

文章编号: 1001-0920(2008)01-0041-05

再制造成本随机分布的生产优化问题研究

李新军, 达庆利

(东南大学 经济管理学院, 南京 211189)

摘要: 研究单一厂商制造/再制造集成系统的两期生产优化问题. 首先, 在回收率一定的条件下, 建立回收产品的再制造成本与再制造率之间的函数关系; 然后, 建立以追求利润最大化为目标的模型, 验证了该模型为凸规划, 给出了 K-T 条件表达式, 并分析了伽马分布条件下解的特征及其临界条件; 最后, 通过算例对该模型的性质和规律作进一步分析.

关键词: 闭环供应链; 生产优化; 成本函数; K-T 条件

中图分类号: F253 **文献标识码:** A

Monopoly production optimization problem for remanufacturing cost with stochastic distribution

LI Xin-jun, DA Qing-li

(School of Economics and Management, Southeast University, Nanjing 211189, China. Correspondent: LI Xin-jun, E-mail: lixinjun101@163.com)

Abstract: The two-period production optimization model is established in a monopoly manufacturing/remanufacturing setting. The function between the remanufacturing cost and the remanufacturing yield is constructed under the condition that the return rate is fixed. The theorem is verified that the model is a convex programming problem, and then K-T conditions are given. Moreover, the character and the critical term of solving are testified on the condition of gamma distribution. Finally, a numerical computation is given to illustrate the properties and rules of the model.

Key words: Closed-loop supply chains; Production optimization; Cost function; K-T condition

1 引言

闭环供应链作为供应链领域一个新兴研究方向, 近年来引起了学术界和企业界的广泛关注. 所谓闭环供应链是指: 从产品的全生命周期角度出发, 将正向供应链活动和逆向供应链活动整合起来, 对产品的回收、生产和再销售整个过程进行设计和管理^[1-3]; 而逆向供应链则是指: 从消费者手中回收废旧产品并进行分类/检测/拆解, 直到最终处置或由制造商再利用的过程^[4-6].

许多学者对闭环供应链从不同角度进行了研究. Majumder^[7]应用纳什均衡博弈分析了原始设备制造商和当地再制造商相互竞争模型, 并建立了可再制造产品与回收率和产品寿命以及前几期新制造产品之间的数量关系. Savaskan 等^[8]应用博弈论研究了逆向供应链中分别由生产商、零售商和第三方

负责回收这 3 种渠道结构的最优选择问题. Toktay 等^[9]基于技术选择对制造/再制造成本结构的影响, 从产品定价和消费者效用的角度研究了新制造产品和再制造产品在同一市场上销售且存在价格竞争的利润最大化问题. Ferrer 等^[10]假定每期的再制造率为定值, 分别研究了单一厂商和双寡头垄断条件下两期、多期和无穷期的利润最大化问题. Guide 等^[11]提出了回收产品的分层结构模式, 通过质量依赖的回收价格体系来影响回收产品的质量和数量, 并建立了再制造产品的需求函数, 从而实现了回收产品的供需平衡以及利润最大化的目标.

现有的文献大都研究了回收产品质量状态的不稳定性. Fleischmann 等^[4]考虑到回收产品质量的不确定性, 建立了仿真模型, 用以评估不同的逆向物流结构. Guide 等^[2]提出了产品回收管理(PAM)的

收稿日期: 2006-10-19; 修回日期: 2007-01-04.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70472033).

作者简介: 李新军(1975—), 男, 山东沂水人, 博士生, 从事闭环供应链管理、逆向物流的研究; 达庆利(1945—), 男, 南京人, 教授, 博士生导师, 从事经营过程分析与决策、管理系统工程的研究.

