第 23 卷 第 1 期 控 制 与 决 策 2008 年 1 月
Vol. 23 No. 1 Control and Decision Jan. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)01-0084-03

一类含扰动的非线性切换系统稳定性分析

向峥嵘, 向伟铭, 陈庆伟
(南京理工大学 自动化学院, 南京 210094)

摘　要: 首先在非零扰动情况下,利用平均滞留时间的方法给出保证切换系统一致有界或一致终极有界的条件以及最终边界. 当切换系统中含有不稳定子系统时,证明了当切换规则满足一定条件时,仍可保证切换系统是有界的. 然后在零扰动情况下,给出了扰动非线性切换系统稳定的充分条件. 最后通过仿真算例说明了所得结果的有效性.

关键词: 非线性切换系统;平均滞留时间; 扰动; 稳定性; 一致有界性; 一致终极有界性
中图分类号: TP273.2　　**文献标识码**: A

Stability analysis for a class of switched nonlinear systems with perturbations

XIANG Zheng-rong, XIANG Wei-ming, CHEN Qing-wei
(School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China. Correspondent: XIANG Zheng-rong, E-mail: xiangzr@mail.njust.edu.cn)

Abstract: Under the condition of non-vanishing perturbation, sufficient conditions for guaranting the uniformly boundness and uniformly ultimate boundness of system's solution are derived. When the system is composed of unstable subsystems and stable subsystems, it is proved that if the activation time of stable subsystems is relatively large compared with that of unstable subsystems, then the boundness is guaranteed. Under the condition of vanishing perturbation, a sufficient condition of the stability of the system is derived. Finally, the simulation results show that the methods proposed is effective.

Key words: Switched nonlinear systems; Average dwell time; Perturbations; Stability; Uniformly boundness; Uniformly ultimate boundness

1 引　　言

切换系统是一类重要的混杂系统,是指由一组连续或离散动态子系统组成,并按某种切换规则在各子系统间切换的动力系统[1]. 对切换系统的研究具有重要的理论意义和应用价值. 切换控制在很多实际系统中得到了应用,如:计算机磁盘控制系统、熔炉的开关控制以及汽车引擎转矩控制系统等[1].

切换系统的稳定性是研究的一个重要方面. 研究表明,由不稳定子系统组成的切换系统,经选择合适的切换可使其稳定;而即使全由指数稳定子系统构成的切换系统,却在某些切换序列下失稳[1,2]. 各种基于李雅普诺夫函数的方法是研究切换系统稳定性的重要手段[3]. 基于滞留时间的方法也取得了一些研究成果. 如:文献[4]研究了滞留时间足够长情况下切换系统的稳定条件;文献[5]提出了平均滞留时间的概念;文献[6]基于平均滞留时间研究了含有不稳定子系统的线性切换系统的稳定性;文献[7]利用平均滞留时间研究了切换系统输入-状态稳定问题;文献[8]给出一类非线性切换系统二次稳定的充要条件;文献[9]给出一类特殊形式的非线性切换系统二次稳定充分条件.

由于实际系统中不可避免地存在建模误差、不确定性以及干扰等,带干扰项的切换系统研究正逐渐引起人们的重视. 文献[6]研究了含非线性扰动项的线性切换系统解的有界性问题;文献[10]给出了在任意切换规则下含非线性扰动项的线性时变系统指数稳定的充分条件. 本文则利用平均滞留时间方法,研究含扰动情况下非线性切换系统的鲁棒稳定

收稿日期: 2006-09-21; **修回日期**: 2006-11-28.
基金项目: 江苏省自然科学基金项目(BK2007210); 南京理工大学科研发展基金项目(AB96248).
作者简介: 向峥嵘(1969—),男,南京人,副教授,从事非线性系统、鲁棒控制等研究; 陈庆伟(1963—),男,江苏泰州人,教授,博士生导师,从事智能控制、网络控制系统等研究.

