

文章编号: 1001-0920(2008)10-1196-05

## 线性连续重复过程的 $H$ 模型降阶

吴立刚, 胡跃明

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510641)

**摘要:** 研究连续时间线性重复过程的  $H$  模型降阶问题, 目的是设计一个低阶的重复过程来近似原高阶的重复过程, 使得误差在  $H$  性能指标下达到最小. 首先给出误差系统沿通道稳定且满足  $H$  性能指标的充分条件; 然后采用投影定理来解决模型降阶问题. 得到的条件不完全是线性矩阵不等式的形式, 采用锥补线性化算法进行计算求解. 仿真实例证实了该设计方法的有效性.

**关键词:** 线性重复过程; 模型降阶;  $H$  性能; 沿通道稳定; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP13 **文献标识码:** A

## H model reduction for linear differential repetitive processes

WU Li-gang, HU Yue-ming

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510641, China.

Correspondent: WU Li-gang, E-mail: ligangwu@hit.edu.cn)

**Abstract:** This paper investigates  $H$  model reduction problem for linear differential repetitive processes. Our attention is focused on the construction of a reduced-order stable along the pass process, such that the  $H$  gain of the error process between the original process and reduced-order one is less than a prescribed scalar. A sufficient condition to characterize the bound of  $H$  gain of linear differential repetitive processes is presented in terms of linear matrix inequalities (LMIs). And then the projection approach is applied, which casts the model reduction into a sequential minimization problem with LMI constraints by employing the cone complementary linearization (CCL) algorithm. A numerical example shows the effectiveness of the proposed theory.

**Key words:** Linear repetitive processes; Model reduction;  $H$  performance; Stable along the pass; Linear matrix inequality (LMI)

### 1 引言

线性重复过程是一类具有重要实际应用背景的特殊二维线性系统, 在煤矿开采、金属锻造以及学习迭代控制中已有成功的应用<sup>[1]</sup>. 该过程的特性在于它是由一系列的重复动作构成, 每个过程称为一个通道, 而在每个通道上具有一个动态, 该动态运行的时间是有限的, 称为该通道的长度; 在每个通道上产生一个输出, 称为通道剖面向量.

线性重复过程具有二维系统的结构, 但值得注意的是, 目前研究的二维系统在两个独立的方向上都是离散时间的, 且均趋向于无穷大; 而连续线性重复过程在一个方向上是离散的, 在另一个方向上是连续时间的. 这是重复过程与二维系统的本质区别. 近年来, 线性重复过程的研究受到广泛的关注, 文献[2, 3]采用线性矩阵不等式方法研究其稳定性和镇

定问题; [4]研究其动态输出反馈控制问题; [5]探讨了不确定模型的  $H$  控制和保性能控制问题.

模型降阶一直是系统与控制学科的重要问题之一. 实际中往往将物理过程建模成复杂的高阶模型, 这给系统的分析和综合带来很大的困难. 因此希望在没有显著误差的情况下, 能用一个低阶的简单的模型去逼近原系统的模型, 从而使系统的分析和设计变得简单易行. 近年来, 模型降阶问题得到国内外学者的普遍关注<sup>[6-9]</sup>.

随着线性矩阵不等式的发展, 使其成为解决模型降阶问题的一个有效工具<sup>[10]</sup>. 文献[6]首次给出了线性矩阵不等式处理模型降阶的结果; [7-9]使该应用得到进一步发展. 其中: [7]研究了离散时滞系统的  $H$  模型降阶问题; [8]进一步研究了时滞系统的 Hankel 模型降阶问题; [9]研究了时滞二维系统

收稿日期: 2007-07-17; 修回日期: 2007-10-10.

基金项目: 中国博士后科学基金项目(20070420139).

作者简介: 吴立刚(1977—), 男, 江西宜黄人, 博士, 从事时滞系统、鲁棒控制等研究; 胡跃明(1960—), 男, 安徽绩溪人, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统、机器人控制等研究.

