第 23 卷 第 1 期 控 制 与 决 策 2008 年 1 月
Vol. 23 No. 1 Control and Decision Jan. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)01-0110-04

线性时滞系统的时滞相关鲁棒稳定性新判据

肖伸平[1,2], 吴 敏[1]
(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 长沙 410083; 2. 湖南工业大学 冶金校区, 湖南 株洲 412000)

摘 要: 讨论具有多个范数有界不确定的线性时滞系统的时滞相关鲁棒稳定性. 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法,结合自由权矩阵思想,在 Lyapunov-Krasovskii 泛函的导数中恰当地引入一些自由矩阵,获得了基于线性矩阵不等式的时滞相关稳定充分条件. 该条件较已有结论不仅形式简单,而且具有更小的保守性.

关键词: 线性系统; 时滞相关; 渐近稳定; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

New delay-dependent robust stability criteria for linear systems with time-delay

XIAO Shen-ping[1,2], *WU Min*[1]
(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha 410083, China; 2. School of Metallurgy, Hu'nan University of Technology, Zhuzhou 412000, China. Correspondent: WU Min, E-mail: min@csu.edu.cn)

Abstract: The delay-dependent robust stability for the linear delayed systems with multi-norm bounded uncertainties is discussed. By using the Lyapunov-Krasovskii function method and following the free weighing matrix lines, a new delay-dependent stability sufficient condition is obtained by appropriately introducing some free matrices in the derivative of the Lyapunov-Krasovskii function. It is shown by comparison that the new criterion is both simpler and less conservative than the existing ones.

Key words: Linear system; Delay dependent; Asymptotical stability; Linear matrix inequality

1 引 言

近 20 年来,线性时滞微分系统稳定性的研究非常活跃,已获得了一系列相当好的结果. 其中,时滞相关条件因包含时滞大小信息而备受关注[1-8]. 为得到具有较小保守性的时滞相关条件, Fridman[1] 提出了广义模型变换方法并获得了较好的时滞相关条件. 尽管如此,该方法因无法避免对一些交叉项的界定而导致保守性. Wu 等[2] 提出了自由权矩阵方法,讨论了线性时滞系统的时滞相关稳定性. 因该方法既不需要对原系统进行模型变换,也不必界定交叉项,故而获得的条件具有更小的保守性,近年来已引起广泛关注.

本文利用自由权矩阵思想,在 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数中恰当地引入一些自由矩阵,得到新的时滞相关条件. 该条件较文献[2]具有更简单的形式,且文献[3]的相应结论可视为其特例.

2 记 号

本文沿用如下记号:

R^n, $R^{n\times n}$ 分别表示实数域上的 n 维向量空间与 $n\times n$ 矩阵空间;

A^{T} 表示矩阵 A 的转置;

$P > 0$ 表示 P 为对称正定阵;

对称矩阵的对称项用"$*$"表示,即

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix};$$

I 表示具有适当维数的单位矩阵.

3 主要结果

考虑如下线性时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A_0)x(t) + \\ \qquad (A_1 + \Delta A_1)x(t-h), \\ x(t) = \phi(t),\ t \in [-h, 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in R^n$; $A_0, A_1 \in R^{n\times n}$; $\phi(t)$ 为连续可微初

收稿日期: 2006-10-08; **修回日期**: 2007-04-16.
基金项目: 高等学校博士学科点专项基金项目(20050533015); 国家杰出青年基金项目(60425310).
作者简介: 肖伸平(1965—),男,湖南东安人,教授,博士生,从事鲁棒控制、过程控制等研究; 吴敏(1963—),男,广东化州人,教授,博士生导师,从事鲁棒控制、过程控制等研究.