概念,定性分析了如何控制回收产品质量的不确定性,并作了经济价值分析. Guide 等^[11]扩展了该模型,基于 PAM 建立了回收产品质量依赖的递阶供应函数,研究了以追求利润最大化为目标的供需均衡模型. Ferrer 等^[10]提出了单一厂商的两期生产优化模型,忽略了回收产品质量的不确定性而假定所有回收产品的再制造成本相同,并且指出,从再制造率对再制造成本的影响出发研究该模型是未来的一个重要研究方向. Galbreth^[12]研究了再制造条件下的回收和分类策略,构造了再制造成本与再制造率之间的函数关系,主要用于解决在需求确定和随机条件下产品回收和再制造率的选择问题. Klausner 等^[13]研究了如何采取激励措施来提高回收产品的质量状态,并得出结论:回收产品质量的提高将导致较高的再制造率.

本文在文献[10]的基础上,引入再制造成本的随机分布函数来分析闭环供应链的生产优化问题.因此,本文研究具有以下特点:1) 在回收率一定的条件下,建立了再制造成本与再制造率之间的函数关系,并引入了伽马分布;2) 本文模型为凸规划,可用 K-T 条件求解,且具有唯一最优解.可见,本文模型通过累积分布函数描述了再制造成本变化趋势,对于闭环供应链的生产决策起到了很好的辅助作用,具有重要的理论价值和现实意义.

2 模型建立及求解

本文主要研究制造/再制造集成系统单一厂商的两期利润最大化问题.假设市场中只有一个完全垄断的制造商且只生产一种产品.第1期只新制造产品;第2期既要新制造产品,也要对回收产品进行再制造.

假设每期的潜在市场容量均为 A , p_1 和 q_1 分别为第1期新制造产品的价格和数量, $q_{2,j}$ 为产品 j 在第2期的数量, $j = N, R$ 分别表示新制造产品和再制造产品.假定第1期需求函数为线性需求函数,记为 $q_1 = A - p_1$ ^[10],第2期的需求函数为 $p_2 = A - q_{2,N} - q_{2,R}$,即假定第2期消费者对新制造产品和再制造产品无法区分,愿意支付同一价格 p_2 .新制造产品的单位成本为 c .

产品回收率为 α ($0 < \alpha < 1$),即为第2期回收产品与第1期新制造产品的比例.再制造率为 β ,即为第2期再制造产品与回收产品的比例.考虑资金时间价值,并假定资金折现率为 r ($0 < r < 1$).

2.1 再制造产品成本函数

在不进行技术创新的情况下,对于大多数产品,如电话机、一次性相机等,当回收时间间隔和回收率一定时,回收产品的质量状态基本一致^[12].此时,可

采用再制造成本来描述回收产品的质量状态:回收产品的质量越低,则再制造成本就越高.第2期的回收产品来源于第1期的新制造产品,只要回收率一定,第1期新制造产品数量无论有多少,回收产品的质量状态都基本不变,即回收产品质量状态仅与回收率有关.再制造成本和再制造率之间的函数关系如图1所示.

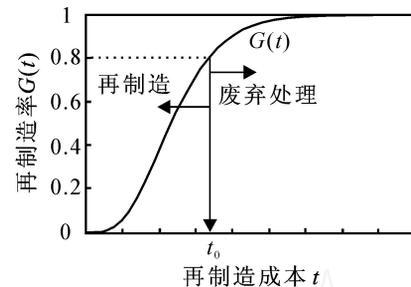


图1 再制造率与再制造成本关系

由回收率定义知,第2期回收产品为 q_1 ,第2期再制造产品为 $q_{2,R}$,则 $\beta = q_{2,R} / (q_1)$.假设回收产品质量状态的累积分布函数为 $G(\cdot)$,相应的概率密度函数为 $g(\cdot)$,用 t_0 表示再制造成本的临界值,则有

$$\beta = G(t_0) \text{ or } G(t_0) = q_{2,R} / (q_1). \quad (1)$$

式(1)的含义为,当再制造率为 β 或 $q_{2,R} / (q_1)$ 时,再制造成本的临界值为 t_0 ,亦即再制造成本小于 t_0 的概率为再制造率 β 或 $q_{2,R} / (q_1)$.将再制造成本小于 t 的回收产品全部用作再制造,而将再制造成本大于 t_0 的回收产品作废弃处理.于是,通过累积分布函数将再制造成本和再制造率联系起来.在 $\beta = G(t_0)$ 中, β 越大, t_0 就越大.再制造产品 $q_{2,R}$ 的平均成本和总成本分别为