的  $H_\infty$  模型降阶问题。

本文研究线性连续重复过程的  $H_\infty$  模型降阶问题,目的是设计一类低阶重复过程模型,去逼近原高阶模型,使得误差在  $H_\infty$  指标下达到最小.首先基于线性矩阵不等式方法,推导了误差过程沿通道稳定且满足  $H_\infty$  性能的充分条件;然后应用投影定理,推导出低阶过程模型的求解条件.所给出的求解条件不完全是线性矩阵不等式形式,采用锥补线性化算法,将原非凸优化问题转化为受线性矩阵不等式约束的非线性最小化问题,便于计算求解.实例仿真进一步证实了本文所提出设计方案的有效性。

### 2 过程描述与问题提出

考虑如下连续线性重复过程:

$$\begin{cases} \dot{x}_{k+1}(t) = Ax_{k+1}(t) + B_0 y_k(t) + Bu_{k+1}(t), \\ y_{k+1}(t) = Cx_{k+1}(t) + D_0 y_k(t) + Du_{k+1}(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中:通道长度为  $\alpha$ ,即  $t \in [0, \alpha]$ ;在第  $k$  个通道上,  $x_k(t) \in \mathbf{R}^n$  为过程状态向量,  $y_k(t) \in \mathbf{R}^m$  为通道剖面向量,  $u_{k+1}(t) \in \mathbf{R}^q$  为外部输入,并假定为能量有界,即  $u_{k+1}(t) \in L_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$ ;  $A, B_0, B, C, D_0, D$  为实常数矩阵.设输出信号为

$$z_{k+1}(t) = Ex_{k+1}(t) + F_0 y_k(t) + Fu_{k+1}(t). \quad (2)$$

其中:  $z_{k+1}(t) \in \mathbf{R}^p$ ;  $E, F_0$  和  $F$  为已知常数矩阵.假定其边界条件均为 0,即  $x_{k+1}(0) = 0, \forall k \geq 0, y_0(t) = 0, \forall 0 \leq t \leq \alpha$ . 则从输入  $u_{k+1}(t)$  到输出  $z_{k+1}(t)$  之间的传递函数为

$$T_{zw}(s, z) \triangleq [E \quad F_0] \begin{bmatrix} sI - A & -B_0 \\ -zC & I - zD_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} + F,$$

并且定义其范数

$$\|T_{zw}(s, z)\|_\infty \triangleq \sup_{0 \leq \omega \leq \infty, -\pi \leq \theta \leq \pi} \|T_{zw}(j\omega, e^{j\theta})\|.$$

首先介绍线性重复过程的稳定性.引入新的稳定概念,即沿通道的稳定。

**定义 1**<sup>[1]</sup> 连续线性重复过程(1)在有限的通道长度内,状态沿通道的稳定性称为沿通道的稳定。

**假设 1** 线性连续重复过程(1)沿通道稳定。

本文的目的是用沿通道稳定的低阶线性连续重复过程

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{k+1}(t) = \hat{A}\hat{x}_{k+1}(t) + \hat{B}_0\hat{y}_k(t) + \hat{B}u_{k+1}(t), \\ \hat{y}_{k+1}(t) = \hat{C}\hat{x}_{k+1}(t) + \hat{D}_0\hat{y}_k(t) + \hat{D}u_{k+1}(t), \end{cases} \quad (3)$$

去逼近原来的高阶线性连续重复过程(1).其中:  $\hat{x}(t) \in \mathbf{R}^s (1 \leq s < n)$  为降阶过程的状态向量;  $\hat{y}(t) \in \mathbf{R}^r (1 \leq r < m)$  为降阶过程的剖面向量;  $\hat{A}, \hat{B}_0, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}_0$  和  $\hat{D}$  为待求的低阶过程(3)的参数矩阵.降阶过程的输出信号为

$$\hat{z}_{k+1}(t) = \hat{E}\hat{x}_{k+1}(t) + \hat{F}_0\hat{y}_k(t) + \hat{F}u_{k+1}(t). \quad (4)$$

其中:  $\hat{z}_{k+1}(t) \in \mathbf{R}^p$ ;  $\hat{E}, \hat{F}_0$  和  $\hat{F}$  为待求常数矩阵.考虑方程(1)~(4),可得如下误差过程:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{k+1}(t) = \tilde{A}\xi_{k+1}(t) + \tilde{B}_0\zeta_k(t) + \tilde{B}u_{k+1}(t), \\ \zeta_{k+1}(t) = \tilde{C}\xi_{k+1}(t) + \tilde{D}_0\zeta_k(t) + \tilde{D}u_{k+1}(t). \end{cases} \quad (5)$$

