第 23 卷 第 1 期 控 制 与 决 策 2008 年 1 月
Vol. 23 No. 1 Control and Decision Jan. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)01-0114-03

离散广义区间动力系统的稳定性

梁家荣
(广西大学 计算机与电子信息学院, 南宁 530004)

摘 要: 利用范数理论,研究离散广义区间动力系统的稳定性问题,给出其区间动力系统的正则、因果且稳定的充分条件. 在此基础上,进一步考虑该系统的区间极点集的配置问题,给出了使离散广义区间动力系统的极点落在预先给定园盘内的判定定理. 数值算例表明了该方法的可行性.

关键词: 离散广义系统; 稳定性; 区间矩阵
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Stability of discrete singular interval systems

LIANG Jia-rong
(College of Computer and Electronic Information, Guangxi University, Nanning 530004, China. E-mail: liangjr@gxu.edu.cn)

Abstract: By using the norm theory, the problem of the stability of discrete singular interval systems is studied. The sufficient condition for that the discrete singular interval systems are regular, impulse and stable is presented. Furthermore, the developed criteria are applied to solve interval pole-assignment problems of discrete singular interval systems, and a sufficient condition is proposed to guarantee robust pole locating within a specified circular region for the discrete singular interval systems. An numeral example shows the feasibility of the method.

Key words: Discrete singular systems; Stability; Interval matrices

1 引 言

在过去的几十年中,由于鲁棒稳定性在实际控制中极为重要,对于普通状态空间系统的区间矩阵稳定性方面的研究已取得了大量成果[1-4]. 与普通状态空间系统不同,广义系统的解不但有有穷运动模,同时也存在无穷运动模[5],因此,研究广义系统比普通状态空间系统要困难得多. 近年来,关于广义区间动力系统的研究已涌现出一些成果,如文献[6]研究了广义区间动力系统的正则性和能控性的问题;文献[7]利用几何方法研究了广义区间动力系统的稳定性问题;文献[8]针对系统矩阵 E 具有特殊形式的情况讨论了广义区间动力系统的稳定性问题. 这些成果主要是针对连续广义区间动力系统的,而关于离散广义区间动力系统稳定性的研究目前尚为少见. 然而,离散系统是与连续系统平行且重要的系统,研究离散广义区间动力系统稳定性无疑是一件有意义的工作,对丰富和发展广义控制系统理论具有重要意义.

本文着重研究离散广义区间动力系统的稳定性,给出其区间动力系统正则、因果且稳定的判别条件,同时给出系统具有区间极点集的充分条件. 与现有的关于广义区间动力系统结果(如文献[6-8])相比,本文主要是针对离散情形进行的. 在方法上,采用范数理论,整个推理过程简单、方便,避开了如文献[7]因坐标变换带来的困难. 在系统的形式上,所研究的广义区间动力系统的系统矩阵 E 具有一般结构,较之文献[8]更具广泛性.

2 定义与引理

考虑广义系统

$$Ex(k+1) = Ax(k). \tag{1}$$

其中: $E, A \in R^{n\times n}$; $\operatorname{rank} E = r < n$; $x(k) \in R^n$.

定义 1[9] 称系统(1)是正则的,如果存在 $\lambda \in C$ 使得 $|\lambda E - A| \neq 0$.

定义 2[9] 称系统(1)是稳定的,如果 $\lambda \in$

收稿日期: 2006-10-08; **修回日期**: 2006-12-11.
基金项目: 国家自然科学基金项目(60564001); 教育部新世纪优秀人才支持计划专项基金项目(NCET-06-0756); 广西省自然科学基金项目(桂科回 0448001); 广西"十百千人才工程"专项基金项目(2003207).
作者简介: 梁家荣(1966—),男,广西玉林人,教授,从事广义系统、人工智能等研究.

$\sigma(E,A)=\{\lambda \mid |\lambda E-A|=0\}$, 都有 $|\lambda|<1$.