性问题，得到了扰动非线性切换系统稳定或一致有界的条件。最后通过仿真例子说明了本文结果的有效性。

2　预备知识和问题描述

考虑具有 N 个子系统的扰动非线性切换系统

$$\dot{x} = f_i(x) + g_i(t,x). \tag{1}$$

其中：$i \in I = \{1,2,\cdots,N\}$，$f_i: R^n \to R^n$ 和 $g_i:[0,\infty) \times R^n \to R^n$ 是关于 x 的局部 Lipschitz 函数，$g_i(t,x)$ 是扰动项。切换规则 $\sigma:[0,\infty) \to I$ 是右连续分段常值函数。用序列 $\{t_k\}_{k=0}^{\infty} := \{t_0,t_1,\cdots,t_k,\cdots\}$ 表示系统的切换序列，t_0 为系统的初始时刻，t_k 为系统的第 k 次切换时刻。假设系统(1)的状态 $x(t)$ 由初始状态 $x(0)$，输入 $u(t)$ 和切换序列 $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ 唯一确定。

3　主要结果

考虑扰动项为非零扰动的情况，即 $g_i(t,0) \neq 0$。假设扰动 $g_i(t,x)$ 满足边界

$$\|g_i(t,x)\| \le \gamma(t)\|x\| + \beta(t),\ \forall i \in I. \tag{2}$$

其中 $\gamma: R \to R$ 与 $\beta: R \to R$ 均是非负且连续的。

定理 1　考虑系统(1)，若存在一组连续可微的正定函数 $V_i(x)\ (i \in I)$ 和常数 $\lambda_0 > 0$ 满足

$$\alpha_1\|x\|^2 \le V_i(x) \le \alpha_2\|x\|^2,$$

$$\left\|\frac{\partial V_i}{\partial x}\right\| \le \alpha_3\|x\|, \tag{3}$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} f_i(x) \le -2\lambda_0 V_i(x), \tag{4}$$

其中 α_1，α_2 和 α_3 是正数。在切换时刻 t_k，系统从子系统 i 切换到子系统 j，存在 $\mu \ge 1$ 且满足

$$V_j(x(t_k)) \le \mu V_i(x(t_k)). \tag{5}$$

如果平均滞留时间满足

$$\tau_a \ge \ln\mu/(2\alpha). \tag{6}$$

其中：$\alpha = \lambda - \alpha_3\varepsilon/(2\alpha_1)$，$\lambda \in \{\lambda \mid 0 < \lambda < \lambda_0\}$，$0 \le \varepsilon < 2\alpha_1\lambda/\alpha_3$。对应的扰动项若满足

$$\int_{t_0}^{t}\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau \le \varepsilon(t-t_0) + \eta,\ \eta \ge 0, \tag{7}$$

$$\int_{t_0}^{\infty}\beta(t)\,\mathrm{d}t < \infty, \tag{8}$$

则系统(1)的状态是一致有界且一致终极有界的。

注 1　扰动项满足的条件(7)在文献[11]中有详细的讨论。

证明　对系统(1)，由式(2)～(4)可得

$$\dot{V}_i(x) \le -\left(2\lambda_0 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1}\gamma(t)\right)V_i(x) + \alpha_3\beta(t)\sqrt{V_i(x)/\alpha_1},\ \forall i \in I.$$

令 $W_i = \sqrt{V_i}$，可得

$$\dot{W}_i \le -\left(\lambda_0 - \frac{\alpha_3}{2\alpha_1}\gamma(t)\right)W_i + \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1}}\beta(t).$$

考虑 $\forall t > 0$，$t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ 为 $[t_0,t]$ 上的切换时刻，假设在 $[t_n,t_{n+1})$ 内第 i 个子系统工作，其中 $0 \le n \le k$。定义分段连续函数 $W(t) = W_i(x)$，$t \in [t_n,t_{n+1})$，有

$$W(t) \le \Phi(t,t_k)W(t_k) + \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1}}\int_{t_k}^{t}\Phi(t,\tau)\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$\Phi(t,\tau) = \exp\left(-\lambda_0(t-\tau) + \frac{\alpha_3}{2\alpha_1}\int_{\tau}^{t}\gamma(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right).$$

经推导可得

$$W(t) \le \tilde{\mu}^k\Big[\Phi(t,t_0)W(t_0) + \sum_{n=1}^{k}\tilde{\mu}^{-n}\frac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1}}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\Phi(t,\tau)\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau\Big] + \frac{\alpha_3}{2\sqrt{\alpha_1}}\int_{t_k}^{t}\Phi(t,\tau)\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