$$\frac{\int_0^{t_0} x g(x) dx}{G(t_0)}, \quad (2a)$$

$$q_{2,R} \frac{\int_0^{t_0} x g(x) dx}{G(t_0)} = q_1 \int_0^{t_0} x g(x) dx. \quad (2b)$$

2.2 模型的建立

考虑到价格竞争和再制造成本分布函数,以及新制造产品和再制造产品的产量非负约束,以追求利润最大化为目标的两期模型为

$$\begin{aligned} \max f(q_1, q_{2,N}, q_{2,R}) = & \\ & (p_1 - c) q_1 + [(p_2 - c) q_{2,N} + \\ & p_2 q_{2,R} - q_1 \int_0^{t_0} x g(x) dx], \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\text{s. t. } p_1 = A - q_1, \quad (3b)$$

$$p_2 = A - q_{2,N} - q_{2,R}, \tag{3c}$$

$$q_{2,R} \leq q_1, \tag{3d}$$

$$q_{2,N}, q_{2,R} \geq 0. \tag{3e}$$

2.3 模型的求解

定理 1 式 (3) 描述的两期模型为凸规划问题.

证明 将式 (3b) 和 (3c) 代入 (3a), 则目标函数转化为

$$\begin{aligned} \max f(q_1, q_{2,N}, q_{2,R}) = & \\ & (A - q_1 - c) q_1 + [(A - q_{2,N} - \\ & q_{2,R} - c) q_{2,N} + (A - q_{2,N} - q_{2,R}) q_{2,R} - \\ & q_1 \int_0^{G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})} xg(x) dx]. \end{aligned} \tag{4}$$

由

$$\frac{\partial G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})}{\partial q_{2,R}} = \frac{dG^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})}{d(\frac{q_{2,R}}{q_1})} \times \frac{\partial(\frac{q_{2,R}}{q_1})}{\partial q_{2,R}} =$$

$$\frac{1}{\frac{dG[G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})]}{dG^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})} q_1} = \frac{1}{q_1 g[G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})]}$$

和

$$\frac{\partial G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})}{\partial q_1} = - \frac{q_{2,R}}{q_1^2 g[G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})]},$$

可得海赛阵为

$$H = \begin{bmatrix} -2 - \frac{q_{2,R}^2}{q_1^3 g[G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})]} & 0 \\ 0 & -2 \\ \frac{q_{2,R}}{q_1^2 g[G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})]} & -2 \\ \frac{q_{2,R}}{q_1^2 g[G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})]} & \\ -2 & \\ - (2 + \frac{1}{q_1 g[G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})]}) & \end{bmatrix}. \tag{5}$$

因该矩阵是负定阵, 所以目标函数是凹函数.

约束条件 $q_{2,R} \leq q_1, q_{2,N} \geq 0$ 和 $q_{2,R} \geq 0$ 都是关于 $q_1, q_{2,N}, q_{2,R}$ 的线性函数. 因此, 该问题为凸规划问题.

定理 2 式 (3) 描述的凸规划问题可通过 Karush-Kuhn-Tucker 优化条件求得解.

证明 容易证明该问题存在可行解. 又该问题为凸规划, 因此必定存在最优解.

