

文章编号: 1001-0920(2008)01-0107-03

# 一类线性离散时间系统有限时间控制问题

沈艳军

(三峡大学 理学院, 湖北 宜昌 443002)

**摘要:** 讨论一类具有时变、有限能量外部扰动的线性离散时间系统的有限时间控制问题. 首先研究问题可解的充分条件, 并讨论了状态反馈控制器存在的条件, 这些条件可归结为基于线性矩阵不等式(LMI)的可解性问题; 然后给出状态反馈控制器和输出反馈控制器的具体设计; 最后通过仿真验证了该方案的有效性.

**关键词:** 离散时间系统; 有限时间有界; 线性矩阵不等式; 扰动

中图分类号: O231      文献标识码: A

## Finite-time control for a class of linear discrete-time systems

SHEN Yan-jun

(College of Science, Three Gorges University, Yichang 443002, China. E-mail: shenyj@ctgu.edu.cn)

**Abstract:** The finite time control problem for a class of linear discrete-time system with time-varying norm-bounded exogenous disturbance is discussed. Sufficient conditions for feasible problems are studied. The conditions for the existence of state feedback controller are discussed, which can be reduced to feasibility problems based on linear matrix inequality (LMI). The concrete design of state feedback controller and output feedback controller is given. Finally, an example shows the effectiveness of the proposed methodology.

**Key words:** Linear discrete-time system; Finite-time bounded; LMI; Exogenous disturbance

### 1 引言

在鲁棒控制理论研究中,人们所关心的系统稳定性主要是 Lyapunov 稳定性. 而 Lyapunov 稳定性刻画的是系统的稳态性能,它并不能反映系统的暂态性能. 一个在 Lyapunov 意义下稳定的系统,可能具有很坏的暂态性能(如超调量过大),有时在工程中甚至根本无法应用. 因此,在实际工程中,人们更关心的往往是系统应满足一定的暂态性能要求.

Dorato<sup>[1]</sup>于 1961 年提出了有限时间稳定性的概念,进而提出了有限时间控制问题. 随后, Weiss<sup>[2]</sup>在这方面做了一些工作. 然而,由于缺少检验有限时间稳定性的有效工具,人们的兴趣主要集中在经典的 Lyapunov 稳定性上.

2001 年, Amato 等<sup>[3]</sup>讨论了一类带有时变参数不确定性和定常外部扰动的线性系统的有限时间控制问题. 2005 年,他们<sup>[4]</sup>研究了离散时间系统的有限时间控制问题. 随后,他们<sup>[5]</sup>又提出了使得闭环系统为有限时间有界的动态输出反馈控制器设计方法. 冯俊娥等<sup>[6]</sup>将线性系统有限时间稳定和有限时间有界的概念拓展到了奇异系统,通过引入状态控

制对的满秩变换,将奇异系统转化为线性系统,解决了奇异系统的有限时间控制问题.

上述研究中,或者假设外部扰动为定常的,如文献[3];或者假设外部扰动满足一个动态方程,如文献[4-6]. 本文则提出一个较为宽松的外部扰动约束条件,即外部扰动具有有限能量,亦即外部扰动属于  $L_2$  空间的. 在此基础上,研究具有这种时变外部扰动的离散时间系统有限时间有界控制问题,并给出了状态反馈控制器和输出反馈控制器的具体设计.

### 2 问题描述

考虑离散时间系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k). \quad (1)$$

其中:  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $G \in \mathbb{R}^{n \times r}$  为给定矩阵;  $w(k) \in \mathbb{R}^r$  为外部扰动,且满足

$$\sum_{j=1}^k w^T(j)w(j) \leq d^2, \quad (2)$$

$d > 0$  为给定常数. 考虑下面状态反馈控制器:

$$u(k) = Kx(k), \quad (3)$$

其中  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 则有如下闭环系统:

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) + Gw(k). \quad (4)$$

收稿日期: 2006-10-26; 修回日期: 2007-02-26.

基金项目: 湖北省教育厅项目(D200613002).