始函数;常数 $h>0$ 为状态时滞;ΔA_0,ΔA_1 表示系统的不确定性矩阵,假设具有以下结构:

$$[\Delta A_0 \quad \Delta A_1] = \sum_{j=1}^{m} D_j F_j(t)[E_{0j} \quad E_{1j}]. \tag{2}$$

其中:m 为正整数;D_j,E_{0j},E_{1j} $(j=1,2,\cdots,m)$ 为具有适当维数的常数实矩阵;$F_j(t)$ 为具有 Lebesgue 可测元素的未知实矩阵,表示系统的不确定性,且满足 $F_j^{\mathrm T}(t)F_j(t)\le I$, $j=1,2,\cdots,m$. 当 $F_j(t)\equiv 0$, $t\ge 0$ 时,系统(1) 不包含不确定性,称为标称系统,即

$$\begin{cases} \dot x(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \\ x(t) = \phi(t),\ t\in[-h,0]. \end{cases} \tag{3}$$

注 1　式(2) 比通常的表达式 $[\Delta A_0 \quad \Delta A_1] = DF(t)[E_0 \quad E_1]$ 能更精确地表示不确定性(参见本文数值例子),因此用式(2) 表示不确定性得到的时滞相关条件将具有更小的保守性.

下面借助自由权矩阵思想, 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法讨论系统(1) 的鲁棒稳定性. 首先引入如下引理:

引理 1[9]　给定矩阵 $Q=Q^{\mathrm T}$,以及适当维数的矩阵 H 和 E,则

$$Q + HFE + E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}H^{\mathrm T} < 0$$

对任意满足 $F^{\mathrm T}F\le I$ 的 F 成立的充要条件是存在 $\varepsilon>0$,使得 $Q+\varepsilon^{-1}HH^{\mathrm T}+\varepsilon E^{\mathrm T}E<0$.

对于标称系统(3),有如下定理:

定理 1　如果存在矩阵 $P>0$,$Q>0$,$R>0$ 及具有适当维数的矩阵 N_1,N_2,N_3,满足以下 LMI:

$$\Xi := \begin{bmatrix} \Phi & PA_1 - N_1^{\mathrm T} + N_2 & -hN_1^{\mathrm T} + N_3 & hA_0^{\mathrm T}R \\ * & -Q - N_2^{\mathrm T} - N_2 & -hN_2^{\mathrm T} - N_3 & hA_1^{\mathrm T}R \\ * & * & -hR - hN_3^{\mathrm T} - hN_3 & 0 \\ * & * & * & -hR \end{bmatrix} < 0, \tag{4}$$

其中

$$\Phi = PA_0 + A_0^{\mathrm T}P + Q + N_1^{\mathrm T} + N_1, \tag{5}$$

则标称系统(3) 是渐近稳定的.

证明　取如下 Lyapunov-Krasovskii 泛函:

$$V(t,x_t) = x^{\mathrm T}(t)Px(t) + \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)R\dot x(s)\,\mathrm ds\,\mathrm d\theta + \int_{t-h}^{t}x^{\mathrm T}(s)Qx(s)\,\mathrm ds.$$

其中:x_t 表示函数 $x(\mathbf l)$, $\mathbf l\in[t-h,t]$;矩阵 $P>0$,$Q>0$,$R>0$ 待定.

对 $V(t,x_t)$ 沿系统(1) 求导可得

$$\begin{aligned} \dot V(t,x_t) = {} & 2x^{\mathrm T}(t)P\dot x(t) + x^{\mathrm T}(t)Qx(t) - x^{\mathrm T}(t-h)Qx(t-h) + \\ & h\dot x^{\mathrm T}(t)R\dot x(t) - \int_{t-h}^{t}\dot x^{\mathrm T}(s)R\dot x(s)\,\mathrm ds = \\ & \frac1h\int_{t-h}^{t}\{2x^{\mathrm T}(t)P\dot x(t) + x^{\mathrm T}(t)Qx(t) - \\ & x^{\mathrm T}(t-h)Qx(t-h) + h\dot x^{\mathrm T}(t)R\dot x(t) - \\ & h\dot x^{\mathrm T}(s)R\dot x(s)\}\,\mathrm ds. \end{aligned} \tag{6}$$

定义向量

$$\xi(t,s) := [x^{\mathrm T}(t) \quad x^{\mathrm T}(t-h) \quad \dot x^{\mathrm T}(s)]^{\mathrm T}, \tag{7}$$

注意到方程(3),有 $\dot x(t) = \Gamma\xi(t,s)$,其中

$$\Gamma := [A_0 \quad A_1 \quad 0]. \tag{8}$$

于是

$$\dot V(t,x_t) = \frac1h\int_{t-h}^{t}\xi^{\mathrm T}(t,s)[\Psi_1 + h\Gamma^{\mathrm T}R\Gamma]\xi(t,s)\,\mathrm ds, \tag{9}$$

