第 23 卷 第 10 期 控 制 与 决 策 2008 年 10 月
Vol. 23 No. 10 Control and Decision Oct. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)10-1129-06

仿射非线性系统的能控性

王晓明, 崔平远, 崔祜涛
(哈尔滨工业大学 深空探测基础研究中心, 哈尔滨 150080)

摘 要: 研究仿射非线性系统的能控性问题. 利用向量场族对应的积分曲线定义系统的能控性,建立一个新的基于漂移向量场弱泊松稳定的能控性判据,并给出了完整的证明. 利用该结论对定义在紧致黎曼流形上的解析系统,给出了漂移向量场为保守场条件下的能控性的充要条件,并用状态流形的紧致性证明了弱泊松稳定性的几个等价条件. 进一步利用保守系统的判据给出了一般仿射非线性系统能控的充分条件,并应用所得结论分析了欠驱动航天器姿态系统的能控性.

关键词: 仿射非线性系统; 保守系统; 能控性; 泊松稳定
中图分类号: N941.4 **文献标识码**: A

Controllability of affine nonlinear systems

WANG Xiao-ming, CUI Ping-yuan, CUI Hu-tao
(Deep Space Exploration Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China. Correspondent: WANG Xiao-ming, E-mail: xmwhit@126.com)

Abstract: The controllability of affine nonlinear systems is studied. The concept of controllability is defined by using the orbits of families of vector fields. A complete proof of the controllability criterion based on weakly positively Poisson stability of drift vector field is presented. Sufficient condition for systems on compact Riemann manifold with conservative drift vector field to be controllable is given, which is also necessary for analytic systems. Some equivalent conditions for weakly positively Poisson stability are proved. Finally, a sufficient condition for the controllability of general affine nonlinear systems is obtained by using the conservative field criterion, which is used to analyse the controllability of the underactuated spacecraft attitude control system.

Key words: Affine nonlinear systems; Conservative systems; Controllability; Poisson stable

1 引 言

以 Chow 定理和 Frobenius 定理为基础, Hermann[1,2], Haynes 等[3]和 Brockett 等[4]利用微分几何理论,研究非线性系统的能控性问题,得到了有关对称非线性系统能控性的充要条件. 此后, Sussmann 等[5]和 Krener[6]等对非线性系统能控性进行研究,引出许多有关能控性的概念,得到了许多著名的结果,如李代数秩条件. 鉴于能控性问题的复杂性,后续研究者开始将注意力集中于一些特殊的非线性系统[7,8].

本文主要研究仿射非线性系统,这类系统对控制是线性的,使其动态特性可完全由漂移向量场及控制向量场来描述,从而为微分几何理论的应用提供了有利的条件. 同时,这类系统在力学、物理学、生态学以及各类工程中大量存在,相关研究具有重要的实际意义.

Aeyels[9]研究了漂移向量场光滑而控制向量场为常值的仿射非线性系统,给出了全局能控的充分条件. Kaya 等[10]针对平面仿射非线性系统,给出了系统能控的必要条件. 近来, Sun 等[11]针对一般单输入平面仿射非线性系统,利用一种新的方法分析了系统的能达集,给出了系统全局能控的充要条件. 以此为基础, Sun 等进一步研究了两类非线性系统的全局能控性[12],即带有单个奇点的平面仿射非线性系统,以及带有特殊结构的高维仿射非线性系统,推广了文献[11]给出的结论,使能控性问题研究取得了重要进展. 对于一般仿射非线性系统,在漂移向量场弱泊松稳定的条件下, Lian 等[13]初步论证了能

收稿日期: 2007-07-13; 修回日期: 2007-10-24.
基金项目: 国家 863 计划项目(2006AA703504A).
作者简介: 王晓明(1981—),男,内蒙古兴安人,博士生,从事非线性控制系统的研究; 崔平远(1961—),男,山东青岛人,教授,博士生导师,从事飞行器动力学与控制等研究.

控性与李代数秩条件是等价的. 鉴于李代数在计算上的复杂性,本文在两个比较自然的假设条件下,对这一能控性结果进行改进,并给出了完整的证明;在此基础上讨论保守系统的仿射非线性能控性,给出并证明弱泊松稳定性的两个等价条件;利用经典力学中对于保守系统的判据,给出一般仿射非线性系统能控的充分条件,并将所得结论应用于欠驱动航天器姿态系统的能控性问题.

2 相关定义及已有结果

令 **M** 为 n 维连通的解析流形,其上解析向量场集合记为 **V(M)**. $X \in \mathbf{V(M)}$ 定义了一个映射

$$X:\mathbf{M} \mapsto T\mathbf{M},\ X(x) \in T_x\mathbf{M},\ \forall x \in \mathbf{M}.$$

其中 $T_x\mathbf{M}$ 表示 **M** 在 x 处的切空间,且

$$T\mathbf{M} = \{T_x\mathbf{M} \mid x \in \mathbf{M}\}.$$

在 **V(M)** 上定义二元运算为熟知的李括号运算,即

$$\forall X, Y \in \mathbf{V(M)},\ [X, Y] = XY - YX.$$

则 **V(M)** 成为实数域上的李代数. X 的积分曲线为映射 $c: \mathbf{R} \mapsto \mathbf{M}$,其中

$$\forall t \in \mathbf{R},\ c'(t) = X(c(t)).$$

为了论证方便,假设 X 是完备的,即 $c(t)$ 对于所有 $t \in \mathbf{R}$ 有定义.