作者简介: 沈艳军(1970—),男,湖北老河口人,副教授,博士,从事鲁棒控制、智能控制的研究.

本文主要目的是研究闭环系统(4)有限时间有界的充分条件,首先给出有限时间有界的概念.

**定义 1 离散时间系统**

$$x(k+1) = Ax(k) + Gw(k) \quad (5)$$

关于  $(A, d, G, R, N)$  是有限时间有界 (FTB), 如果  $x^T(0)Rx(0) \leq d^2$ , 则  $x^T(k)Rx(k) \leq d^2, k \in \{1, 2, \dots, N\}$ , 其中  $R > 0$  为给定矩阵,  $N$  为给定的正整数,  $w(k)$  满足式(2).

Lyapunov 渐近稳定和 FTB 是两个不同的概念: 一个 Lyapunov 渐近稳定的系统不一定是 FTB 的; 反之, 一个 FTB 系统也不一定是 Lyapunov 渐近稳定的.

**3 主要结果**

首先给出如下引理:

**引理 1** 系统(5)关于  $(A, d, G, R, N)$  是有限时间有界的, 如果存在对称正定矩阵  $P_1 \in R^{n \times n}, P_2 \in R^{r \times r}$  和数  $\alpha > 1$ , 使得下面条件成立:

$$\begin{bmatrix} A^T P_1 A - P_1 & A^T P_1 G \\ G^T P_1 A & G^T P_1 G - P_2 \end{bmatrix} < 0, \quad (6)$$

$$\max(\tilde{P}_1)^2 + \max(P_2)d^2 < \frac{2k \min(\tilde{P}_1)}{N}. \quad (7)$$

其中:  $\tilde{P}_1 = R^{-1/2} P_1 R^{-1/2}$ ,  $\lambda(\cdot)$  表示矩阵的特征值.

**证明** 令  $V(x(k)) = x^T(k) P_1 x(k)$ , 则

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) &= x^T(k) A^T P_1 A x(k) + w^T(k) G^T P_1 A x(k) + \\ & x^T(k) A^T P_1 G w(k) + w^T(k) G^T P_1 G w(k) = \\ & \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P_1 A & A^T P_1 G \\ G^T P_1 A & G^T P_1 G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ w(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (8)$$

由条件(6)可得

$$V(x(k+1)) \leq V(x(k)) + w^T(k) P_2 w(k). \quad (9)$$

重复利用式(9), 可得

$$\begin{aligned} V(x(k)) & \leq V(x(0)) + \sum_{j=1}^k w^T(k-j) P_2 w(k-j) = \\ & \leq [V(x(0)) + \sum_{j=1}^k w^T(k-j) P_2 w(k-j)] \\ & \leq [V(x(0)) + \max(P_2) \sum_{j=1}^k w^T(k-j) w(k-j)]. \end{aligned}$$

**注意** 1. 从而有

$$\begin{aligned} V(x(k)) & \leq [V(x(0)) + \max(P_2) \sum_{j=1}^k w^T(k-j) w(k-j)] \\ & \leq N [\max(\tilde{P}_1)^2 + \max(P_2)d^2]. \end{aligned} \quad (10)$$

另一方面

$$V(x(k)) = x^T(k) P_1 x(k)$$

$$\min(\tilde{P}_1) x^T(k) R x(k). \quad (11)$$

由式(10)和(11)可得

$$\frac{x^T(k) R x(k)}{\min(P_1)} < N (\max(\tilde{P}_1)^2 + \max(P_2)d^2). \quad (12)$$

条件(7)意味着  $x^T(k) R x(k) \leq d^2 (k = 1, 2, \dots, N)$ , 从而结论成立.

在引理 1 中, 如果  $\alpha = 1$ , 条件(6)能保证离散时间系统(5)在  $G = 0$  时是渐近稳定的; 条件(7)则保证  $x^T(k) R x(k) \leq d^2$  对于所有  $k = 1, 2, \dots, N$  成立, 即系统(5)是稳定的.

