

文章编号: 1001-0920(2008)01-0013-06

零点配置与一类非线性广义系统的状态反馈控制

杨光^{1,2}, 张庆灵¹

(1. 东北大学 系统科学研究所, 沈阳 110004; 2. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 沈阳 110034)

摘要: 针对状态空间实现为非最小相位的非线性广义系统的控制问题, 提出一种非线性广义系统的状态空间实现算法, 构建了一个等价于原输出函数的综合输出函数, 能任意配置状态空间实现的传输零点, 使该状态空间实现为最小相位的. 所构建的最小相位输出函数能直接用于构造状态反馈控制器, 实现对非线性广义系统状态反馈控制. 将所得结论应用于 Logistic 增长的 SIR 传染病模型, 仿真结果表明了所提方法的有效性和可行性.

关键词: 非线性广义系统; 状态反馈控制; 非最小相位; 零点配置; 状态空间实现

中图分类号: O231.2

文献标识码: A

Assignment of zero dynamics and state feedback control for a class of nonlinear singular system

YANG Guang^{1,2}, ZHANG Qing-ling¹

(1. Institute of System Sciences, Northeastern University, Shenyang 110004, China; 2. School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China. Correspondent: YANG Guang, E-mail: yg19640202@yahoo.com.cn)

Abstract: Aiming at the control problem of the nonlinear singular system that state-space realization is nonminimum phase, an algorithm for deriving the state-space realization of the nonlinear singular system is proposed. Then, synthetic output functions which are statically equivalent to the original output functions are constructed, and the zero dynamics of the state-space realization can be assigned arbitrarily. The calculated outputs are used to construct a state feedback controller, and the state feedback control on the nonlinear singular system is realized. The proposed method is applied to SIR epidemic model with Logistic growth control problem. The simulation result shows the effectiveness and feasibility of the method.

Key words: Nonlinear singular system; State feedback control; Nonminimum-phase system; Assignment of zero dynamics; State-space realization

1 引言

控制不稳定的零点始终是一难题. 近年来, 一些控制方法相继被提出: 文献[1-3]分别提出使非最小相位系统全局或半全局实用稳定的控制方法; 文献[4]应用一个观测器及反步设计等方法, 不需零点稳定使得一类非线性系统输出反馈全局稳定; 文献[5]应用一个神经网络实现对一类非最小相位的非线性系统输出反馈控制. 对非最小相位的延迟系统和离散时间系统控制问题的研究也取得了可喜成果^[6,7]. 文献[8,9]提出了更简单实用的重构输出函数的方法, 即依靠构建一个综合输出函数, 以达到使非线性系统零点稳定的目的, 所构建的最小相位综

合输出函数等价于原输出函数.

本文将重构输出函数的方法应用于状态空间实现为非最小相位的非线性广义系统的控制问题. 首先给出算法求得非线性广义系统的状态空间实现; 然后构造等价于原输出函数的综合输出函数, 能任意配置状态空间实现的零点, 使该系统为最小相位的. 利用构建的最小相位输出函数构造一个状态反馈控制器, 实现对非线性广义系统的状态反馈控制. 将此结论应用于 Logistic 增长的 SIR 传染病模型, 旨在消除该传染病, 仿真结果表明所提方法是方便可行的.

收稿日期: 2007-03-29; 修回日期: 2007-06-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60574011).

作者简介: 杨光(1964—), 女, 沈阳人, 副教授, 博士生, 从事广义系统、生物控制等研究; 张庆灵(1956—), 男, 辽宁营口人, 教授, 博士生导师, 从事复杂大系统、 H_∞ 控制等研究.

2 非线性广义系统的状态反馈控制设计

考虑如下多输入多输出(MIMO)非线性广义系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + b(x)z + g(x)u, \\ 0 = k(x) + l(x)z + c(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in X \subset R^n$ 为系统的状态变量; $z \in Z \subset R^p$ 为代数变量; X 和 Z 为连通开集; $u \in R^m$ 为控制输入; $f(x)$ 和 $k(x)$ 是维数为 n 和 p 的光滑向量场; $g(x), c(x), b(x), l(x)$ 为具有适当维数的光滑矩阵; $h(x)$ 为 $X \rightarrow R^m$ 的实解析函数.