定义 3[10]　称系统(1)是因果的,如果

$$\deg\det(\lambda E-A)=\operatorname{rank} E.$$

记

$$\underline{A}=(\underline{a}_{ij})_{n\times n},\ \overline{A}=(\overline{a}_{ij})_{n\times n},$$

$$\underline{a}_{ij}\le\overline{a}_{ij},\ i,j=1,2,\cdots,n.$$

定义 4　称 $\Gamma=[\underline{A},\overline{A}]$ 为区间矩阵.

引理 1[5]　离散广义系统(1)是正则、因果和稳定的充要条件是:存在可逆对称矩阵 P 使得:

1) $E^{\mathrm T}PE\ge 0$;

2) $A^{\mathrm T}PA-E^{\mathrm T}PE<0$.

对于向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm T}\in R^n$,其范数定义为

$$\|x\|_P=\Big(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^P\Big)^{1/P},\ 1\le P<\infty,$$

$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|.$$

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$,其范数定义为

$$\|A\|_1=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

$$\|A\|_\infty=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,$$

并记 $L(A)=\max\{\|A\|_1,\|A\|_\infty\}$.

令 $\lambda_{\max}(H)$ 表示矩阵 H 的最大特征值, $H>0$ 表示矩阵 H 是正定阵.

引理 2[11]　对于任何矩阵 $S\in R^{n\times n}$,都有 $|\lambda_{\max}(S)|\le\|S\|_\infty$.

引理 3[11]　对于对称矩阵 $S\in R^{n\times n}$,如果 $|\lambda_{\max}(S)|<1$,则 $I\pm S>0$.

令

$$A_0=\frac{\underline{A}+\overline{A}}{2},\ \Delta A=\frac{\overline{A}-\underline{A}}{2},$$

则

$$\Gamma=(A_0-\Delta A,A_0+\Delta A).$$

3　主要结果

考虑离散广义区间动力系统

$$Ex(k+1)=Ax(k),\tag{2}$$

其中 $A\in\Gamma$.

定理 1　对于离散广义区间动力系统(2),如果存在对称可逆矩阵 P 使得:

1) $E^{\mathrm T}PE\ge 0$;

2) $A_0^{\mathrm T}PA_0-E^{\mathrm T}PE=-I$;

3) $L(\Delta A)<\Big[L(A_0)^2+\dfrac{1}{\|P\|_\infty}\Big]^{\frac12}-L(A_0)$.　(3)

则对于任意的 $A\in\Gamma$,离散广义动力系统(2)都是正则、因果和稳定的.

证明　对于任意的 $A\in\Gamma$,令 $A=A_0+\Delta\overline{A}$,则有

$$A^{\mathrm T}PA-E^{\mathrm T}PE=$$
$$(A_0^{\mathrm T}PA_0-E^{\mathrm T}PE)+(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}PA_0+$$
$$A_0^{\mathrm T}P\Delta\overline{A}+(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}P\Delta\overline{A}=$$
$$-I+(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}PA_0+A_0^{\mathrm T}P\Delta\overline{A}+(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}P\Delta\overline{A}.$$

由于

$$\|(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}PA_0+A_0^{\mathrm T}P\Delta\overline{A}+(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}P\Delta\overline{A}\|_\infty\le$$
$$\|\Delta\overline{A}\|_1\|P\|_\infty\|A_0\|_\infty+$$
$$\|A_0\|_1\|P\|_\infty\|\Delta\overline{A}\|_\infty+$$
$$\|\Delta\overline{A}\|_1\|P\|_\infty\|\Delta\overline{A}\|_\infty=$$
$$(|\Delta\overline{A}|_1\|A_0\|_\infty+\|\Delta\overline{A}\|_\infty\|A_0\|_1+$$
$$\|\Delta\overline{A}\|_1\|\Delta\overline{A}\|_\infty)\|P\|_\infty\le$$
$$(\|\Delta A\|_1\|A_0\|_\infty+\|A_0\|_\infty\|A_0\|+$$
$$\|\Delta A\|_1\|\Delta A\|_\infty)\|P\|_\infty\le$$
$$(2L(\Delta A)L(A_0)+[L(\Delta A)]^2)\|P\|_\infty,\tag{4}$$