下面给出有限时间有界状态反馈控制器(3)存在的充分条件.

**定理 1** 系统(4)关于  $(A, d, G, R, N)$  是有限时间有界的, 如果存在对称正定矩阵  $Q_1 \in R^{n \times n}, Q_2 \in R^{r \times r}$  和矩阵  $L \in R^{n \times r}$  以及数  $\alpha > 1$ , 使得下面条件成立:

$$\begin{bmatrix} -Q_1 & 0 & (AQ_1 + BL)^T \\ 0 & -Q_2 & G^T \\ AQ_1 + BL & G & -Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$\frac{2}{\min(Q_1)} + \max(Q_2)d^2 < \frac{2}{N \max(Q_1)}, \quad (14)$$

其中  $\tilde{Q}_1 = R^{1/2} Q_1 R^{1/2}$ . 进而, 如果式(13)和(14)存在可行解, 则控制器  $K = LQ_1^{-1}$ .

**证明** 令  $Q_1 = P_1^{-1}, Q_2 = P_2$ , 考虑到

$$\max(Q) = \frac{1}{\max(Q^{-1})},$$

则条件(7)和(14)等价. 令  $\bar{A} = A + BK$ , 则条件(6)可写为

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^T Q_1^{-1} \bar{A} - Q_1^{-1} & \bar{A}^T Q_1^{-1} G \\ G^T Q_1^{-1} \bar{A} & G^T Q_1^{-1} G - Q_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (15)$$

在式(15)左右两边分别乘以矩阵  $\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$  和其转置, 可得如下等价不等式:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \bar{A}^T Q_1^{-1} \bar{A} Q_1 - Q_1 & Q_1 \bar{A}^T Q_1^{-1} G \\ G^T Q_1^{-1} \bar{A} Q_1 & G^T Q_1^{-1} G - Q_2 \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

利用 Schur 补性质<sup>[7]</sup>, 则式(16)和下式等价:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \bar{A}^T Q_1^{-1} \bar{A} Q_1 - Q_1 & Q_1 \bar{A}^T Q_1^{-1} G & 0 \\ G^T Q_1^{-1} \bar{A} Q_1 & -Q_2 & G^T \\ 0 & G & -Q_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (17)$$

再用矩阵

$$\begin{bmatrix} I & 0 & -Q_1 \bar{A} Q_1^{-1} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

及其转置乘以式(17)左右两边,可得

$$\begin{bmatrix} -Q_1 & 0 & Q_1 \bar{A}^T \\ 0 & -Q_2 & G^T \\ \bar{A}Q_1 & G & -Q_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (18)$$

注意  $\bar{A} = A + BK$ , 令  $L = KQ_1$ , 则式(18)和(13)等价.

### 4 输出反馈控制

考虑系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k), \quad (19a)$$

$$y(k) = Cx(k), \quad (19b)$$

其中矩阵  $C \in R^{p \times n}$ , 并假设  $C$  是行满秩的. 设计如下输出反馈控制器:

$$u(k) = K_0 y(k), \quad (20)$$

其中  $K_0 \in R^{m \times p}$ . 得到闭环系统

$$x(k+1) = (A + BK_0C)x(k) + Gw(k). \quad (21)$$

本文的目的是设计形如式(20)的控制器使得闭环系统(21)关于  $(\cdot, d, \cdot, R, N)$  是有限时间有界的.

构造满秩方阵

$$T = \begin{bmatrix} C \\ H \end{bmatrix},$$

其中  $H \in R^{(n-p) \times n}$ . 令  $\tilde{x}(k) = Tx(k)$ , 则系统(19)变为

$$\tilde{x}(k+1) = TA T^{-1} \tilde{x}(k) + TBu(k) + TGw(k), \quad (22a)$$

$$y(k) = CT^{-1} \tilde{x}(k) = [I_p \ 0] \tilde{x}(k). \quad (22b)$$

将式(20)代入(22), 得

$$\tilde{x}(k+1) = (\bar{A} + \tilde{B}\bar{K}) \tilde{x}(k) + \tilde{G}w(k). \quad (23)$$

其中:  $\bar{A} = TA T^{-1}$ ,  $\tilde{B} = TB$ ,  $\tilde{G} = TG$ ,

$$\bar{K} = [K_0 \ 0]. \quad (24)$$

系统(23)和(4)具有相同的形式, 其区别仅在于控制器的结构不同. 下面定理将给出使系统(23)关于  $(\cdot, d, \cdot, R, N)$  有限时间有界的充分条件.