定义 1 对于广义系统(1), $[l(x), c(x)]$ 为非行满秩, 通过对该系统中的代数方程求导, 使得 $[l(x), c(x)]$ 转化为行满秩的矩阵, 最低求导次数 d 称为广义系统(1)的阶数.

例如

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 - x_3^2 \\ x_1 \\ -x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ x_1^2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 + x_3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$0 = \begin{bmatrix} x_1 + x_3^2 \\ x_1 + x_2 + 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 x_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

显然 $\text{rank}[l(x), c(x)] = 1 < 2$. 对式(3)中的第2个等式 $x_1 + x_2 + 3 = 0$ 求导, 得到新的代数方程

$$0 = \begin{bmatrix} x_1 + x_3^2 \\ x_1 + x_1 x_2 - x_3^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 x_3 & 0 \\ 2 + x_3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

其中: $x \in M, M = \{x \in X : x_1 + x_2 + 3 = 0\}$ 为状态空间. $\text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 x_3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 + x_3 & 1 \end{bmatrix} = 2$, 为满秩的. 广义系统(2)和(3)的阶数 $d = 1$. 若广义系统(1)中 $[l(x), c(x)]$ 为行满秩的, 则该系统的阶数 $d = 0$.

假设 1 广义系统(1)的阶数 d 为有限的.

定义 2 对于广义系统(1), 如果通过算法可将 $[l(x), c(x)]$ 转化为行满秩的矩阵, 且存在一个反馈控制作用在系统(1)中得到一个正常系统, $x \in M, M$ 为状态空间, 则称该正常系统为广义系统(1)的状态空间实现.

定义 3 如果 $h_0(x) = h(x), \forall x \in E$, 则 $y = h_0(x)$ 和 $y = h(x)$ 为等价的. 其中

$$E = \{x \in X \mid \exists u \in R^m \text{ 使} \\ f(x) + b(x)z + g(x)u(t) = 0, \\ k(x) + l(x)z + c(x)u(t) = 0\},$$

则称 E 为平衡流形.

2.1 非线性广义系统的状态空间实现

矩阵 $[l(x), c(x)]$ 分为行满秩和非满秩两种情形. 将 $[l(x), c(x)]$ 转化为行满秩矩阵的算法如下:

设 $\text{rank}[l(x), c(x)] = p_1 < p$, 存在 $p \times p$ 阶可逆矩阵 $M^1(x)$ 使得

$$M^1(x)[l(x), c(x)] = \begin{bmatrix} \bar{l}^1(x) & \bar{c}^1(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

其中: $\bar{l}^1(x), \bar{c}^1(x)$ 分别为 $p_1 \times p, p_1 \times m$ 矩阵, 且 $\text{rank}[\bar{l}^1(x), \bar{c}^1(x)] = p_1$. 用 $M^1(x)$ 左乘广义系统(1)中的代数方程, 得

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{k}^1(x) \\ k^1(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{l}^1(x) \\ 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{c}^1(x) \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (5)$$

其中: $\bar{k}^1(x), k^1(x)$ 分别为 $p_1, (p - p_1)$ 维向量.