相应的输出误差为

$$e_{k+1}(t) = \tilde{E}\xi_{k+1}(t) + \tilde{F}_0\zeta_k(t) + \tilde{F}u_{k+1}(t). \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \xi_{k+1}(t) &\triangleq [x_{k+1}^T(t) \quad \hat{x}_{k+1}^T(t)]^T, \\ \zeta_k(t) &\triangleq [y_k^T(t) \quad \hat{y}_k^T(t)]^T, \\ e_{k+1}(t) &\triangleq z_{k+1}(t) - \hat{z}_{k+1}(t), \tilde{A} \triangleq \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \hat{A} \end{bmatrix}, \\ B_0 &\triangleq \begin{bmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & \hat{B}_0 \end{bmatrix}, \tilde{B} \triangleq \begin{bmatrix} B \\ \hat{B} \end{bmatrix}, \tilde{C} \triangleq \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & \hat{C} \end{bmatrix}, \\ \tilde{D}_0 &\triangleq \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & \hat{D}_0 \end{bmatrix}, \tilde{D} \triangleq \begin{bmatrix} D \\ \hat{D} \end{bmatrix}, \tilde{E} \triangleq [E \quad -\hat{E}], \\ \tilde{F}_0 &\triangleq [F_0 \quad -\hat{F}_0], \tilde{F} \triangleq F - \hat{F}. \end{aligned}$$

本文研究的问题可归结为:给定一个沿通道稳定的高阶线性连续重复过程(1),寻找一个沿通道稳定的低阶线性连续重复过程(3),使得误差系统(5)沿通道稳定,且在零边界条件下对于任意非零的  $u_{k+1}(t) \in L_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$ ,有

$$\|e_{k+1}(t)\|_2 < \gamma \|u_{k+1}(t)\|_2, \gamma > 0. \quad (7)$$

对于连续向量  $f_{k+1}(t) \in L_2\{[0, \infty), [0, \infty)\}$ ,定义范数

$$\|f_{k+1}(t)\|_2 \triangleq \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^\alpha f_{k+1}^T(t) f_{k+1}(t) dt}. \quad (8)$$

### 3 主要结论

#### 3.1 $H_\infty$ 性能分析

**定理 1** 误差重复过程(5)沿通道稳定,且具有  $H_\infty$  性能水平  $\gamma > 0$  的充分条件是:存在矩阵  $P > 0$  和  $Q > 0$ ,使得如下线性矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} P\tilde{A} + \tilde{A}^T P & P\tilde{B}_0 & P\tilde{B} & \tilde{C}^T Q & \tilde{E}^T \\ * & -Q & 0 & \tilde{D}_0^T Q & \tilde{F}_0^T \\ * & * & -\gamma^2 I & \tilde{D}^T Q & \tilde{F}^T \\ * & * & * & -Q & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

限于篇幅,证明略。

#### 3.2 降阶模型的求解

**定理 2** 考虑沿通道稳定的线性连续过程(1),存在低阶沿通道稳定的过程(3),使得误差过程(5)沿通道稳定且满足条件(7)的充分条件是:存在矩

阵  $P > 0, L > 0, Q > 0$  和  $R > 0$ , 满足

$$\begin{bmatrix} H_1(\bar{A}L + L\bar{A}^T)H_1^T & H_1\bar{B}_0 & H_1\bar{B} & H_1\bar{L}C^T H_2^T \\ * & -Q & 0 & \bar{D}_0^T H_2^T \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{D}^T H_2^T \\ * & * & * & -H_2 R H_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} H_1(P\bar{A} + \bar{A}^T P)H_1^T & H_1P\bar{B}_0 H_2^T & H_1\bar{C}^T & H_1\bar{E}^T \\ * & -H_2QH_2^T & H_2\bar{D}_0^T & H_2\bar{F}_0^T \\ * & * & -R & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