每个向量场 $X \in \mathbf{V(M)}$ 对应一个动力系统,该动力系统的流为一个映射 $\exp^X: \mathbf{R} \times \mathbf{M} \mapsto \mathbf{M}$. 其中 $\exp^X(t, x) = c(t)$, $c(t)$ 是 X 的满足 $c(0) = x$ 的积分曲线. 为了方便,将 $\exp^X(t, x)$ 记为 $e_t^X(x)$. 如果该动力系统是保守的,则 X 也称为保守的.

任意向量场族 $\mathbf{V} \subset \mathbf{V(M)}$ 对应一个多元动力系统. 记

$$D^+(\mathbf{V}) = \{e_{t_k}^{X_k} \circ \cdots \circ e_{t_1}^{X_1} \mid t_1, \cdots, t_k \geq 0,$$
$$X_1, \cdots, X_k \in \mathbf{V}, k \in \mathbf{N}\}, \quad (1)$$

$$O^+(x, \mathbf{V}) = \{\phi(x) \mid \phi \in D^+(\mathbf{V})\}. \quad (2)$$

定义 1 令 $x \in \mathbf{M}$, 称 **V** 在 x 点可达, 如果 $\mathrm{int}(O^+(x, \mathbf{V})) \neq \varnothing$; 称 **V** 在 x 点能控, 如果 $O^+(x, \mathbf{V}) = \mathbf{M}$.

令 $\mathbf{L}_A(\mathbf{V})$ 表示 **V(M)** 的包含 **V** 的最小李子代数. 对于 $x \in \mathbf{M}$, 记

$$\mathbf{L}_A(\mathbf{V})_x = \{X(x) \mid X \in \mathbf{L}_A(\mathbf{V})\}, \quad (3)$$

则 $\mathbf{L}_A(\mathbf{V})_x$ 是 $T_x(\mathbf{M})$ 的一个子空间. 从而 $\mathbf{L}_A(\mathbf{V})$ 在适当的意义下定义了一个 **M** 上的分布.

定义 2 称 **V** 满足李代数秩条件, 如果对于 $\forall x \in \mathbf{M}$, $\mathbf{L}_A(\mathbf{V})_x = T_x\mathbf{M}$.

引理 1[5] 对于 $x \in \mathbf{M}$, **V** 在 x 点可达, 当且仅当 $\mathbf{L}_A(\mathbf{V})_x = T_x\mathbf{M}$. 进一步, $O^+(x, \mathbf{V})$ 的内点集在 $O^+(x, \mathbf{V})$ 中稠密.

如果 **V** 具有对称性, 即若 $X \in \mathbf{V}$, 则 $-X \in \mathbf{V}$. 此时有如下结果:

引理 2[14] 如果 $\mathbf{V} \subset \mathbf{V(M)}$ 对称, 则 **V** 能控, 当且仅当 **V** 满足李代数秩条件.

引理 3[15] 给定 $\mathbf{V} \subset \mathbf{V(M)}$, 对于 $\forall x \in \mathbf{M}$, 有 $\overline{O^+(x, \mathbf{V})} = \overline{O^+(x, \mathrm{conv}(\mathbf{V}))}$. 其中: $\mathrm{conv}(\mathbf{V})$ 表示 **V** 的凸壳, $\overline{O^+(x, \mathbf{V})}$ 和 $\overline{O^+(x, \mathrm{conv}(\mathbf{V}))}$ 分别为 $O^+(x, \mathbf{V})$ 和 $O^+(x, \mathrm{conv}(\mathbf{V}))$ 的闭包.

定义 3 给定 **M** 上完备向量场 X, 点 $x \in \mathbf{M}$ 称为是在 X 作用下正向 (负向) 泊松稳定的, 如果对于 x 的任意邻域 V_x 和任意 $t > 0$, 存在 $T > t$, 使得 $e_T^X(x) \in V_x$ ($e_{-T}^X(x) \in V_x$). 如果 x 在 X 作用下既正向泊松稳定又负向泊松稳定, 则称 x 为泊松稳定的. 记所有正向泊松稳定点的集合为 $\mathrm{P}^+(X)$, 所有泊松稳定点的集合为 $\mathrm{P}(X)$.

定义 4 称向量场 X 是正向泊松稳定的, 如果 $\mathrm{P}^+(X)$ 在 **M** 中稠密; 称 X 是泊松稳定的, 如果 $\mathrm{P}(X)$ 在 **M** 中稠密.

定义 5 称点 $x \in \mathbf{M}$ 在 X 作用下非游荡, 如果对于 x 的任意邻域 V_x 及 $\forall t > 0$, $\exists T > t$, 使得 $e_T^X(V_x) \cap V_x \neq \varnothing$ (或等价地, $e_{-T}^X(V_x) \cap V_x \neq \varnothing$). 其中 $e_T^X(V_x) = \{e_T^X(x) \mid x \in V_x\}$.

显然, 正向 (负向) 泊松稳定的点一定是非游荡点. 记 $\Omega(X)$ 为 X 作用下的所有非游荡点的集合, 则有如下引理:

引理 4[13] 在正向泊松稳定向量场 X 作用下, 非游荡集 $\Omega(X) = \mathbf{M}$.