对 $k^1(x) = 0$ 求导, 得到新的代数方程

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{k}^1(x) \\ \bar{k}^2(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{l}^1(x) \\ \bar{l}^2(x) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{c}^1(x) \\ \bar{c}^2(x) \end{bmatrix} u.$$

其中: $\bar{k}^2(x) = [L_f k^1(x) \dots L_f k^{p-p_1}(x)]^T$, $k^i(x)$ 表示 $k^1(x)$ 的第 i 个分量, $L_f k^i(x)$ 表示标准的李导数; $\bar{l}^2(x), \bar{c}^2(x)$ 分别为 $(p - p_1) \times p, (p - p_1) \times m$ 阶矩阵, 且

$$\bar{l}^2(x) = \begin{bmatrix} L_{b_1} k^1(x) & \dots & L_{b_p} k^1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{b_1} k^{p-p_1}(x) & \dots & L_{b_p} k^{p-p_1}(x) \end{bmatrix},$$

$$\bar{c}^2(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} k^1(x) & \dots & L_{g_m} k^1(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_{g_1} k^{p-p_1}(x) & \dots & L_{g_m} k^{p-p_1}(x) \end{bmatrix}.$$

这里 $b_j(x), g_j(x)$ 分别表示矩阵 $b(x), g(x)$ 的第 j 列.

计算 $\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{l}^1(x) & \bar{c}^1(x) \\ \bar{l}^2(x) & \bar{c}^2(x) \end{bmatrix}$, 若秩等于 p , 计算

停止; 否则重复上述算法. 由于广义系统(1)的阶数 d 为有限的, 一定存在整数 q , 使得系统(1)的代数方程化为

$$0 = \begin{bmatrix} \bar{k}^q(x) \\ \bar{k}^{q+1}(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{l}^q(x) \\ \bar{l}^{q+1}(x) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \bar{c}^q(x) \\ \bar{c}^{q+1}(x) \end{bmatrix} u, \quad (6)$$

且 $\text{rank} \begin{bmatrix} \bar{l}^q(x) & \bar{c}^q(x) \\ \bar{l}^{q+1}(x) & \bar{c}^{q+1}(x) \end{bmatrix} = p$, 其中: $\bar{k}^q(x)$ 和 $\bar{k}^{q+1}(x)$ 分别表示 p_q 和 $(p - p_q)$ 维向量; $\bar{l}^q(x), \bar{l}^{q+1}(x)$ 和 $\bar{c}^q(x), \bar{c}^{q+1}(x)$ 分别为 $p_q \times p, (p - p_q) \times p$ 和 $p_q \times m, (p - p_q) \times m$ 阶矩阵, $x \in M$,

$$M = \left\{ x \quad X \begin{bmatrix} k^1(x) \\ \dots \\ k^q(x) \end{bmatrix} = 0 \right\}.$$

定理 1 对于广义系统(1),若 $[l(x), c(x)]$ 行满秩,则一定存在 $m \times p$ 阶矩阵 B 和一个反馈控制 $u = Bz + v$, (7) 使得 $[l(x) + c(x)B]$ 为满秩的,得到广义系统(1)的状态空间实现

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x) + \bar{g}(x)v, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (8)$$

其中 v 为新的控制输入,

$$\bar{f}(x) = f(x) - (b(x) + g(x)B)(l(x) + c(x)B)^{-1}k(x),$$

$$\bar{g}(x) = g(x) - (b(x) + g(x)B)(l(x) + c(x)B)^{-1}c(x).$$

证明 存在 p 阶可逆阵 $P(x)$ 使得

$$P(x)[l(x), c(x)] = \begin{bmatrix} l(x) & l(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c(x) & c(x) \end{bmatrix}.$$

其中 $l(x), l(x), c(x), c(x)$ 分别为 $k \times k, k \times (p - k), (p - k) \times (p - k), (p - k) \times (m + k - p)$ 阶矩阵.不失一般性,假设 $l(x)$ 和 $c(x)$ 皆为可逆阵,取 $B = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,其中 B 为 $m \times p$ 阶矩阵, I 为 $(p - k) \times (p - k)$ 阶单位阵,则有

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c(x) & c(x) \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c(x) \end{bmatrix}.$$

用 $P(x)$ 分别左乘广义系统(1)中的代数方程,得

$$0 = \begin{bmatrix} k(x) \\ k(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l(x) & l(x) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c(x) & c(x) \end{bmatrix} u. \quad (9)$$

将反馈控制(7)代入式(9)可得

$$0 = \begin{bmatrix} k(x) \\ k(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l(x) & l(x) \\ 0 & c(x) \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c(x) & c(x) \end{bmatrix} v. \quad (10)$$

因此有

$$\begin{aligned} \text{rank } P(x)[l(x) + c(x)B] &= \\ \text{rank} \begin{bmatrix} l(x) & l(x) \\ 0 & c(x) \end{bmatrix} &= p. \end{aligned}$$

因为 $P(x)$ 为非奇异的,所以 $[l(x) + c(x)B]$ 为 p 阶可逆阵.将反馈控制(7)代入系统(1)中可得系统(8).