由式(3)可得

$$(L(\Delta A)+L(A_0))^2<L^2(A_0)+\frac{1}{\|P\|_\infty},$$

从而有

$$[L(\Delta A)]^2+2L(A_0)L(\Delta A)<\frac{1}{\|P\|_\infty}.$$

将上式代入式(4)可得

$$\|A_0^{\mathrm T}P\Delta\overline{A}+(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}PA_0+(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}P\Delta\overline{A}\|_\infty<1.$$

由引理 2 得

$$\|\lambda(A_0^{\mathrm T}P\Delta\overline{A}+(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}PA_0+(\Delta\overline{A})^{\mathrm T}P\Delta\overline{A})\|<1,$$

由引理 3 及式(3)得

$$A^{\mathrm T}PA-E^{\mathrm T}PE<0.$$

再由引理 1 可知,对于任意的矩阵 $A\in\Gamma$,离散广义系统(2)是正则、因果和稳定的. □

下面考虑离散广义区间动力系统极点集配置问题.时不变系统的响应通常可通过配置极点来实现,然而对于具有不确定参数的系统,其预先确定的极点的准确配置是很难达到的.因此可以配置系统的极点在某一区域内,这在普通状态空间系统中已得到较多的研究.下面将利用上述结果对离散广义区间动力系统进行极点配置,使其极点落在预先给定的圆盘内.

定理 2　对于离散广义区间动力系统(2),如果 (E,A_0) 是正则的、因果的且 $\sigma(E,A_0)\subset\Omega(q,l)$,并存在对称可逆矩阵 P 使得:

1) $E^{\mathrm T}PE\ge 0$;

2) $\overline{A}_0^{\mathrm T}P\overline{A}_0-E^{\mathrm T}PE=-I$;

3) $L(\Delta\overline{A})<\Big[L(\overline{A}_0)^2+\dfrac{1}{\|P\|_\infty}\Big]^{\frac12}-L(\overline{A}_0)$.

则 $\forall A\in\Gamma$, (E,A) 是正则的、因果的且 $\sigma(E,$

$A) \subset \Omega(q,l)$，其中

$$\overline{A_0} = \frac{1}{l}(A_0 - qE),\ \Delta\overline{A} = \frac{1}{l}\Delta A,$$

$$\underline{A} = \frac{1}{l}(\underline{A} - qE),\ \tilde{\tilde{A}} = \frac{1}{l}(\overline{A} - qE).$$

证明 因为 $l(\lambda E - \overline{A_0}) = (zE - A_0)$，其中 $\lambda = \frac{1}{l}(z - q)$. 由 $\sigma(E, A_0) \subset \Omega(q,l)$，得 $\sigma(E,\overline{A_0}) \subset (0,1)$. 对任意的 $\forall A \in \Gamma$，作变换 $\overline{A} = \frac{1}{l}(A - qE)$，则由定理 1 可知，广义系统 $Ex(k+1) = \overline{A}x(k)$ 在区间矩阵 $\overline{A} = [\underline{A}, \tilde{\tilde{A}}]$ 上是正则、因果且稳定的.

从而存在可逆阵 M, N 使得

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M\tilde{A}N = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$M\frac{1}{l}AN - \frac{q}{l}MEA = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$MAN - qMEN = \begin{bmatrix} lA_1 & 0 \\ 0 & lI_{n-r} \end{bmatrix},$$

所以

$$MAN = \begin{bmatrix} lA_1 - I_r & 0 \\ 0 & lI_{n-r} \end{bmatrix}.$$

因而 (E,A) 是正则、因果的，且由

$$\sigma(E,\overline{A}) \subset (0,1),\ l(\lambda E - \overline{A}) = (zE - A)$$