定义 6 称向量场 X 是弱正向泊松稳定的, 如果非游荡集 $\Omega(X) = \mathbf{M}$.

3 主要结论

考虑 **M** 上的仿射非线性系统

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{m} u^i g_i(x) = f(x) + g(x)u,$$
$$x \in \mathbf{M},\ u = (u^1, \cdots, u^m)^{\mathrm{T}} \in U \subset \mathbf{R}^m. \quad (4)$$

向量场 f 称为漂移向量场, $g_1, g_2, \cdots, g_m$ 为控制向量场.

为避免论证的复杂性, 一般假设控制函数 $u: [0, +\infty) \to U$ 是勒贝格可积或局部可积的. 除此之外, 本文在讨论过程中还假定 $0 \in U$, 且 $\mathrm{aff}(U) = \mathbf{R}^m$. 其中 $\mathrm{aff}(U)$ 表示 U 的仿射包, 即所有满足如下条件:

$$\alpha_i \in \mathbf{R},\ \sum \alpha_i = 1,\ u_i \in U, \quad (5)$$

有限线性组合 $\sum \alpha_i u_i$ 所形成的点集.

3.1 基于弱正向泊松稳定的能控性判据

假设 f 及 $g_1, \cdots, g_m$ 均为解析向量场, 令 $\mathbf{F} =$

$\{f, g_1, \cdots, g_m\}$,则有如下能控性定理:

定理1　如果 f 弱正向泊松稳定,则系统(4)能控的充要条件是 $\mathbf{F}$ 满足李代数秩条件.

证明　必要性:对于系统(4),其本身已定义一个向量场族 $\mathbf{V}_\Sigma = \{f + gu \mid u \in U\}$. $\mathbf{V}_\Sigma$ 代表的多元动力系统的积分曲线对应于系统(4)的状态轨迹,系统(4)能控意味着 $\mathbf{V}_\Sigma$ 在每点 $x \in \mathbf{M}$ 的能达性. 由引理1有 $\mathbf{L}_A(\mathbf{V}_\Sigma)_x = T_x\mathbf{M}$,于是只需证明 $\mathbf{L}_A(\mathbf{F}) = \mathbf{L}_A(\mathbf{V}_\Sigma)$ 即可.

首先证明 $\mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{V}_\Sigma\} = \mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{F}\}$,显然有 $\mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{V}_\Sigma\} \subset \mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{F}\}$,所以只需证明 $\mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{F}\} \subset \mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{V}_\Sigma\}$.

由 $0 \in U$ 知 $f \in \mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{V}_\Sigma\}$. 因为 $\mathrm{aff}(U) = \mathrm{R}^m$,即 $\forall j \in \{1, \cdots, m\}$, $\exists k \in \mathrm{N}$, $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in \mathrm{R}$, $u_1, \cdots, u_k \in U$,使得

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i = e_j,\quad \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1,$$

其中 e_j 表示 R^m 的第 j 个标准基 $(0, \cdots, \overset{\text{第}j\text{个}}{1}, \cdots, 0)'$. 则有

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i (f + g u_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f + \sum_{i=1}^{k} g \alpha_i u_i = f + \sum_{i=1}^{k} g e_i = f + g_j. \tag{6}$$

因此 $f + g_j \in \mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{V}_\Sigma\}$,则 $g_j \in \mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{V}_\Sigma\}$. 所以 $\mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{F}\} \subset \mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{V}_\Sigma\}$,于是 $\mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{V}_\Sigma\} = \mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{F}\}$.

因为 $\mathbf{L}_A(\mathbf{F})$ 本身是一个线性空间,所以 $\mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{F}\} \subset \mathbf{L}_A(\mathbf{F})$,则 $\mathbf{L}_A(\mathbf{F})$ 也是包含 $\mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{F}\}$ 的最小李子代数;否则,存在子代数 $\mathbf{L} \subset \mathbf{L}_A(\mathbf{F})$, $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_A(\mathbf{F})$,使得 $\mathbf{F} \subset \mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{F}\} \subset \mathbf{L}$. 这与 $\mathbf{L}_A(\mathbf{F})$ 的定义矛盾,所以 $\mathbf{L}_A(\mathbf{F}) = \mathbf{L}_A(\mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{F}\})$. 同理, $\mathbf{L}_A(\mathbf{V}_\Sigma) = \mathbf{L}_A(\mathrm{span}_{\mathrm{R}}\{\mathbf{V}_\Sigma\})$,于是 $\mathbf{L}_A(\mathbf{F}) = \mathbf{L}_A(\mathbf{V}_\Sigma)$.

充分性:只需证明对于 $\forall x, y \in \mathbf{M}$,有 $y \in O^+(x, \mathbf{V}_\Sigma)$.