特别地,当 $\text{rank}[l(x), c(x)] = \text{rank}[l(x)] = p$ 时,取 $B = 0$,从而代数变量的表达式为

$$z = -l^{-1}(x)(k(x) + c(x)u).$$

将 z 代入广义系统(1)中,得到非线性正常系统

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) - b(x)l^{-1}(x)k(x) + \\ & (g(x) - b(x)l^{-1}(x)c(x))u. \end{aligned} \quad (11)$$

系统(11)即为广义系统(1)的状态空间实现.

2.2 构造等价于原输出函数的综合输出函数

考虑非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, \\ y = h(x). \end{cases} \quad (12)$$

假设 2 $\text{rank } g(x) = m, \forall x \in X$.

构造所需的综合输出函数方法如下:

由假设 2 知,在 $g(x)$ 中一定存在 $m \times m$ 阶非奇异矩阵,不失一般性,设其为

$$g(x) = \begin{bmatrix} g_{11} & \dots & g_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{m1} & \dots & g_{mm} \end{bmatrix}.$$

将系统(12)写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x) + g_{11}(x)u_1 + \dots + g_{1m}(x)u_m, \\ \dots \\ \dot{x}_m = f_m(x) + g_{m1}(x)u_1 + \dots + g_{mm}(x)u_m, \\ \dot{x}_{m+1} = f_{m+1}(x) + g_{m+11}(x)u_1 + \dots + \\ \quad g_{m+1m}(x)u_m, \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x) + g_{n1}(x)u_1 + \dots + g_{nm}(x)u_m. \end{cases} \quad (13)$$

令

$$\begin{cases} f_1(x) + g_{11}(x)u_1 + \dots + g_{1m}(x)u_m = 0, \\ \dots \\ f_m(x) + g_{m1}(x)u_1 + \dots + g_{mm}(x)u_m = 0. \end{cases} \quad (14)$$

显然这 m 个方程可解出 u_1, u_2, \dots, u_m . 又令

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_{m+1}(x) + g_{m+11}(x)u_1 + \dots + \\ \quad g_{m+1m}(x)u_m, \\ \dots \\ \dot{x}_{n-m} = f_n(x) + g_{n1}(x)u_1 + \dots + \\ \quad g_{nm}(x)u_m. \end{cases} \quad (15)$$

将 u_1, u_2, \dots, u_m 代入式(15)中.再令 $h^*(x) = h(x) + (x)$,其中

$$(x) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1_{n-m} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_1 & \dots & m_{n-m} \end{bmatrix}, \quad h(x) = \begin{bmatrix} 1(x) \\ \dots \\ n-m(x) \end{bmatrix}.$$

显而易见, $\forall x \in E$, 都有 $h^*(x) = h(x)$, 因此所构造的输出函数 $h^*(x)$ 等价于原输出函数 $h(x)$.

2.3 广义系统状态空间实现的零点配置

引理 1^[8] 对于系统(12),设 $P \in R^{(n-m) \times (n-m)}$,

$Q \in R^{m \times (n-m)}$, 并满足:

- 1) P 有相异特征值;
- 2) P 与 $\frac{\partial f}{\partial x}(x^e) + \sum_{i=1}^m u_i^e \frac{\partial g_i}{\partial x}(x^e)$ 无相同的特征

值, 其中 x^e 和 u^e 为平衡点, 且满足

$$f(x^e) + g(x^e)u^e = 0; \quad (16)$$

- 3) (Q, P) 为能观的;
- 4) $S \in R^{n \times (n-m)}$ 且满秩, 并为方程

$$SP - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^e) + \sum_{i=1}^m u_i^e \frac{\partial g_i}{\partial x}(x^e) \right] S = [g_1(x^e) \dots g_m(x^e)]Q \quad (17)$$

的解.