其中 $\tilde{\mu} = \sqrt{\mu}$。若 $\gamma(t)$ 满足条件(7)，当 $t > \tau$ 时，有

$$\Phi(t,\tau) \le \rho\mathrm{e}^{-\alpha_0(t-\tau)} \le \rho.$$

其中

$$\alpha_0 = \lambda_0 - \frac{\alpha_3\varepsilon}{2\alpha_1} > 0,$$

$$\rho = \exp\left(\frac{\alpha_3\eta}{2\alpha_1}\right).$$

由式(6)可得

$$\tilde{\mu}^{k-n} \le \tilde{\mu}^{N_0 + \frac{t-t_n}{\tau_a}} \le \tilde{\mu}^{N_0}\mathrm{e}^{\alpha(t-t_n)},$$

其中 $\alpha = \lambda - \dfrac{\alpha_3\varepsilon}{2\alpha_1}$。因此有

$$W(t) \le \tilde{\mu}^{N_0}\rho\mathrm{e}^{-(\alpha_0-\alpha)(t-t_0)}W(t_0) + \frac{\alpha_3\rho}{2\sqrt{\alpha_1}}\tilde{\mu}^{N_0}\int_{t_0}^{\infty}\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

因为 $\lambda_0 > \lambda$，所以 $\alpha_0 > \alpha$。由式(2)可得

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\tilde{\mu}^{N_0}\mathrm{e}^{-(\alpha_0-\alpha)(t-t_0)}\rho\|x(t_0)\| + \frac{\alpha_3\rho}{2\alpha_1}\tilde{\mu}^{N_0}\int_{t_0}^{\infty}\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau,$$

由于 $\int_{t_0}^{\infty}\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty$，系统(1)一致有界且一致终极有界。最终边界

$$b = \tilde{\mu}^{N_0}\frac{\alpha_3\rho}{2\alpha_1}\int_{t_0}^{\infty}\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

□

若扰动项为零，即 $g_i(t,0) = 0$，$\forall i \in I$，并假设扰动 $g_i(t,x)$ 满足

$$\|g_i(t,x)\| \le \gamma(t)\|x\|,\ \forall i \in I, \tag{9}$$

其中 $\gamma: R \to R$ 为非负且连续。可以看出，零扰动是非零扰动的一种特殊情况。于是可得以下推论：

推论 1　若零扰动 $g_i(t,x)$ 满足式(9)，考虑系统(1)，若存在一组连续可微正定函数 $V_i(x)\ (i \in I)$ 和常数 $\lambda_0 > 0$ 满足式(3)和(4)。在切换时刻 t_k，系统

从子系统 i 切换到子系统 j,存在 $\mu\ge1$ 满足式(5),平均滞留时间满足式(6),对应的扰动项 $\gamma(t)$ 满足式(7),则系统(1)指数稳定.

定理1和推论1均要求 $\lambda_0>0$ 且各子系统对 λ_0 一致成立,即要求标称系统各子系统均指数稳定. 实际上,在标称系统有不稳定子系统的情况下,系统(1)在一定的切换规则下也能够保证指数稳定. 若切换系统由稳定的和不稳定的子系统组成,且每个子系统对应存在一个 $\lambda_i>0(i\in I)$ 满足

$$\frac{\partial V_i}{\partial x}f_i(x)\le\begin{cases}-2\lambda_iV_i(x), & i\in I^-;\\ 2\lambda_iV_i(x), & i\in I^+.\end{cases}\tag{10}$$

其中:I^- 表示稳定子系统的集合,I^+ 表示不稳定子系统的集合. 令 $T^-(\tau,t)$ 表示在 $[\tau,t]$ 内系统所有 $i\in I^-$ 对应的子系统运动的总时间,$T^+(\tau,t)$ 表示在 $[\tau,t]$ 内系统所有 $i\in I^+$ 对应的子系统运动的总时间. 定义符号 $\lambda^-=\min\limits_{i\in I^-}\lambda_i$,$\lambda^+=\max\limits_{i\in I^+}\lambda_i$.

条件1 时间序列 $t_0=\delta_0<\delta_1<\cdots<\delta_k<\cdots$, $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_k=\infty$,且 $\sup\limits_{k=1,2,\cdots}\{\delta_k-\delta_{k-1}\}=T<\infty$,切换规则在 $[\delta_{k-1},\delta_k)(k=1,2,\cdots)$ 上满足

$$\frac{T^-(\delta_{k-1},\delta_k)}{T^+(\delta_{k-1},\delta_k)}\ge\frac{\lambda^++\lambda^*}{\lambda^--\lambda^*},$$