令 $\sigma = \mathbf{V}_\Sigma \cup \{-f\}$, $\mathbf{L}_A(\sigma)$ 表示包含 σ 的最小李子代数. 因为 $\mathbf{F}$ 满足李代数秩条件,由必要性证明过程知, $\mathbf{L}_A(\mathbf{V}_\Sigma)_x = \mathbf{L}_A(\mathbf{F})_x = T_x\mathbf{M}$,则 $\mathbf{L}_A(\sigma)_x = T_x\mathbf{M}$,所以 $\mathbf{L}_A(\mathrm{conv}(\sigma))_x = T_x\mathbf{M}$. 又因 $\mathrm{conv}(\sigma)$ 对称,由引理2有 $O^+(x, \mathrm{conv}(\sigma)) = \mathbf{M}$,于是由引理3得

$$\overline{O^+(x, \sigma)} = \mathbf{M}. \tag{7}$$

由 σ 的定义知 $\mathbf{L}_A(-\sigma)_x = \mathbf{L}_A(\sigma)_x = T_x\mathbf{M}$. 根据引理1, $O^+(y, -\sigma)$ 有非空内部,即 $\exists z \in O^+(y, -\sigma)$ 和开邻域 V_z,有 $z \in V_z$, $V_z \subset O^+(y, -\sigma)$. 由式(7)得 $V_z \cap O^+(x, \sigma) \neq \varnothing$,所以 $O^+(y, -\sigma) \cap O^+(x, \sigma) \neq \varnothing$,即

$$y \in O^+(x, \sigma). \tag{8}$$

下面证明 $y \in O^+(x, \mathbf{V}_\Sigma)$. 由已知

$$\mathbf{L}_A(\mathbf{V}_\Sigma)_x = T_x\mathbf{M},\quad \mathbf{L}_A(-\mathbf{V}_\Sigma)_y = T_y\mathbf{M}. \tag{9}$$

根据引理1,可令 $x_0 \in \mathrm{int}(O^+(x, \mathbf{V}_\Sigma))$, $y_0 \in \mathrm{int}(O^+(y, -\mathbf{V}_\Sigma))$. 注意到式(8)中 x 和 y 的任意性,可知 $\exists t_1, \cdots, t_k > 0$, $X_1, \cdots, X_k \in \sigma$,使得 $y_0 = e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_1}_{t_1}(x_0)$. 考虑到 $e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_1}_{t_1}$ 是 $\mathbf{M}$ 上的一个微分同胚,于是存在 x_0 的开邻域 V_{x_0} 和 y_0 的开邻域 V_{y_0},有 $V_{x_0} \subset O^+(x, \mathbf{V}_\Sigma)$, $V_{y_0} \subset O^+(y, -\mathbf{V}_\Sigma)$,且

$$V_{y_0} = e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_1}_{t_1}(V_{x_0}) = \{e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_1}_{t_1}(z) \mid z \in V_{x_0}\}. \tag{10}$$

要证明 $y \in O^+(x, \mathbf{V}_\Sigma)$,只需证明存在 $\tilde{x} \in V_{x_0}$, $\tilde{y} \in V_{y_0}$, $s_1, \cdots, s_l > 0$, $G_1, \cdots, G_l \in \mathbf{V}_\Sigma$,使得 $\tilde{y} = e^{G_l}_{s_l} \cdots e^{G_1}_{s_1}(\tilde{x})$,其中 $l \in \mathrm{N}$.

在式(10)中,如果 $X_i \in \mathbf{V}_\Sigma (i = 1, 2, \cdots, k)$,则命题得证;否则,存在 $X_i = -f$, $1 \leq i \leq k$. 因此需要利用 f 的弱正向泊松稳定性,将 $-f$ 的作用替换成 $\mathbf{V}_\Sigma$ 中向量场的作用. 分两种情况处理:

1) $X_1 = -f$ 的情况. 由 f 的弱正向泊松稳定性,对于 V_{x_0} 和 t_1, $\exists T_1 > t_1$ 及 $x_1, x' \in V_{x_0}$,使得 $e^f_{T_1}(x') = x_1$. 对于 x_1,由式(10)知, $\exists y' \in V_{y_0} \subset O^+(y, -\mathbf{V}_\Sigma)$,使得 $y' = e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_1}_{t_1}(x_1)$. 令 $s_1 = T_1 - t_1$,则有

$$y' = e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_1}_{t_1} e^f_{T_1}(x') = e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_2}_{t_2} e^{-f}_{t_1} e^f_{T_1}(x') = e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_2}_{t_2} e^f_{s_1}(x'). \tag{11}$$

2) $X_i = -f (1 < i \leq k)$ 的情况. 设 $X_{i_1} = \cdots = X_{i_j} = -f$, $1 < i_1 < \cdots < i_j \leq k$. 对于 $X_{i_1} = -f$,令 $z_1 = e^{X_{i_1}}_{t_{i_1}} e^{X_{i_1-1}}_{t_{i_1-1}} \cdots e^{X_1}_{t_1}(x_0)$. 此时假设 $X_1 \neq -f$,否则可由式(11)将记号 $e^{X_1}_{t_1}(x_0)$ 改为 $e^f_{s_1}(x')$,这样并不影响证明过程.