Lagrangian 函数为

$$\begin{aligned} L(q_1, q_{2,N}, q_{2,R}) = & \\ & (A - q_1 - c) q_1 + [(A - q_{2,N} - q_{2,R} - c) q_{2,N} + \\ & (A - q_{2,N} - q_{2,R}) q_{2,R} - q_1 \int_0^{G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})} xg(x) dx] + \\ & (q_1 - q_{2,R}) + u_1 q_{2,N} + u_2 q_{2,R}. \end{aligned} \tag{6}$$

Karush-Kuhn-Tucker 优化条件为

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = A - 2q_1 - c - \left(\int_0^{G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})} xg(x) dx - \frac{q_{2,R}}{q_1} G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1}) \right) + u_1 = 0, \tag{7a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{2,N}} = (A - 2q_{2,N} - 2q_{2,R} - c) + u_1 = 0, \tag{7b}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{2,R}} = (A - 2q_{2,N} - 2q_{2,R} - G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})) - u_2 = 0, \tag{7c}$$

$$(q_1 - q_{2,R}) = 0, \tag{7d}$$

$$u_1 q_{2,N} = 0, \tag{7e}$$

$$u_2 q_{2,R} = 0, \tag{7f}$$

$$u_1, u_2 \geq 0. \tag{7g}$$

于是定理得证.

2.4 再制造成本函数的表达形式

由于 $(a, b) (a > 0, b > 0)$ 分布具有一些优点, 且再制造成本和再制造率之间的函数关系类似于产品寿命分布, 本文假定再制造成本函数服从 (a, b) 分布^[12].

(a, b) 分布一般具有如下特点^[14]:

1) (a, b) 分布的概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b^a} \frac{x^{a-1}}{(a)} e^{-x/b}, & x > 0; \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

2) 期望值为 ab , 方差为 ab^2 , 通过参数 a 和 b 的设定可以拟合很多变量为正值的分布.

3) 当 a 很大时, (a, b) 分布逼近正态分布.

4) 现实生活中很多分布服从 (a, b) 分布, 尤其是产品寿命分布.

定理 3 再制造成本服从 (a, b) 分布时, 可通过求解以下方程组得到结果:

$$A - 2q_1 - c - \left(\int_0^{G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1})} xg(x) dx - \frac{q_{2,R}}{q_1} G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1}) \right) = 0,$$

$$\frac{q_{2,R}}{q_1} G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1}) = 0,$$

$$A - 2q_{2,N} - 2q_{2,R} - c + u_1 = 0,$$

$$A - 2q_{2,N} - 2q_{2,R} - G^{-1}(\frac{q_{2,R}}{q_1}) = 0, u_1 q_{2,N} = 0.$$

证明 因再制造成本服从 (a, b) 分布,并结合 (a, b) 分布特点知 $0 < q_{2,R} < q_1$,故 $w_2 = 0$. 将其代入式(7) 即可得证.

因 (a, b) 分布函数比较复杂,无法给出解析式,故通过下面的算例来分析该模型的性质和规律.

3 算例分析

本算例所用参数取值为 $A = 10, c = 5, \alpha = 0.8, \beta = 0.9$,采用 (a, b) 分布. 因为 (a, b) 分布的期望值和方差分别为 ab 和 ab^2 ,所以首先固定期望值 ab ,然后使 b 逐渐增大,观察利润值和决策变量的变化,即在期望值固定的情况下,利润值和决策变量随着方差的变化趋势. 参数 b 从 1 到 10,间隔为 1;期

望值 ab 为新制造产品成本 c 的倍数,倍数分别为 0.4,0.5,0.7,1.0,1.5,2.0. 用 Matlab6.5 进行仿真,具体结果如表 1 所示.

通过进一步分析,可得如下结论:

1) 在 b 不变的条件下,随着 ab 的增加,利润值越来越小,这是因为再制造成本期望值越大,与新制造产品相比,再制造产品的成本优势越小,于是利润值也相应地降低.