$$\lambda^*\in\{\lambda^*\mid 0<\lambda^*<\lambda^-\}.$$

定理2 考虑系统(1),若存在一组连续可微的正定函数 $V_i(x)(i\in I)$ 和常数 $\lambda_i\ne0(i\in I)$ 满足式(3)和(10). 假设在切换时刻 t_k,系统从子系统 i 切换到子系统 j,存在 $\mu\ge1$ 满足式(5). 在切换规则满足条件1的情况下,当平均滞留时间满足

$$\tau_a\ge\ln\mu/(2\alpha).\tag{11}$$

其中:$\alpha=\lambda-\alpha_3\varepsilon/(2\alpha_1)$,$\lambda\in\{\lambda\mid 0<\lambda<\lambda^*\}$,$0\le\varepsilon<2\alpha_1\lambda/\alpha_3$ 对应的扰动项若满足式(7)和(8). 则系统(1)的解是一致有界且一致终极有界的.

类似定理1的证明,即可证得该定理.

注2 条件1实际上保证了切换系统在稳定的子系统中停留的总时间在某种意义上比在不稳定的子系统中停留的总时间长.

推论2 若零扰动 $g_i(t,x)$ 满足式(9),考虑系统(1),若存在一组连续可微正定函数 $V_i(x)(i\in I)$ 和 $\lambda_i\ne0(i\in I)$ 满足式(3)和(10). 在切换时刻 t_k,系统从子系统 i 切换到子系统 j,存在 $\mu\ge1$ 满足式(5),切换规则满足条件1,平均滞留时间满足式(11),对应扰动项 $\gamma(t)$ 满足式(7),则系统(1)指数稳定.

4 数值例子

考虑由式(1)描述的含两个子系统的扰动切换系统,其中

$$f_1=-x-2x^3,\ g_1(x)=0.5x\sin x+\frac{10}{(t+1)^2};$$

$$f_2=x-x\sin^2x,\ g_2(x)=0.4x;$$

$$g_i(x)\le0.5\|x\|+\frac{10}{(t+1)^2},\ i\in I.$$

取 $V_1=V_2=x^2$,有 $\mu=1$,

$$\dot V_1=2x(-x-2x^3)\le-2x^2,$$

$$\dot V_2=2x(x-x\sin^2x)\le2x^2,$$

因此 $\lambda^-=1$,$\lambda^+=1$. 因为 $\ln\mu=0$,所以 $\tau_a>0$ 即可满足定理2的条件. 取 $\lambda^*=0.6$,$\lambda=0.55$,可得

$$\frac{T^-(\delta_{k-1},\delta_k)}{T^+(\delta_{k-1},\delta_k)}\ge4,$$

$$\varepsilon=\gamma(t)<0.55.$$

切换规则为:从系统1开始,在系统1中停留0.4 s,切换到系统2,停留0.1 s,再切换到系统1. 此切换规则满足定理2的条件. 初始条件为 $x(0)=2$,仿真曲线如图1所示.

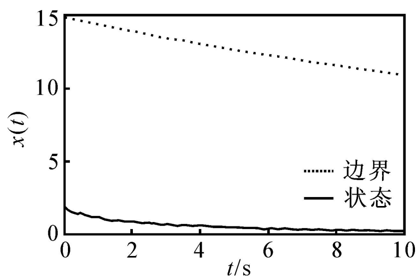

图1 含扰动的切换系统状态

5 结 语

本文研究了一类非线性切换系统在含有扰动情况下的鲁棒稳定性问题. 利用平均滞留时间的方法分别研究了子系统均是稳定的和包含不稳定子系统时,非线性切换系统稳定或一致有界的条件. 仿真结果表明了所得结论的有效性.

参考文献(References)

[1] Decarlo R, Branicky M S, Lennartson B. Perspective and results on the stability and stabilizability of hybrid systems[J]. Proc of IEEE, 2000, 88(7): 1069-1082.

[2] Song Y, Xiang Z R, Chen Q W, et al. Analysis of sliding mode in planar switched systems[J]. Acta Automatica Sinca, 2005, 31(5):743-749.

[3] Branicky M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1998, 43(4): 475-482.

[4] Morse A S. Supervisory control of families of linear set-point controllers, Part 1: Exact matching[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(10): 1413-1431.