因为 $e^{X_{i_1}}_{t_{i_1}} e^{X_{i_1-1}}_{t_{i_1-1}} \cdots e^{X_1}_{t_1}$ 是 $\mathbf{M}$ 上的一个微分同胚,所以

$$V_{z_1} = e^{X_{i_1}}_{t_{i_1}} \cdots e^{X_1}_{t_1}(V_{x_0}) = \{e^{X_{i_1}}_{t_{i_1}} \cdots e^{X_1}_{t_1}(z) \mid z \in V_{x_0}\} \tag{12}$$

是 z_1 的一个开邻域. 由式(10)有

$$V_{y_0} = e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_{i_1+1}}_{t_{i_1+1}}(V_{z_1}) = \{e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_{i_1+1}}_{t_{i_1+1}}(z) \mid z \in V_{z_1}\}. \tag{13}$$

对于 V_{z_1} 和 t_{i_1}, $\exists T_{i_1} > t_{i_1}$ 及 $z'', z' \in V_{z_1}$, $e^f_{T_{i_1}}(z') = z''$. 对于 z',由式(12)知

$$\exists x'' \in V_{x_0} \subset O^+(x, \mathbf{V}_\Sigma),\quad z' = e^{X_{i_1}}_{t_{i_1}} \cdots e^{X_1}_{t_1}(x'').$$

所以

$$z'' = e^{f}_{T_{i_1}}(z') = e^{f}_{T_{i_1}} e^{X_{i_1}}_{t_{i_1}} \cdots e^{X_1}_{t_1}(x') = e^{f}_{s_{i_1}} e^{X_{i_1-1}}_{t_{i_1-1}} \cdots e^{X_1}_{t_1}(x'). \tag{14}$$

对于 z'', 由式(13)知, $\exists y'' \in V_{y_0}$, $y'' = e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_{i_1+1}}_{t_{i_1+1}}(z')$. 于是

$$y'' = e^{X_k}_{t_k} \cdots e^{X_{i_1+1}}_{t_{i_1+1}} e^{f}_{s_{i_1}} e^{X_{i_1-1}}_{t_{i_1-1}} \cdots e^{X_1}_{t_1}(x').$$

此时 $X_1, \cdots, X_{i_1-1}$ 及 f 皆取自于 $\mathbf{V}_\Sigma$.

按同样方式依次对 $X_{i_2}, \cdots, X_{i_j}$ 进行处理,即可得到 $G_1, \cdots, G_l > 0$, $\tilde{x} \in V_{x_0} \subset O^+(x, \mathbf{V}_\Sigma)$, $\tilde{y} \in V_{y_0} \subset O^+(y, -\mathbf{V}_\Sigma)$, $s_1, \cdots, s_l > 0$, 使得 $\tilde{y} = e^{G_l}_{s_l} \cdots e^{G_2}_{s_2} e^{G_1}_{s_1}(\tilde{x})$. □

根据经典力学理论,保守系统的相流保持体积不变. 由庞加莱回归定理,如果有界区域 $A \subset R^n$ 上的连续双射 f 保持相体积不变,则对于 $\forall p \in A$ 及其任意邻域 $V_p \subset A$, $\exists q \in V_p$, 使 q 在 f 的重复作用下回归到 V_p 中,即 $\exists k \in \mathrm{N}$, $f^k(q) \in V_p$. 令 $\mathbf{M}$ 同时为紧致黎曼流形,可得如下定理:

定理 2 $\mathbf{M}$ 上的保守向量场是弱正向泊松稳定的.

由定理 1 和定理 2,立即得到如下关于保守系统仿射非线性能控性的结果:

定理 3 若 $\mathbf{M}$ 上的系统 $\dot{x} = f(x)$ 是保守的,则系统(4)能控,当且仅当 $\mathbf{F}$ 满足李代数秩条件.

3.2 弱正向泊松稳定的等价条件

令 $\mathbf{M}$ 为紧致连通的解析黎曼流形,则 $\mathbf{M}$ 同时也是一个完备有界的度量空间. 记 $\mathbf{M}$ 上的度量为 $d: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \to \mathrm{R}^+$, 其中 $\mathrm{R}^+ = \{r \in \mathrm{R} \mid r \geq 0\}$. 因为 d 诱导出的拓扑与 $\mathbf{M}$ 上已有的拓扑等价,所以可用 d 表示 $\mathbf{M}$ 上的开集,以及 $\mathbf{M}$ 上任意点的邻域. 则 $\forall x \in \mathbf{M}$, 以及任意充分小正数 r, $B(x, r) = \{y \in \mathbf{M} \mid d(x, y) < r\}$ 表示以 x 为中心, r 为半径的开球.

对于子集 $A \subset \mathbf{M}$, A 的直径定义为

$$D(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

定理 4 给定 $\mathbf{M}$ 上的完备向量场 X, 对于在 X 作用下收敛的非游荡点列,其极限点非游荡.

证明 令 $\{x_n\}$ 为 $\mathbf{M}$ 中的序列,在完备向量场 X 作用下, $\forall n \in \mathrm{N}$, 有 x_n 非游荡. 假设 $\{x_n\}$ 为 $\mathbf{M}$ 中的收敛序列,极限点为 x_0. 对于 x_0 的任意邻域 V_{x_0}, $\exists k \in \mathrm{N}$, 使得 $x_k \in V_{x_0}$, 即 V_{x_0} 也是 x_k 的邻域. 因为 x_k 非游荡, 对于 V_{x_0} 及任意 $t > 0$, $\exists T > t$, 使得 $e^X_T(V_{x_0}) \cap V_{x_0} \neq \varnothing$, 即 x_0 非游荡. □

定理 5 给定 $\mathbf{M}$ 上的完备向量场 X, 则 X 弱正向泊松稳定,当且仅当非游荡点集 $\Omega(X)$ 在 M 中稠密.