（其中 $\lambda = \frac{1}{l}(z - q)$）可知

$$\sigma(E,A) \subset \Omega(q,l). \qquad \square$$

4 算 例

考虑如下广义区间动力系统:

$$Ex(k+1) = Ax(k), \tag{5}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ A = [\underline{A}, \overline{A}],$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.4 \\ 0 & 0.7 & 0 \end{bmatrix},$$

从而 $A_0 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & -0.5 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$. 取

$$P = \begin{bmatrix} 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 4/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$L(\Delta A) = 0.2,\ L(A_0) = 0.9,\ \|P\|_\infty = 4/3.$$

容易检验 P 满足定理 1 的相应条件. 从而 $\forall A \in \Gamma = [\underline{A}, \overline{A}]$，离散广义区间动力系统是正则、因果且稳定的.

5 结 语

本文研究了离散广义区间动力系统的稳定性，并讨论了离散广义区间动力系统区间极点集问题. 本文工作是对离散广义系统理论的有益补充，为离散广义鲁棒控制的研究提供了重要的理论基础. 当导数矩阵亦为区间矩阵时的离散广义系统，其相关的研究较为复杂，将另文讨论.

参考文献(References)

[1] Jiang C L. Sufficient condition for the asymptotic stability of interval matrices[J]. Int J of Control, 1987, 46(5): 1803-1810.

[2] So H Y C, Evans R J. Stability analysis of interval matrices-continuous and discrete systems[J]. Int J of Control, 1988, 47(1): 25-32.

[3] ManSour M. Simplified sufficient conditions for the asymptotic stability of interval matrices[J]. Int J of Control, 1989, 50(1): 443-444.

[4] Wang Q G. Necessary and sufficient conditions for stability of a matrix polytope with normal vertex matrices[J]. Automatic, 1991, 27(5): 887-888.

[5] 杨冬梅，张庆灵，姚波. 广义系统[M]. 北京：科学出版社，2004.
(Yang Dong-mei, Zhang Qing-ling, Yao Bo. Singular systems[M]. Beijing: Science Press, 2004.)

[6] 何希勤，张大庆，张庆灵. 广义区间动力系统的能控性[J]. 自动化学报，2004，30(5)：763-771.
(He Xi-qin, Zhang Da-qing, Zhang Qing-ling. Controllability of descriptor interval systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2004, 30(5): 763-771.)

[7] 张大庆，何希勤，张庆灵. 广义区间动力系统的稳定性的充分条件[J]. 东北大学学报，2003，24(5)：412-415.
(Zhang Da-qing, He Xi-qin, Zhang Qing-ling. Sufficient condition on the stability of descriptor interval systems [J]. J of Northeastern University, 2003, 24(5): 412-415.)

[8] 徐胜元，杨成梧. 广义区间动力系统的稳定性分析[J]. 控制理论与应用，2000，17(2)：249-250.
(Xu Sheng-yuan, Yang Cheng-wu. On stability analysis of generalized interval dynamic systems[J]. Control Theory and Application, 2000, 17(2): 249-250.)

(下转第 120 页)

为第 k 步的状态估计值. 对 SIR 算法和 WSPF 分别运行 10 次,用 10 次 RMSE 的均值和方差来比较两种算法的误差. 表 3 中 $RMSE_{SIR}$ 和 $RMSE_{WSPF}$ 分别表示 SIR 算法和 WSPF 的均方根误差.

表 3 两种算法的误差比较

均方根误差	次数				
	1	2	3	4	5
$RMSE_{SIR}$	1.408 0	1.066 2	2.969 0	5.222 1	9.067 5
$RMSE_{WSPF}$	0.323 4	0.192 5	0.192 7	0.152 7	0.134 7
均方根误差	次数				
	6	7	8	9	10
$RMSE_{SIR}$	1.750 2	1.363 6	2.424 0	6.981 1	5.003 9
$RMSE_{WSPF}$	0.159 6	0.217 1	0.256 3	0.190 9	0.167 1

注: $RMSE_{SIR}$ 的均值 = 3.725 6, 方差 = 7.466 6;
$RMSE_{WSPF}$ 的均值 = 0.198 7, 方差 = 0.003 1.