**定理 2** 考虑离散时间系统(19), 选择一个矩阵  $H \in R^{(n-p) \times n}$ , 使得

$$T = \begin{bmatrix} C \\ H \end{bmatrix}$$

是可逆的. 令  $\bar{A} = TA T^{-1}$ ,  $\tilde{B} = TB$ ,  $\tilde{G} = TG$ , 则系统(23)关于  $(\cdot, d, \cdot, R, N)$  是有限时间有界的充分条件是: 存在对称正定矩阵  $Q_{11} \in R^{p \times p}$ ,  $Q_{12} \in R^{(n-p) \times (n-p)}$  和  $Q_2 \in R^{r \times r}$ , 矩阵  $L \in R^{m \times n}$  以及系数  $1$ , 使得下面条件成立:

$$\begin{bmatrix} -Q_1 & 0 & (\bar{A}Q_1 + \tilde{B}LS)^T \\ 0 & -Q_2 & \tilde{G}^T \\ \bar{A}Q_1 + \tilde{B}LS & \tilde{G} & -Q_1 \end{bmatrix} < 0, \quad (25)$$

$$\frac{2}{\min(Q_1)} + \max(Q_2) d^2 < \frac{2}{N \max(Q_1)}. \quad (26)$$

其中

$$Q_1 = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{12} \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R^{n \times n},$$

$\tilde{Q}_1 = \tilde{R}^{1/2} Q_1 \tilde{R}^{1/2}$ ,  $\tilde{R} = T^T R T^{-1}$ . 进而, 如果条件(25)和(26)存在可行解, 则控制器  $K_0$  由矩阵  $\bar{K} = LSQ_1^{-1}$  的前  $p$  列构成.

证明 由定理 1 证明知, 令  $\bar{K} = LSQ_1^{-1}$ , 则条件(25)和(26)保证系统(23)关于  $(\cdot, d, \cdot, R, N)$  是有限时间有界的. 由  $S$  和  $Q_1^{-1}$  选择可知

$$\begin{aligned} \bar{K} &= LSQ_1^{-1} = L \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & Q_{12}^{-1} \end{bmatrix} = \\ &L \begin{bmatrix} Q_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [K_0 \ 0]. \end{aligned}$$

另外, 因为  $\tilde{x}(k) = Tx(k)$ , 则

$$\tilde{x}^T(k) \tilde{R}x(k) = (x^T T^T) (T^T R T^{-1}) (Tx) = x^T(k) R x(k).$$

于是, 系统(19)关于  $(\cdot, d, \cdot, R, N)$  是有限时间有界的.

下面约束条件可以保证条件(14)成立:

$$1 R^{-1} < Q_1 < R^{-1}, \quad (27)$$

$$0 < Q_2 < 2I, \quad (28)$$

$$\frac{2}{1} + 2 d^2 < \frac{2}{N}. \quad (29)$$

而条件(26)成立的充分条件为

$$1 \tilde{R}^{-1} < Q_1 < \tilde{R}^{-1}, \quad (30)$$

以及式(27)和(28). 由 Schur 补性质, 式(29)等价于

$$\begin{bmatrix} 2 d^2 - \frac{2}{N} & \\ & - \end{bmatrix} < 0. \quad (31)$$

注意式(13), (25)和(31)并不是线性矩阵不等式, 然而一旦  $d$  的取值固定, 则它们就是关于  $Q_1, Q_2, L, 1, 2$  的线性矩阵不等式.