其中

$$\Psi_1 := \begin{bmatrix} PA_0 + A_0^{\mathrm T}P + Q & PA_1 & 0 \\ * & -Q & 0 \\ * & * & -hR \end{bmatrix}.$$

另外,由 Leibniz-Newton 公式

$$x(t) - x(t-h) = \int_{t-h}^{t}\dot x(s)\,\mathrm ds,$$

对任意具有适当维数的矩阵 N_1,N_2,N_3,下式恒成立:

$$\begin{aligned} & \frac1h\int_{t-h}^{t}2[x^{\mathrm T}(t)N_1^{\mathrm T} + x^{\mathrm T}(t-h)N_2^{\mathrm T} + \\ & \dot x^{\mathrm T}(s)N_3^{\mathrm T}][x(t) - x(t-h) - h\dot x(s)]\,\mathrm ds = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

将式(10) 代入(9),可得

$$\dot V(t,x_t) = \frac1h\int_{t-h}^{t}\xi^{\mathrm T}(t,s)[\Psi_2 + h\Gamma^{\mathrm T}R\Gamma]\xi(t,s)\,\mathrm ds,$$

其中

$$\Psi_2 := \begin{bmatrix} \Phi & PA_1 - N_1^{\mathrm T} + N_2 & -hN_1^{\mathrm T} + N_3 \\ * & -Q - N_2^{\mathrm T} - N_2 & -hN_2^{\mathrm T} - N_3 \\ * & * & -hR - hN_3^{\mathrm T} - hN_3 \end{bmatrix},$$

Φ 定义于式(5). 如果

$$\Psi_2 + H\Gamma^{\mathrm T}R\Gamma < 0, \tag{11}$$

则由 Lyapunov-Krasovskii 稳定性定理[10] 知,系统(3) 渐近稳定. 另外,由 Schur 补[11] 知,不等式(11) 成立当且仅当 LMI (4) 成立. □

注 2　定理 1 借用自由权矩阵思想, 将 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数中的各项合并到一个积分项中(即式(6)),然后将形如式(10) 的零项加到前面的积分项中, 这种处理方法不同于文献[2]. 文献[2] 将两个恒为零的项加到 Lyapunov-Krasovskii 泛函导数中,得到的条件包含两个 LMI,而本文定理 1 只含一个 LMI. 因此,本文

定理 1 较文献[2] 的相应结论具有更简单的形式.

注 3 文献[3] 利用积分不等式方法讨论了系统(3) 的渐近稳定性,得到了具有较小保守性的时滞相关条件(参见文献[3] 的定理 2.6). 在本文定理 1 中,令 $N_1 = M_1$, $N_2 = M_2$, $N_3 = 0$,则定理 1 退化为文献[3] 的定理 2.6. 可见文献[3] 的相应结论可看成是本文定理 1 的特例.

对于不确定系统(1),由定理 1 和引理 1,可得如下定理:

定理 2 如果存在矩阵 $P>0$, $Q>0$, $R>0$,具有适当维数的矩阵 N_1, N_2, N_3,以及正数 $\varepsilon_j>0\,(j=1,2,\cdots,m)$,满足以下 LMI:

$$\begin{bmatrix} \Xi & H_1 & \varepsilon_1 L_1^{\mathrm T} & \cdots & H_m & \varepsilon_m L_m^{\mathrm T} \\ * & -\varepsilon_1 I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & -\varepsilon_1 I & \cdots & 0 & 0 \\ * & * & * & \ddots & 0 & 0 \\ * & * & * & \cdots & -\varepsilon_m I & 0 \\ * & * & * & \cdots & * & -\varepsilon_m I \end{bmatrix} < 0. \tag{12}$$

其中

$$\begin{cases} H_j := [D_j^{\mathrm T} P \quad 0 \quad 0 \quad hD_j^{\mathrm T} R]^{\mathrm T}, \\ L_j := [E_{0j} \quad E_{1j} \quad 0 \quad 0], \end{cases} \tag{13}$$

$j=1,2,\cdots,m$. 则系统(1) 对所有满足式(2) 的不确定性均是渐近稳定的.