4.2 结果分析

由图 1 可知,本文提出的 WSPF 的估计值与真实值吻合很好,可见本文算法是有效的.

从图 2,图 3 可以看出,WSPF 的跟踪能力明显好于 SIR 粒子滤波算法.

图 4,图 5 反映了粒子的多样性改善情况. 由 SIR 算法最终的粒子分布图可见,样本集中的样本几乎为单一样本;而 WSPF 的样本均匀分布在真实值的两侧,且几乎没有相同的样本. 可见本文算法有效改善了样本的多样性.

从 N_{eff1} 和 N_{eff2} 的平均值可以看出,WSPF 的有效样本数大于 SIR 算法的有效样本数. 可见本文算法在解决退化问题上优于 SIR 算法.

在运行时间方面, t_1 和 t_2 的平均值相差不大,可见 WSPF 相对 SIR 算法的运行时间并没有明显的增加,由此表明新算法的运行效率较好.

在估计误差方面, $RMSE_{SIR}$ 的均值和方差均大于 $RMSE_{WSPF}$ 的均值和方差,可见 WSPF 在计算精度方面也有很大提高.

5 结 语

一般粒子滤波算法在实际应用中易受到退化现象的影响,对于估计那些较长时间维持不变的量时,退化现象尤为严重. 对此,本文提出了一种基于权值选择的粒子滤波算法,从大量粒子中选择权值较大的粒子用于估计,从而改善了样本集的多样性,在一定程度上解决了退化问题,提高了算法的跟踪估计能力. 仿真结果表明,基于权值选择的粒子滤波算法是可行且有效的.

参考文献(References)

[1] William Ng, Jack Li, Simon Godsill, et al. A review of recent results in multiple target tracking[C]. Proc of the 4th Int Symposium on Image and Signal Processing and Analysis. Zagreb, 2005: 40-45.

[2] Cheng Chang, Rashid Ansari. Kernel particle filter for visual tracking[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2005, 12(3): 242-245.

[3] Tao Wei, Huang Yu-fei, Philip Chen. Particle filtering for adaptive sensor fault detection and identification[C]. Proc of the 2006 IEEE Int Conf on Robotics and Automation Orlando. Florida, 2006: 3807-3812.

[4] 胡士强, 敬忠良. 粒子滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 361-365.
(Hu Shi-qiang, Jing Zhong-liang. Overview of particle filter algorithm[J]. Control and Decision, 2005, 20(4): 361-365.)

[5] Petar M Djurić, Jayesh H Kotecha, Zhang Jian-qui, et al. Particle filtering[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 20(5): 19-38.

[6] Cody Kwok, Dieter Fox, Marina Meilå. Real-time particle filters[J]. Proc of the IEEE, 2004, 92(3): 470-471.

[7] Doucet A, Godsill S. On sequential monte carlo sampling methods for Bayesian filtering[R]. Cambridge: University of Cambridge, 1998.

[8] 莫以为, 萧德云. 进化粒子滤波算法及其应用[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(2): 269-270.
(Mo Yi-wei, Xiao De-yun. Evolutionary particle filter and its application[J]. Control Theory and Application, 2005, 22(2): 269-270.)

[9] Sanjeev Arulampalam, Simon Maskell, Neil Gordon. A tutorial on particle filters for online non-gaussian Bayesian tracking[J]. IEEE Trans on Signal Processing, 2002, 50(2): 174-188.

(上接第 116 页)

[9] Dai L. Singular control systems[M]. New York: Springer-Veglag, 1989.

[10] Bender D J, Laub A J. The linear-quadratic optimal regulator for descriptor systems: Discrete-time case[J]. Automatica, 1987, 23(1): 72-85.

[11] 陈景良, 陈向晖. 特殊矩阵[M]. 北京:清华大学出版社, 2001.
(Chen Jing-liang, Chen Xiang-hui. Special matrices[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2001.)