2) 在 ab 不变的条件下,随着 b 的增加,利润值越来越大,这是由 (a, b) 分布的特点决定的. 因为再制造成本方差越大,与新制造产品相比,回收产品中再制造成本较低的比重越大,再制造产品的成本

表 1 再制造成本伽马分布的闭环供应链生产优化仿真数据表

ab	b										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
q_1	0.4c	3.494	3.574	3.627	3.666	3.696	3.719	3.738	3.753	3.766	3.777
	0.7c	3.147	3.241	3.315	3.374	3.425	3.468	3.506	3.540	3.570	3.597
	1.0c	3.098	3.192	3.261	3.316	3.363	3.402	3.437	3.469	3.497	3.523
	1.5c	2.565	2.657	2.737	2.806	2.866	2.919	2.968	3.011	3.051	3.087
	2.0c	2.509	2.546	2.593	2.641	2.689	2.733	2.775	2.815	2.852	2.887
$q_{2,N}$	0.4c	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0.7c	0.448	0.488	0.470	0.442	0.408	0.374	0.340	0.308	0.278	0.248
	1.0c	1.113	1.009	0.927	0.859	0.800	0.747	0.699	0.655	0.614	0.576
	1.5c	2.124	1.880	1.726	1.606	1.511	1.431	1.361	1.299	1.242	1.193
	2.0c	2.434	2.274	2.136	2.025	1.925	1.842	1.768	1.701	1.640	2.584
$q_{2,R}$	0.4c	2.656	2.605	2.588	2.584	2.590	2.598	2.607	2.618	2.628	2.639
	0.7c	2.052	2.012	2.031	2.058	2.092	2.126	2.159	2.192	2.223	2.252
	1.0c	1.138	1.492	1.573	1.641	1.700	1.753	1.802	1.846	1.886	1.924
	1.5c	0.376	0.620	0.774	0.894	0.989	1.070	1.140	1.201	1.258	1.308
	2.0c	0.066	0.226	0.364	0.475	0.575	0.658	0.732	0.799	0.860	0.916
p_1	0.4c	6.506	6.426	6.373	6.334	6.305	6.281	6.262	6.247	6.234	6.223
	0.7c	6.854	6.759	6.685	6.626	6.575	6.532	6.494	6.461	6.430	6.403
	1.0c	6.902	6.808	6.739	6.684	6.638	6.598	5.563	6.531	6.503	6.478
	1.5c	7.435	7.343	7.263	7.194	7.134	7.081	7.033	6.990	6.950	6.913
	2.0c	7.492	7.455	7.407	7.359	7.331	7.267	7.225	7.185	7.148	7.113
p_2	0.4c	7.334	7.395	7.412	7.416	7.410	7.402	7.393	7.382	7.372	7.361
	0.7c	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500
	1.0c	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500
	1.5c	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500
	2.0c	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500	7.500
利润	0.4c	18.556	18.880	19.184	19.455	19.693	19.902	20.088	20.254	20.403	20.537
	0.7c	15.524	16.128	16.613	17.009	17.352	17.650	17.916	18.153	18.368	18.564
	1.0c	13.493	14.220	14.777	15.222	15.609	15.943	16.244	16.515	16.759	16.985
	1.5c	12.206	12.685	13.112	13.496	13.838	14.148	14.431	14.688	14.931	15.154
	2.0c	11.916	12.105	12.348	12.601	12.854	13.096	13.327	13.547	13.757	13.958

优势越来越大,于是利润值也相应地提高。

3) 在 b 不变的条件下,随着 ab 的增加, q_1 越来越小,而 p_1 越来越大。这是因为再制造成本期望值越大,与新制造产品相比,再制造产品的成本优势越小,应尽量通过增加第 1 期新制造产品价格来获取利润。

4) 在 ab 不变的条件下,随着 b 的增加, q_1 越来越大, p_1 越来越小,这是由 (a, b) 分布的特点决定的。因为再制造成本方差越大,与新制造产品相比,再制造产品的成本优势越大,第 1 期降低新制造产品价格来增加产量,以提高第 2 期再制造产品数量,充分利用再制造产品的成本优势。

5) 在 b 不变的条件下,随着 ab 的增加, $q_{2..N}$ 越来越大, $q_{2..R}$ 越来越小且均为正值。这是因为再制造成本期望值越大,与新制造产品相比,再制造产品的成本优势越小。