证明 在定理 1 中,用 $A_i + \sum_{j=1}^{m} D_j F_j(t) E_{ij}$ 替换 $A_i\,(i=0,1)$,有如下不等式成立:

$$\Xi + \sum_{j=1}^{m} [H_j F_j(t) L_j + L_j^{\mathrm T} F_j^{\mathrm T}(t) H_j^{\mathrm T}] < 0. \tag{14}$$

其中:Ξ 定义于式(4), H_j 和 L_j 定义于式(13),则系统(1) 渐近稳定.

对矩阵不等式(14) 将引理 1 应用 m 次,则式(14) 对所有满足 $F_j^{\mathrm T}(t) F_j(t) \le I$ 的 $F_j(t)\,(j=1,2,\cdots,m)$ 成立,当且仅当存在正数 $\varepsilon_j>0\,(j=1,2,\cdots,m)$,使得下式成立:

$$\Xi + \sum_{j=1}^{m} [\varepsilon_j^{-1} H_j H_j^{\mathrm T} + \varepsilon_j L_j^{\mathrm T} L_j] < 0. \tag{15}$$

由 Schur 补,不等式(15) 等价于 LMI (12). □

4 数值例子

考虑不确定线性时滞系统[2,5-8]

$$\dot x(t) = \begin{bmatrix} -2+\delta_1\cos t & 0 \\ 0 & -1+\delta_2 \sin t \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1+r_1\cos t & 0 \\ -1 & -1+r_2\sin t \end{bmatrix} x(t-h). \tag{16}$$

其中:$|\delta_1| \le 1.6$, $|\delta_2| \le 0.05$, $|r_1| \le 0.1$, $|r_2| \le 0.3$.

文献[2,5-8] 讨论了系统(16) 鲁棒稳定的最大时滞界限. 首先将不确定性矩阵表示为

$$[\Delta A_0 \quad \Delta A_1] = DF(t)[E_0 \quad E_1], \quad F^{\mathrm T}(t) F(t) \le I. \tag{17}$$

其中

$$D = I,\ E_0 = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix},\ E_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

得到系统稳定的最大时滞界限列于表 1.

表 1 系统(16) 鲁棒稳定的最大时滞界限

方 法	最大时滞界限
文献[5]	0.241 2
文献[6]	0.241 2
文献[7]	0.705 9
文献[8]	1.149 0
文献[2]	1.149 0
本文定理 2	1.209 8

利用本文定理 2,首先将不确定性矩阵表示为式(2) 的形式,其中 $m=2$,

$$\begin{cases} D_1 = [1 \quad 0]^{\mathrm T},\ E_{01} = [1.6 \quad 0], \\ E_{11} = [0.1 \quad 0], \\ D_2 = [0 \quad 1]^{\mathrm T},\ E_{02} = [0 \quad 0.05], \\ E_{12} = [0 \quad 0.3]. \end{cases} \tag{18}$$

得到系统稳定的最大时滞界限也列于表 1. 从表 1 可以看出,本文方法得到的结论较文献[2,5-8] 具有更小的保守性,从而说明本文方法是有效的.

另外,可以证明,将系统(16) 的不确定性矩阵表示为式(17) 的形式,扩大了不确定性的范围;而式(18) 则能准确地表达系统(16) 的不确定性. 为说明这一点,将式(17) 中的 $F(t)$ 设为

$$F(t) = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix},$$

于是

$$\Delta A_0 = DF(t)E_0 = \begin{bmatrix} 1.6 f_{11} & 0.05 f_{12} \\ 1.6 f_{21} & 0.05 f_{22} \end{bmatrix}. \tag{19}$$

而从系统(16) 可知,矩阵 ΔA_0 的(1,2) 与(2,1) 元素均为 0,即这两个元素是确定的,因此式(19) 对 ΔA_0 的描述扩大了不确定性的范围;类似地,对 ΔA_1 的描述也是如此. 然而,对不确定性矩阵的描述式(18) 则能准确地表达不确定性的范围. 事实上,由式(2) 和(18),有

$$\Delta A_0 = D_1 F_1(t) E_{01} + D_2 F_2(t) E_{02} = \begin{bmatrix} 1.6 F_1(t) & 0 \\ 0 & 0.05 F_2(t) \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_1 = D_1 F_1(t) E_{11} + D_2 F_2(t) E_{12} =$$

$$\begin{bmatrix} 0.1F_1(t) & 0 \\ 0 & 0.3F_2(t) \end{bmatrix}.$$

其中: $|F_1(t)| \leq 1$, $|F_2| \leq 1$ 为纯量函数. 因此, 式(18) 准确地表达了系统(16) 的不确定性.