下面利用 $\mathbf{M}$ 的紧致性,讨论弱正向泊松稳定性与泊松稳定性之间的关系.

定理 6 给定 $\mathbf{M}$ 上的完备向量场 X, 则 X 弱正向泊松稳定的充要条件是 X 泊松稳定.

该定理的证明要用到下面两个引理:

引理 5 如果 $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ 是 $\mathbf{M}$ 中的一列非空紧子集,且满足:

1) $E_{k+1} \subset E_k$, $\forall k \in \mathrm{N}$;

2) $\lim\limits_{k \to \infty} D(E_k) = 0$.

则存在唯一的 $e \in \mathbf{M}$, 使得 $e \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.

引理 6 设 $\mathbf{M}$ 为 Hausdorff 拓扑空间, $\mathbf{M}$ 在 x 点局部紧致,当且仅当对于 x 任意开邻域 V_x, 存在 x 的开邻域 W_x, $\overline{W_x}$ 紧致且 $\overline{W_x} \subset V_x$.

定理 6 证明 充分性显然成立. 下面证其必要性. 由于 $\forall x \in \mathbf{M}$ 及其邻域 U_x, 根据定义 4, 只需证明 U_x 包含泊松稳定点.

由于 $\mathbf{M}$ 为紧致黎曼流形,自然为 Hausdorff 空间,于是 $\mathbf{M}$ 上的任意闭子集紧致. 因为 $\mathbf{M}$ 局部紧致,由引理 6 知 $\exists r > 0$, 使得 $\overline{B(x, r)} \subset U_x$. 同理, $\exists x_1 \in B(x, r)$, $0 < r_1 < r/4$, $\overline{B(x_1, r_1)} \subset B(x, r/2)$.

令 $U_1 = B(x_1, r_1)$, 则 $\overline{U_1}$ 紧致, $\overline{U_1} \subset U_x$, $D(\overline{U_1}) \leq r/2$. 令 $t_n = n$, $\forall n \in \mathrm{N}$, 得到严格递增时间序列 $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$. 因为 x_1 非游荡, 对于 U_1 及 t_1, $\exists T_1 > t_1$, $e^X_{T_1}(U_1) \cap U_1 \neq \varnothing$.

取 $x_2 \in e^X_{T_1}(U_1) \cap U_1$, 注意到 $e^X_t: \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ 是 $\mathbf{M}$ 上的微分同胚,则 $e^X_{T_1}(U_1)$ 为开集. 由引理 6 知

$$\exists 0 < r_2 < r_1/2, \ \overline{B(x_2, r_2)} \subset e^X_{T_1}(U_1) \cap U_1.$$

记 $U_2 = B(x_2, r_2)$, 则 $\overline{U_2}$ 紧致, $D(\overline{U_2}) \leq r_1 < r/4$. 同理, 因为 x_2 非游荡, 对于 U_2 及 t_2, $\exists T_2 > t_2$, $e^X_{-T_2}(U_2) \cap U_2 \neq \varnothing$. 取 $x_3 \in e^X_{-T_2}(U_2) \cap U_2$, $0 < r_3 < r_2/2$, 使得 $U_3 = \overline{B(x_3, r_3)} \subset e^X_{-T_2}(U_2) \cap U_2$, $\overline{U_3}$ 紧致, $D(\overline{U_3}) \leq r_2 < r_1/2 < r/8$.

重复上述过程,可得紧集序列 $\{\overline{U_n}\}_{n=1}^{\infty}$, 满足

$$\begin{cases} U_x \supset \overline{U_1} \supset U_1 \supset \overline{U_2} \supset U_2 \cdots, \\ D(\overline{U_n}) \leq r/2^n; \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} U_{2n} \subset e^X_{T_{2n-1}}(U_{2n-1}) \cap U_{2n-1}, \\ U_{2n+1} \subset e^X_{-T_{2n}}(U_{2n}) \cap U_{2n}. \end{cases} \tag{16}$$

由式(15)及引理 5 知,存在唯一的 $p \in \mathbf{M}$, $p = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{U_n}$. 下面讨论 p 的泊松稳定性.

由于 $\forall \lambda > 0$, $t > 0$, $\exists n \in \mathrm{N}$, $\lambda > r/2^{2n}$, 且 $T_{2n} > t_{2n} = 2n > t$. 由式(16)知 $p \in \overline{U_{2n+1}} \subset U_{2n} \subset \overline{U_{2n}}$. 对于 $\forall y \in U_{2n}$, $d(p, y) \leq D(\overline{U_{2n}}) \leq r/2^{2n} < \lambda$, 即 $y \in B(p, \lambda)$, 所以 $U_{2n} \subset B(p, \lambda)$. 于是

$$e^X_{T_{2n}}(p) \in e^X_{T_{2n}}(\overline{U_{2n+1}}) \subset e^X_{T_{2n}}(e^X_{-T_{2n}}(U_{2n}) \cap U_{2n}),$$

$$e^X_{T_{2n}}(e^X_{-T_{2n}}(U_{2n}) \cap U_{2n}) \subset e^X_{T_{2n}}(e^X_{-T_{2n}}(U_{2n})) = U_{2n}.$$

即对于 p 的任意邻域 $B(p,\lambda)$ 及任意 $t>0$, $\exists\, T_{2n}>t$,使得 $e^X_{T_{2n}}(p) \in B(p,\lambda)$,则 p 正向泊松稳定. 同理可证 p 负向泊松稳定. 注意到 $p \in U_x$,则定理 6 得证. □

3.3　仿射非线性系统能控的一个充分条件

根据经典力学中的刘维尔定理,对于连续动力学系统 $\dot{x} = f(x)$,如果 $\operatorname{div} f \equiv 0$,则相空间体积沿相流保持不变[16]. 其中 $\operatorname{div} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$.