则系统

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u, \\ h^*(x) = h(x) + \quad (x), \end{cases} \quad (18)$$

$$= - \left(\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^e) S \right] \left(\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^e) S \right] \right)^{-1} \right) \quad (19)$$

的输出零点为 P 的特征值.

定理 2 对于非线性广义系统 (1), 其平衡点为 (x^0, z^0, u^0) , 且满足 $u^0 = Bz^0 + v^0$. 设 $P \in R^{(n-m) \times (n-m)}$, $Q \in R^{m \times (n-m)}$, 并满足:

- 1) $[l(x), c(x)]$ 为行满秩的;
- 2) P 与 $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x^0) + \sum_{i=1}^m v_i^0 \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x}(x^0)$ 无相同的特征

值;

- 3) P 有相异特征值并且为 Hurwitz;
- 4) (Q, P) 为能观的;
- 5) S 为满秩的 $n \times (n-m)$ 阶矩阵, 且为方程

$$SP - \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(x^0) + \sum_{i=1}^m v_i^0 \frac{\partial \bar{g}_i}{\partial x}(x^0) \right] S = [\bar{g}_1(x^0) \dots \bar{g}_m(x^0)]Q \quad (20)$$

的解.

则系统

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x) + \bar{g}(x)v, \\ h^*(x) = h(x) + \quad (x), \end{cases} \quad (21)$$

$$= - \left(\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^0) S \right] \left(\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^0) S \right] \right)^{-1} \right)$$

的输出零点为 P 的特征值, 即系统 (21) 为最小相位的. 其中 B 为 $m \times p$ 阶矩阵, v 为新的控制输入,

$$\bar{f}(x) = f(x) - (b(x) + g(x)B)(l(x) + c(x)B)^{-1}k(x),$$

$$\bar{g}(x) = g(x) - (b(x) + g(x)B)(l(x) + c(x)B)^{-1}c(x).$$

证明 因为已知条件 1), 由定理 1 可知, 一定存在 $m \times p$ 阶矩阵 B 和 $u = Bz + v$, 使 $[l(x) + c(x)B]$ 为满秩的, 可得系统 (21). 又因为已知条件

2) ~ 5), 由引理 1 可知系统 (21) 的输出零点为 P 的特征值, 且为最小相位的.

2.4 状态反馈控制

下面利用构建的最小相位输出函数构造状态反馈控制器, 对广义系统 (1) 实施状态反馈控制.

假设 3

1) 广义系统 (1) 中的矩阵 $[l(x), c(x)]$ 行满秩, 系统 (21) 为系统 (1) 的状态空间实现;

2) 系统 (21) 为最小相位的;

3) 系统 (21) 中 $h_i^*(x)$ 的相对阶为最小整数 r_i , 且满足

$$\begin{bmatrix} L_{\bar{g}_1}^- L_{\bar{f}}^{r_1-1} h_1^*(x) & \dots & L_{\bar{g}_m}^- L_{\bar{f}}^{r_m-1} h_m^*(x) \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

矩阵

$$C(x) = \begin{bmatrix} L_{\bar{g}_1}^- L_{\bar{f}}^{r_1-1} h_1^*(x) & \dots & L_{\bar{g}_m}^- L_{\bar{f}}^{r_m-1} h_m^*(x) \\ \dots & & \dots \\ L_{\bar{g}_1}^- L_{\bar{f}}^{r_1-1} h_1^*(x) & \dots & L_{\bar{g}_m}^- L_{\bar{f}}^{r_m-1} h_m^*(x) \end{bmatrix} \quad (23)$$

为非奇异的, 这里 $L_{\bar{g}_j}^- L_{\bar{f}}^{r_j-1} h_k^*(x)$ 表示标准的李导数.