6) 在 ab 不变的条件下,随着 b 的增加, $q_{2..N}$ 总体上越来越小, $q_{2..R}$ 总体上则越来越大且均为正值,这是由 (a, b) 分布的特点决定的。因为再制造成本方差越大,与新制造产品相比,再制造产品的成本优势越大。

7) 在 ab 不断增大的过程中, $q_{2..N}$ 初始为 0,即第 2 期只再制造产品,然后逐渐变为正值,即第 2 期同时新制造产品和再制造产品。这时, p_2 也由小于 7.5 变为等于 7.5,这可由定理 3 和式(3c)得出。

4 结 语

本文研究了再制造成本具有概率分布的闭环供应链的两期生产优化问题。分析了再制造成本与再制造率之间的函数关系,并引入了伽马分布,建立了以追求利润最大化为目标的模型,丰富了再制造成本结构理论,为从事制造和再制造的企业提供了重要的决策参考。

如何将本文模型扩展到多期模型,如何将新制造产品和再制造成品之间的价格竞争融入本文模型,如何将本文的生产优化问题扩展到闭环供应链的采购—生产—再销售全过程,这些都是今后的研究方向。用再制造时间等来描述回收产品的质量状态,也可作为今后的研究方向之一。

参考文献(References)

[1] Guide V D R, Wassenhove L N V. Business aspects of closed-loop supply chains [M]. Pittsburgh: Carnegie Mellon University Press, 2003.
 [2] Guide V D R, Wassenhove L N V. Managing product returns for remanufacturing[J]. Product and Operations

Management, 2001, 10 (2): 142-155.

- [3] 赵晓敏,冯之浚,黄培清. 闭环供应链管理——我国电子制造业应对欧盟指令的管理变革[J]. 中国工业经济, 2004, 197(8): 48-55.
 (Zhao Xiao-min, Feng Zhi-jun, Huang Pei-qing. Closed-loop supply chains management — Managerial innovation on meeting WEEE EU directive in our electronic industries [J]. China Industrial Economy, 2004, 197(8): 48-55.)
 [4] Fleischmann R D M, Beullens P, Bloemhof-Riwaard J M, et al. The impact of product recovery on reverse design[J]. Product and Operations Management, 2001, 10(2): 156-173.
 [5] Fleischmann R D M, Inderfurth K, Wassenhove L N V. Reverse logistics: Quantitative models for closed-loop supply chains[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
 [6] 达庆利,黄祖庆,张钦. 逆向物流系统结构研究的现状及展望[J]. 中国管理科学, 2004, 12(1): 131-138.
 (Da Qing-li, Huang Zu-qing, Zhang Qin. Current and future studies on structure of the reverse logistics system: A review [J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(1): 131-138.)
 [7] Majumder P. Competition in remanufacturing[D]. New York: University of Rochester, 2001.
 [8] Savaskan R C, Bhattacharya S, Wassenhove L N V. Closed-loop supply chain models with product remanufacturing [J]. Management Science, 2004, 50 (2): 239-252.
 [9] Debo L, Toktay B, Wassenhove L N V. Market segmentation and technology selection for remanufacturable products [J]. Management Science, 2005, 51(8): 1193-1205.
 [10] Ferrer G, Swaminathan J M. Managing new and remanufactured products [J]. Management Science, 2006, 52(1): 1-14.
 [11] Guide V D R, Teunter R H, Wassenhove L N V. Matching demand and supply to maximize profits from remanufacturing [J]. Manufacturing and Service Operations Management, 2003, 5 (4): 303-316.
 [12] Galbreth M R. Managing condition variability in remanufacturing [D]. Tennessee: Vanderbilt University, 2006.
 [13] Klausner M, Hendrickson C T. Reverse logistics strategy for product take-back [J]. Interfaces, 2000, 30(3): 156-165.
 [14] 郑明,陈子毅,汪嘉冈. 数理统计讲义[M]. 上海:复旦大学出版社, 2006.