以此为基础,利用定理 3 可建立系统(4)的一个简单的能控性判据.

定理 7　对于定义在紧致黎曼流形 $\mathbf{M}$ 上的系统(4),如果 $\operatorname{div} f \equiv 0$ 且 $\mathbf{F}$ 满足李代数秩条件,则系统能控.

注 1　在定理 2,定理 3 和定理 7 中,对于 $\mathbf{M}$ 是紧致黎曼流形的假设是为保证数学表述上的统一,其实质是要求 $\mathbf{M}$ 上度量的存在性和 $\mathbf{M}$ 的有界性.

4　应用实例

考虑欠驱动航天器的姿态控制系统. 为简便起见,假设航天器本体系为主惯量坐标系,惯量阵 $\mathrm{I} = \operatorname{diag}[I_x, I_y, I_z]$,航天器相对惯性系的角速度在本体系中表示为 $\omega = [\omega_x, \omega_y, \omega_z]^{\mathrm{T}}$,执行机构提供的控制力矩 $\mathrm{T} = [T_x, T_y, T_z]^{\mathrm{T}}$. 忽略其他干扰力矩,则该航天器姿态动力学方程为 $\mathrm{I}\dot{\omega} + \omega \times \mathrm{I}\omega = \mathrm{T}$.

假设部分执行机构失效,不失一般性,假设沿 z 轴方向不能提供力矩,即 $T_z = 0$. 同时记

$$r_x = (I_y - I_z)/I_x,\ r_y = (I_z - I_x)/I_y,$$
$$r_z = (I_x - I_y)/I_z,\ u_x = T_x/I_x,\ u_y = T_y/I_y.$$

则有

$$\begin{cases} \dot{\omega}_x = r_x\omega_y\omega_z + u_x, \\ \dot{\omega}_y = r_y\omega_z\omega_x + u_y, \\ \dot{\omega}_z = r_z\omega_x\omega_y. \end{cases} \tag{17}$$

令 $\mathrm{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^{\mathrm{T}}$ 表示航天器本体系绕轨道坐标系旋转的四元数矢量,并令 $\omega_{bo} = [\omega_{box}, \omega_{boy}, \omega_{boz}]^{\mathrm{T}}$ 为航天器本体相对于轨道坐标系的角速度矢量,则航天器的姿态运动学方程可表示为

$$[\dot{q}_0\ \ \dot{q}_1\ \ \dot{q}_2\ \ \dot{q}_3]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{box} \\ \omega_{boy} \\ \omega_{boz} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

令 $\omega_{oi} = [0, \omega_0, 0]^{\mathrm{T}}$ 为航天器轨道角速度矢量,则有 $\omega = \omega_{bo} + \mathrm{R}_{bo}\omega_{oi}$,其中 R_{bo} 表示本体系相对于轨道坐标系的姿态矩阵,且

$$\mathrm{R}_{bo} = \begin{bmatrix} 1-2(q_2^2+q_3^2) & 2(q_1q_2+q_0q_3) & 2(q_1q_3-q_0q_2) \\ 2(q_1q_2-q_0q_3) & 1-2(q_1^2+q_3^2) & 2(q_2q_3+q_0q_1) \\ 2(q_1q_3+q_0q_2) & 2(q_2q_3-q_0q_1) & 1-2(q_1^2+q_2^2) \end{bmatrix}.$$

记 $x = [\omega_x, \omega_y, \omega_z, q_0, q_1, q_2, q_3]^{\mathrm{T}}$,联合式(17)和(18)有如下姿态控制系统的描述:

$$\dot{x} = f(x) + g_x u_x + g_y u_y,\ x \in \mathbf{M}. \tag{19}$$

其中

$$f(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2r_x\omega_y\omega_z \\ 2r_y\omega_x\omega_z \\ 2r_z\omega_x\omega_y \\ -\omega_{box}q_1 - \omega_{boy}q_2 - \omega_{boz}q_3 \\ \omega_{box}q_0 - \omega_{boy}q_3 + \omega_{boz}q_2 \\ \omega_{box}q_3 + \omega_{boy}q_0 - \omega_{boz}q_1 \\ -\omega_{box}q_2 + \omega_{boy}q_1 + \omega_{boz}q_0 \end{bmatrix},$$

$$g_x = [1,0,0,0,0,0,0]^{\mathrm{T}},$$
$$g_y = [0,1,0,0,0,0,0]^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{M} = \mathrm{E} \times \mathrm{S}^3.$$

E 和 S^3 分别表示航天器角速度和姿态四元数约束,一般有如下描述:

$$\mathrm{E} = \left\{\omega \in \mathrm{R}^3 \mid 0 \le \frac{1}{2}\omega^{\mathrm{T}}\mathrm{I}\omega \le C_2\right\},$$

$$\mathrm{S}^3 = \{\mathrm{q} \in \mathrm{R}^4 \mid \mathrm{q}^{\mathrm{T}}\mathrm{q} = 1\}.$$