5 结　　语

本文利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函方法和自由权矩阵思想讨论了不确定线性时滞系统的时滞相关稳定性. 在对 V 泛函导数的处理过程中, 通过恰当地引入一些自由矩阵, 得到了基于线性矩阵不等式的保证系统鲁棒稳定的时滞相关条件, 该条件具有更简单的形式. 数值例子表明, 本文方法所得结论较已有文献具有更小的保守性.

参考文献(References)

[1] Fridman E, Shaked U. New Lyapunov-Krasovskii functionals for stability of linear retarded and neutral type systems[J]. Systems and Control Letters, 2001, 43(4): 309-319.

[2] Wu M, He Y, She J H, et al. Delay-dependent criteria for robust stability of time-varying delay systems[J]. Automatica, 2004, 40(8): 1435-1439.

[3] 张先明. 基于积分不等式方法的时滞相关鲁棒控制研究[D]. 长沙: 中南大学, 2006.
(Zhang Xian-ming. Study on delay-dependent robust control based on an integral inequality approach[D]. Changsha: Central South University, 2006.)

[4] Han Q L. Robust stability of uncertain delay-defferential systems of neutral type[J]. Automatica, 2002, 38(4): 719-723.

[5] Kim J H. Delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(5): 789-792.

[6] Yue D, Won S C. An improvement on delay and its time-derivative dependent robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(2): 407-408.

[7] Moon Y S, Park P, Kwon W H, et al. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. Int J of Control, 2001, 74(14): 1447-1455.

[8] Fridman E, Shaked U. An improved stabilization method for linear time-delay systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(11): 1931-1937.

[9] Xie L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. Int J of Control, 1996, 63(4): 741-750.

[10] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction of functional differential equations [M]. New York: Springer, 1993.

[11] Boyd S, El Ghaoui L, Feron E, et al. Linear matrix inequality in systems and control theory [M]. Philadelphia: SIAM, 1994.

(上接第 109 页)

首先, 考虑状态反馈使得闭环系统关于 $(1, 3, 7, I_2, 4)$ (I_2 是二阶单位矩阵) 是有限时间有界的. 令 $\gamma = 1$, 由定理 1 可得状态反馈控制器 $K = [1.000\,0 \quad 1.381\,9]$, 这时闭环系统是稳定的, 且 $x^{\mathrm{T}}(k)x(k) < 7^2$, $k \in \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$. 如果令 $\gamma = 1.06$, 可得状态反馈控制器

$$K = [1.000\,0 \quad 1.398\,2].$$

其次, 考虑输出反馈使得闭环系统关于 $(1, 3, 14, I_2, 4)$ 是有限时间有界的. 令 $\gamma = 1$, 由定理 2 可得输出反馈控制器 $K_0 = 0.500\,0$, 这时闭环系统是稳定的. 如果令 $\gamma = 1.1$, 可得输出反馈控制器 $K_0 = 0.500\,1$.

6 结　　语

本文讨论了一类离散时间系统有限时间有界控制问题, 并给出了状态及输出反馈控制器的设计方法. 仿真实验验证了本方法的有效性.

参考文献(References)

[1] Dorato P. Short time stability in linear time-varying systems[C]. Proc of the IRE Int Convention Record, Part 4. New York, 1961: 83-87.

[2] Weiss L, Infante E F. Finite time stability under pertuabing forces and on product spaces[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1967, 12: 54-59.

[3] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time control of linear systems subject to parameteric uncertainties and disturbances[J]. Automatica, 2001, 37: 1459-1463.

[4] Aamto F, Ariola M. Finite-time control of discrete-time linear system[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 724-729.

[5] Amato F, Ariola M, Dorato P. Finite-time stabilization via dynamic output feedback[J]. Automatica, 2006, 42: 337-342.

[6] Feng Jun-e, Wu Zhen, Sun Jia-bing. Finite-time control of linear singular systems with parametric uncertainties and disturbances [J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(4): 634-637.

[7] 俞立. 鲁棒控制 ——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Yu Li. Robust control — The method of linear matrix inequalities[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)