则状态反馈控制律为

$$v = \{ [l_{1r_1} \dots m_{r_1}] C(x) \}^{-1} (h_{sp}^* - h^*(x) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} L_{\bar{f}}^j h_i^*(x)). \quad (24)$$

任意选取调解参数 ij , 确保以下输出 / 输入响应:

$$h^*(x) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{r_i} L_{\bar{f}}^j h_i^*(x) = h_{sp}^* \quad (25)$$

是稳定的. 这里 $h^*(x)$ 和 h_{sp}^* 分别为输出和输出期望值. 将式 (24) 代入系统 (21) 中可得

$$\begin{cases} \dot{x} = \bar{f}(x) + \bar{g}(x) \{ [l_{1r_1} \dots m_{r_1}] C(x) \}^{-1} \times \\ \quad (h_{sp}^* - h^*(x) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} L_{\bar{f}}^j h_i^*(x)), \\ h^*(x) = h(x) + \quad (x), \end{cases}$$

该系统是稳定的^[8]. 从而

$$u = Bz + \{ [l_{1r_1} \dots m_{r_1}] C(x) \}^{-1} (h_{sp}^* - h^*(x) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{r_i-1} L_{\bar{f}}^j h_i^*(x))$$

可使广义系统 (1) 稳定.

3 仿真研究

1981 年, Anderson 建立了 Logistic 增长的 SIR 传染病模型. 设 N 表示种群的总密度, X, I 和 Y 分别表示易感者类、染病而未发病类和染病且发病类在时间 t 时种群的密度, 且 $N = X + Y + I$. 如果易感者类 X 与染病且发病类 Y 发生有效接触, 就会被传染,

传染率为 β ，染病而未发病类 I 可发展为 Y ，转移率为 δ 。其传染机制可描述为

$$X + Y \xrightarrow{\beta} 2Y, I \xrightarrow{\delta} Y.$$

模型如下：

$$\begin{cases} \dot{X} = (a - b)X - XN - XY, \\ \dot{I} = XY - (\gamma + b + N)I, \\ \dot{Y} = I - (\gamma + b + N)Y, \\ 0 = X + Y + I - N. \end{cases} \quad (26)$$

其中： a, b, γ 分别代表种群的自然出生率、自然死亡率和因病死亡率。

当 $\beta > 0, (a - b) - (\gamma + \delta)(\gamma + \delta) > 0$ 时，有两个平衡点：一个为疾病消除平衡点 $(\frac{a-b}{\gamma}, 0, 0, \frac{a-b}{\gamma})$ ；另一个为正平衡点 (X^*, I^*, Y^*, N^*) 。

如果疾病消除平衡点是稳定的，则该传染病将消除；如果正平衡点是稳定的，则该传染病将会蔓延，成为地方病，因此也称正平衡点为地方病平衡点。

令

$$k = \frac{(\gamma + a)(a + \delta)}{(\gamma + \delta)^2}, k = \frac{a - b}{\gamma}.$$

当 $k < k_c$ 时，系统(26)无地方病平衡点，仅有疾病消除平衡点是稳定的。

当 $k > k_c$ 且 $\gamma - a > 0$ 时，地方病平衡点存在，疾病消除平衡点不稳定^[10]，因此对系统(26)施加控制使其在该点稳定，旨在消除该传染病。其控制模型为

$$\begin{cases} \dot{X} = (a - b)X - XN - XY + u_1, \\ \dot{I} = XY - (\gamma + b + N)I + u_2, \\ \dot{Y} = I - (\gamma + b + N)Y - u_2, \\ 0 = X + Y + I - N. \end{cases} \quad (27)$$