E 和 S^3 皆为 3 维微分流形,因此 $\mathbf{M}$ 为 6 维微分流形,显然 $\mathbf{M}$ 有界. 容易验证 $\operatorname{div} f = 0$,由定理 7 及注 1,如果 $\mathbf{F} = \{f, g_1, g_2\}$ 满足李代数秩条件,则系统能控. 为此考虑如下李括号:

$$[f, g_x] = \frac{1}{2}[0, -2r_y\omega_z, -2r_z\omega_y,$$
$$q_1, -q_0, -q_3, q_2]^{\mathrm{T}},$$

$$[f, g_y] = \frac{1}{2}[-2r_x\omega_z, 0, -2r_z\omega_x,$$
$$q_2, q_3, -q_0, -q_1]^{\mathrm{T}},$$

$$[[f, g_x], g_y] = [0, 0, r_z, 0, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}},$$

$$[f, [[f, g_x], g_y]] =$$
$$\frac{1}{2}r_z[-2r_x\omega_y, -2r_y\omega_x, 0, q_3, -q_2, q_1, -q_0]^{\mathrm{T}}.$$

记

$$h_1 = [f, g_x],\ h_2 = [f, g_y],$$
$$h_3 = [[f, g_x], g_y],\ h_4 = [f, [[f, g_x], g_y]].$$

当 $r_z \ne 0$ 时,矩阵 $\mathrm{F} = [g_x, g_y, h_1, h_2, h_3, h_4]$ 经初等变换可化为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q_1q_2-q_0q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q_0q_2-q_1q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -q_1q_2 & -q_0q_2 \end{bmatrix}.$$

即 $\operatorname{rank}(F)=6$,则 F 满足李代数秩条件. 这说明当航天器主惯量满足 $I_x \neq I_y$ 时,欠驱动姿态控制系统(19) 仍然能控.

5 结 论

对于一般的仿射非线性系统,文献[17]举例说明李代数秩条件不足以刻画系统的能控特性. 本文通过严格论证表明,对于解析系统,在漂移向量场满足弱泊松稳定性时,李代数秩条件等价于系统的能控性. 当系统定义在紧致黎曼流形上时,各种关于完备向量场的回归特性是彼此等价的,这为系统能控性的验证提供了便利. 特别地,对于一般的仿射非线性系统,可用向量场的散度来刻画系统的保守特性,从而建立一个便于计算,充分但不必要的能控性判据. 利用该判据对欠驱动航天器的姿态控制系统能控性进行分析,结果表明在主惯量坐标系下,当沿 z 轴的控制力矩失效时,如果航天器沿其他两轴的主惯量不相等,则姿态系统仍然能控.

本文的讨论仅限于自治系统,对于非自治的情况还有待进一步研究.

参考文献(References)

[1] Hermann R. On the accessibility problem in control theory [C]. Int Symp on Nonlinear Differential Equations and Nonlinear Mechanics. New York: Academic Press, 1963: 325-332.

[2] Hermann R. Cartan's geometry theory of partial differential equations [J]. Advances in Mathematics, 1965, (1): 265-315.

[3] Haynes G W, Hermes H. Nonlinear controllability via Lie theory[J]. SIAM J on Control, 1970, 8(4): 450-460.

[4] Brockett R W. System theory on group manifolds and coset spaces[J]. SIAM J on Control, 1972, 10(2): 265-284.

[5] Sussmann H J, Jurdjevic V. Controllability of nonlinear systems[J]. J of Differential Equations, 1972, 12(1): 95-116.

[6] Krener A. A generalization of Chow's theorem and the Bang-Bang theorem to nonlinear control problems[J]. SIAM J on Control, 1974, 12(1): 43-52.

[7] Klamka J. On the global controllability of perturbed nonlinear systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1975, 20(1): 170-171.

[8] Van Der Schaft A J. Controllability and observability for affine nonlinear Hamiltonian systems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1982, 27(2): 490-492.

[9] Aeyels D. Local and global controllability for nonlinear systems[J]. Systems & Control Letters, 1984, 5(1): 19-26.

[10] Kaya C Y, Noakes J L. Closed trajectories and global controllability in the plane[J]. IMA J of Mathematical Control & Information, 1997, 14(4): 353-369.

[11] Sun Y M, Guo L. On globally asymptotic controllability of planar affine nonlinear systems[J]. Science in China, 2005, 48(6): 703-712.

[12] Sun Y M, Guo L, Lu Q, et al. Further results on global controllability of affine nonlinear systems[C]. Proc of 25th Chinese Control Conf. Harbin, 2006: 298-301.

[13] Lian K Y, Wang L S, Fu L C. Controllability of spacecraft systems in a central gravitational field[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1994, 39(12): 2426-2441.

[14] Lobry C. Controllability of nonlinear systems on compact manifolds[J]. SIAM J on Control, 1974, 12(1): 1-4.

[15] Jurdjevic V, Kupka I. Control systems subordinated to a group action: Accessibility[J]. J of Differential Equations, 1981, 39(2): 186-211.

[16] Arnold V I. Mathematical methods of classical mechanics[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1989: 69-70.

[17] Cheng D. Global controllability of switched nonlinear systems[C]. Proc of 45th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego, 2006: 3742-3747.