(下转第106页)

$$Q = \begin{bmatrix} 0.026\,5 & 0.001\,8 \\ 0.001\,8 & 0.013\,4 \end{bmatrix},$$

$$S = \begin{bmatrix} -0.020\,3 & -0.034\,2 \\ -0.034\,2 & -0.018\,2 \end{bmatrix}.$$

由 $S = GKQ$,可得

$$GK = SQ^{-1} = \begin{bmatrix} -0.598\,9 & -2.481\,7 \\ -1.394\,5 & 1.549\,7 \end{bmatrix}.$$

再考虑故障阵 G的具体情况,经分离,可得反馈增益 K. GK 的乘积是一个集合,若取

$$G = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix},$$

则

$$K = \begin{bmatrix} -0.998\,2 & -4.136\,2 \\ -1.743\,1 & 1.937\,1 \end{bmatrix}.$$

图 1 给出了仿真结果曲线. 其中:实线是系统正常状态下的响应曲线,虚线是故障状态下的响应曲线. 由图可见,性能在可接受范围之内.

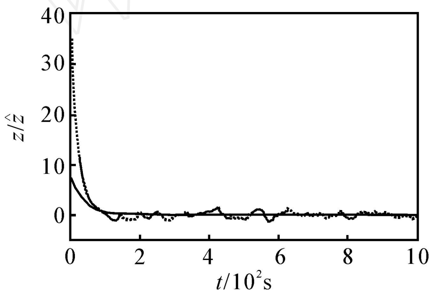

图 1 输出响应曲线图

5 结 语

本文在广义系统的容错控制中,考虑了多性能指标的约束,不仅保证了故障系统的稳定性,而且还同时考虑了系统的鲁棒性和动态性能. 通过仿真算例得到了故障系统的满足多指标约束的可行解,从而证明了本算法的可行性.

参考文献(References)

[1] 张庆灵, 杨冬梅. 不确定广义系统的分析与综合[M]. 沈阳: 东北大学出版社, 2003.
(Zhang Qing-ling, Yang Dong-mei. Analysis and synthesis on uncertain singular systems[M]. Shenyang: Northeastern University Press, 2003.)

[2] 俞立. 鲁棒控制 ——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Yu Li. Robust control — Linear matrix inequality method [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[3] Xie L, Fu M, De Souza C E. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(8): 1253-1256.

[4] 徐胜元, 牛玉刚, 杨成梧. 参数不确定性奇异系统的鲁棒 H_∞控制[J]. 自动化学报, 2001, 27(3): 397-400.
(Xu Sheng-yuan, Niu Yu-gang, Yang Cheng-wu. Robust H_∞ control for singular systems with parameter uncertainty[J]. Acta Automatica Sinica, 2001, 27(3): 397-400.)

[5] 徐胜元, 齐延信, 杨成梧. 不确定广义系统的圆形区域极点配置[J]. 信息与控制, 1999, 28(3): 168-171.
(Xu Sheng-yuan, Qi Yan-xin, Yang Cheng-wu. Pole assignment in a specified circular region for uncertain singular systems[J]. Information and Control, 1999, 28(3): 168-171.)

[6] 王远钢. 满意控制及其期望指标集的相容性理论[D]. 南京: 南京理工大学, 2000.
(Wang Yuan-gang. Satisfactory control and consistency theory of desired Indices [D]. Nanjing: Nanjing University of Science and Technology, 2000.)

(上接第 86 页)

[5] Hespanha J P, Liberzon D, Morse A S. Stability of switched systems with average dwell time[C]. Proc of the 38th Conf on Decision and Control. Madison, 1999: 2655-2660.

[6] Zhai G, Hu B, Yasuda K, et al. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: An average dwell time approach [C]. Proc of the American Control Conf. Chicago, 2000: 200-204.

[7] Vu L, Chatterjee D, Liberzon D. ISS of switched systems and applications to switching adaptive control [C]. Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, 2005: 120-125.

[8] Zhao J, Dimirovski M G. Quadratic stability of a class of switched nonlinear systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(4): 574-578.

[9] Zhao S Z, Zhao J. Quadratic stability of switched nonlinear systems in block-triangular form [J]. Acta Automatica Sinca, 2005, 31(4): 631-633.

[10] 王仁明, 关治洪, 刘新芝. 线性时变切换系统及其非线性扰动系统的稳定性分析[J]. 华中师范大学学报, 2002, 36(3): 265-268.
(Wang Ren-ming, Guan Zhi-hong, Liu Xin-zhi. Stability analysis for linear time-varying switched systems and their nonlinear perturbed systems[J]. J of Central China Normal University, 2002, 36(3): 265-268.)

[11] Khalil H K. Nonlinear systems [M]. 2nd ed. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.