Fan Zhi-ping, Jiang Yan-ping. Approach to group decision-making with different forms of preference information based on OWG operators [J]. J of Management Sciences in China, 2003, 6(1): 32-36.)

[9] Saaty T. Decision making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary [J]. European J of Operational Research, 2003, 145(1): 85-91.

[10] Obata T, Shiraishi S. Assessment for an incomplete comparison matrix and improvement of an inconsistent comparison: Computational experiments[C]. Proc of the 5th Int Symposium on the Analytic Hierarchy Process. Kobe, 1999: 200-205.

[11] 朱建军, 刘士新, 王梦光. 一种灵敏度和一致性相结合的决策区域分析[J]. 控制理论与应用, 2004, 21 (4): 537-540.
(Zhu Jian-jun, Liu Shi-xin, Wang Meng-guang. Analysis of sensitivity and consistency integration on the decision-making region [J]. Control Theory and Application, 2004, 21(4): 537-540.)