令

$$\bar{X} = \frac{a - b}{\gamma} - X, \bar{Y} = Y,$$

$$\bar{I} = I, \bar{N} = \frac{a - b}{\gamma} - N.$$

求得广义系统(27)的状态空间实现，并设其输出函数为 $h_1 = \bar{X}, h_2 = \bar{I}$ 。取 $a = 0.05, b = 0.01, \gamma = 0.2, \delta = 0.1, N = 5$ ，可得

$$\begin{cases} \dot{\bar{X}} = 5(0.2 - \bar{X})\bar{Y} - (0.2\bar{X} - 0.04)(-\bar{X} + \bar{Y} + \bar{I}) - u_1, \\ \dot{\bar{I}} = 5(0.2 - \bar{X})\bar{Y} - 0.15\bar{I} - 0.2\bar{I}(-\bar{X} + \bar{Y} + \bar{I}) + u_2, \\ \dot{\bar{Y}} = 0.1\bar{I} - 0.25\bar{Y} - 0.2\bar{Y}(-\bar{X} + \bar{Y} + \bar{I}) - u_2, \\ h_1 = \bar{X}, h_2 = \bar{I}. \end{cases} \quad (28)$$

可以验证系统(28)为非最小相位系统。构造函数

$$(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{I}) = 0.2(\bar{I} + \bar{Y})(\bar{X} - \bar{I} - \bar{Y}) - 0.05\bar{I} + 0.75\bar{Y} - 5\bar{X}\bar{Y}.$$

下面求 $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{I}$ 。取 $P = -0.05, Q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$ ，则

$$S = \begin{bmatrix} 100q_1 - 40q_2 \\ 10q_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{X} = \begin{bmatrix} 200\frac{q_1}{q_2} - 80 \\ \frac{q_1}{q_2} \\ 20 \end{bmatrix}.$$

从而

$$h_1^* = \bar{X} + (-80 + 200\frac{q_1}{q_2})(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{I}),$$

$$h_2^* = \bar{I} + 20(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{I}).$$

由定理 2 可知，系统(28)将零点配置到 -0.05 上， q_2/q_1 为任意的，不失一般性，取 $q_2/q_1 = 1$ ，则

$$h_1^* = \bar{X} + 120(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{I}),$$

$$h_2^* = \bar{I} + 20(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{I}).$$

选取 $J = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ ，对于辅助输出函数

h_1^* 和 h_2^* ，相对阶 $r_1 = r_2 = 1$ 。利用式(24)，由 Maple 软件解得如下结果：

$$u_1 = -0.03 + 0.03X - 3.52Y + 0.28I,$$

$$u_2 = -0.24Y + 0.1I.$$

显然，控制 u_1 和 u_2 就是对广义系统(27)实施隔离、免疫和提高感染者的恢复率等措施。图 1 ~ 图 4 分别表示 Y 类和 I 类在采取控制前、后的情形。其中：图 1, 图 2 表示控制前 Y 类和 I 类随时间 t 的变化趋于平衡点，该传染病将成为该地区的地方病；图 3, 图 4 表示控制后 Y 类和 I 类随时间 t 的变化趋于原点，该传染病将灭绝。