### 5 仿真实验

考虑线性离散系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + Gw(k),$$

$$y(k) = Cx(k).$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = [2 \ 1].$$

(下转第 113 页)

$$\begin{bmatrix} 0.1 F_1(t) & 0 \\ 0 & 0.3 F_2(t) \end{bmatrix}.$$

其中:  $|F_1(t)| = 1$ ,  $|F_2(t)| = 1$  为纯量函数. 因此, 式 (18) 准确地表达了系统 (16) 的不确定性.

## 5 结 语

本文利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和自由权矩阵思想讨论了不确定线性时滞系统的时滞相关稳定性. 在对  $V$  泛函导数的处理过程中, 通过恰当地引入一些自由矩阵, 得到了基于线性矩阵不等式的保证系统鲁棒稳定的时滞相关条件, 该条件具有更简单的形式. 数值例子表明, 本文方法所得结论较已有文献具有更小的保守性.

## 参考文献 (References)

[1] Fridman E, Shaked U. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. Systems and Control Letters, 2001, 43(4): 309-319.

[2] Wu M, He Y, She J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435-1439.

[3] 张先明. 基于积分不等式方法的时滞相关鲁棒控制研究[D]. 长沙: 中南大学, 2006.  
(Zhang Xian-ming. Study on delay-dependent robust control based on an integral inequality approach [D]. Changsha: Central South University, 2006.)

[4] Han Q L. Robust stability of uncertain delay-differential systems of neutral type[J]. Automatica, 2002, 38(4): 719-723.

[5] Kim J H. Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(5): 789-792.

[6] Yue D, Won S C. An improvement on delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(2): 407-408.

[7] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. Int J of Control, 2001, 74(14): 1447-1455.

[8] Fridman E, Shaked U. An improved stabilization method for linear time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1931-1937.

[9] Xie L H. Output feedback  $H_\infty$  control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J of Control, 1996, 63(4): 741-750.

[10] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction of functional differential equations [M]. New York: Springer, 1993.

[11] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, et al. Linear matrix inequality in systems and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

(上接第 109 页)

首先, 考虑状态反馈使得闭环系统关于  $(1, 3, 7, I_2, 4)$  ( $I_2$  是二阶单位矩阵) 是有限时间有界的. 令  $\gamma = 1$ , 由定理 1 可得状态反馈控制器  $K = [1.000 \ 0 \ 1.381 \ 9]$ , 这时闭环系统是稳定的, 且  $x^T(k)x(k) < \gamma^2, k \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ . 如果令  $\gamma = 1.06$ , 可得状态反馈控制器

$$K = [1.000 \ 0 \ 1.398 \ 2].$$

其次, 考虑输出反馈使得闭环系统关于  $(1, 3, 14, I_2, 4)$  是有限时间有界的. 令  $\gamma = 1$ , 由定理 2 可得输出反馈控制器  $K_0 = 0.500 \ 0$ , 这时闭环系统是稳定的. 如果令  $\gamma = 1.1$ , 可得输出反馈控制器  $K_0 = 0.500 \ 1$ .

## 6 结 语

本文讨论了一类离散时间系统有限时间有界控制问题, 并给出了状态及输出反馈控制器的设计方法. 仿真实验验证了本方法的有效性.

## 参考文献 (References)

[1] Dorato P. Short time stability in linear time-varying systems[C]. Proc of the IRE Int Convention Record,

Part 4. New York, 1961: 83-87.

[2] Weiss L, Infante E F. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1967, 12: 54-59.

[3] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parameteric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37: 1459-1463.

[4] Aamto F, Ariola M. Finite-time control of discrete-time linear system[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 724-729.

[5] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time stabilization via dynamic output feedback[J]. Automatica, 2006, 42: 337-342.

[6] Feng Jun-e, Wu Zhen, Sun Jia-bing. Finite-time control of linear singular systems with parametric uncertainties and disturbances[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(4): 634-637.

[7] 俞立. 鲁棒控制 —— 线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.  
(Yu Li. Robust control — The method of linear matrix inequalities[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)