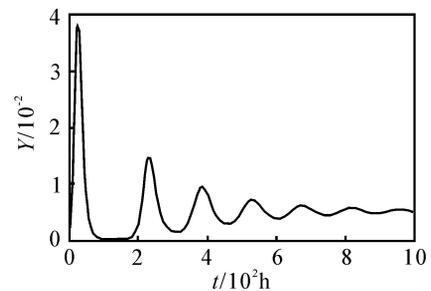


图 1 控制前 Y 类的变化曲线

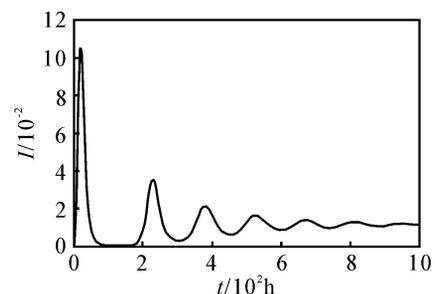


图 2 控制前 I 类的变化曲线

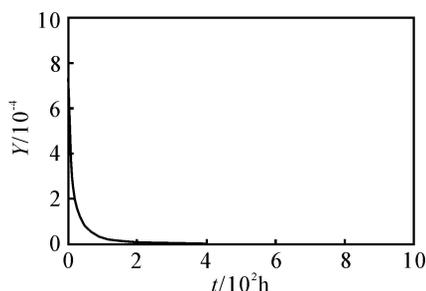


图3 控制后 Y 类的变化曲线

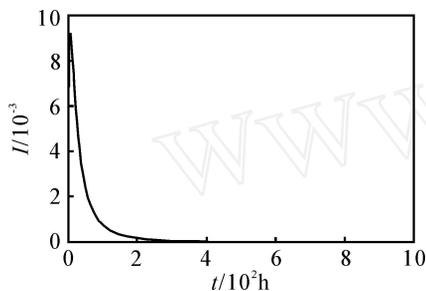


图4 控制后 I 类的变化曲线

4 结 语

本文采取重构输出函数的方法,不但能任意配置非线性广义系统的状态空间实现的零点,而且所构建的最小相位输出函数能直接用于构造状态反馈控制器,是一个方便可行的方法.将所得结论应用于 Logistic 增长的 SIR 传染病模型,仿真数据表明该方法是行之有效的.

参考文献(References)

[1] Isidori A. A tool for semiglobal stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1817-1827.

- [2] Ding Z. Adaptive stabilization of a class of nonlinear systems with unstable internal dynamics [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(10): 1788-1792.
- [3] Karagiannis D, Astolfi A, Ortega R. Two results for adaptive output feedback stabilization of nonlinear systems[J]. Automatica, 2003, 39(5): 857-866.
- [4] Karagiannis D, Jiang Z P, Ortega R, et al. Output - feedback stabilization of a class of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems [J]. Automatica, 2005, 41(9): 1609-1615.
- [5] Naira Hovakimyan, Yang Bongjun, Anthony J Calise. Adaptive output feedback control methodology applicable to non-minimum phase nonlinear systems[J]. Automatica, 2006, 42(4): 513-522.
- [6] Garcia P, Albertos P, Haggglund T. Control of unstable non-minimum phase delayed systems[J]. J of Process Control, 2006, 16(10): 1099-1111.
- [7] Marro G, Prattichizzo D, Zattoni E. Convolution profiles for right inversion of multivariable non-minimum phase discrete-time systems[J]. Automatica, 2002, 38(10): 1695-1703.
- [8] Niemiec M P, Kravaris C. Nonlinear model-state feedback control for nonminimum-phase processes[J]. Automatics, 2003, 39(7): 1295-1302.
- [9] Costas Kravaris, Michael Niemiec, Nikolaos Kazantzis. Singular PDEs and the assignment of zero dynamics in nonlinear systems [J]. Systems and Control Letters, 2004, 51(1): 67-77.
- [10] 陈兰荪, 陈键. 非线性生物动力系统[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
(Chen Lan-sun, Chen Jian. Nonlinear biology dynamics system[M]. Beijing: Science Press, 1993.)

(上接第12页)

[7] Wu C, Chua L O. Application of kronecker products to the analysis of systems with uniform linear coupling[J]. IEEE Trans on Circuit System, 2004, 51(4): 787-796.

[8] Lü J, Chen G R. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(6): 841-846.

[9] Zhou J, Chen T. Synchronization in general complex delayed dynamical networks[J]. IEEE Trans on Circuit

- System, 2006, 53(3): 733-744.
- [10] Minc H. Nonnegative matrices [M]. New York: Wiley, 1988.
- [11] Hale J K, Verduyn Lunel S M. Introduction to functional differential equations [M]. New York: Springer-Verlag, 1993.
- [12] Lin W, He Y B. Complete synchronization of the noise-perturbed Chua's circuits[J]. Chaos, 2005, 15(023705): 1-9.