$$PL = I, QR = I. \quad (12)$$

如果以上条件有解  $(P, L, Q, R)$ , 则降阶过程模型 (3) 的矩阵参数给定为

$$G = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_0 & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D}_0 & \hat{D} \\ \hat{E} & \hat{F}_0 & \hat{F} \end{bmatrix} = -\Pi^{-1}U^T \Delta V^T (V \Delta V^T)^{-1} + \Pi^{-1} \Xi^{1/2} L (V \Delta V^T)^{-1/2},$$

$$\Lambda = (U \Pi^{-1} U^T - W)^{-1} > 0,$$

$$\Xi = \Pi - U^T [\Lambda - \Delta V^T (V \Delta V^T)^{-1} V \Delta] U > 0.$$

其中  $\Pi$  和  $L$  为任意满足  $\Pi > 0$  和  $\|L\| < 1$  的矩阵, 而

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_0 = \begin{bmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{D}_0 = \begin{bmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\bar{E} = [E \ 0], \bar{F}_0 = [F_0 \ 0], H_1 = [I_n \ 0_{n \times s}],$$

$$H_2 = [I_m \ 0_{m \times r}], X_3 = [0 \ 0 \ -I], \bar{F} = F,$$

$$W = \begin{bmatrix} P\bar{A} + \bar{A}^T P & P\bar{B}_0 & P\bar{B} & \bar{C}^T & \bar{E}^T \\ * & -Q & 0 & \bar{D}_0^T & \bar{F}_0^T \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{D}^T & \bar{F}^T \\ * & * & * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix},$$

$$U = [PX_1 \ 0 \ 0 \ X_2 \ X_2]^T, X_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{bmatrix}, V = [Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ 0 \ 0],$$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix}.$$

**证明** 利用 Schur 补, 不等式 (9) 等价于

$$\begin{bmatrix} P\bar{A} + \bar{A}^T P & P\bar{B}_0 & P\bar{B} & \bar{C}^T & \bar{E}^T \\ * & -Q & 0 & \bar{D}_0^T & \bar{F}_0^T \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{D}^T & \bar{F}^T \\ * & * & * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

将式 (5) 中的矩阵  $\tilde{A}, \tilde{B}_0, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}_0, \tilde{D}, \tilde{E}, \tilde{F}_0, \tilde{F}$  写成

$$\tilde{A} = \bar{A} + X_1 G Y_1, \tilde{B}_0 = \bar{B}_0 + X_1 G Y_2,$$

$$\tilde{B} = \bar{B} + X_1 G Y_3, \tilde{C} = \bar{C} + X_2 G Y_1,$$

$$\tilde{D}_0 = \bar{D}_0 + X_2 G Y_2, \tilde{D} = \bar{D} + X_2 G Y_3,$$

$$\tilde{E} = \bar{E} + X_3 G Y_1, \tilde{F}_0 = \bar{F}_0 + X_3 G Y_2,$$

$$\tilde{F} = \bar{F} + X_3 G Y_3.$$

根据上式, 不等式 (13) 可写成

$$W + UGV + (UGV)^T < 0, \quad (14)$$

其中  $W, U$  和  $V$  上面已定义过.  $U$  和  $V$  的直交补选择如下:

$$U^\perp = \begin{bmatrix} H_1 P^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$V^{\perp 1} = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

其中  $H_1$  和  $H_2$  上面已定义过. 根据投影定理<sup>[11]</sup>, 存在矩阵  $G$  满足式 (14) 的充要条件为如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} H_1(\bar{A}P^{-1} + P^{-1}\bar{A}^T)H_1^T & H_1\bar{B}_0 & H_1\bar{B} & H_1P^{-1}\bar{C}^T H_2^T \\ * & -Q & 0 & \bar{D}_0^T H_2^T \\ * & * & -\gamma^2 I & \bar{D}^T H_2^T \\ * & * & * & -H_2Q^{-1}H_2^T \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} H_1(P\bar{A} + \bar{A}^T P)H_1^T & H_1P\bar{B}_0 H_2^T & H_1\bar{C}^T & H_1\bar{E}^T \\ * & -H_2QH_2^T & H_2\bar{D}_0^T & H_2\bar{F}_0^T \\ * & * & -Q^{-1} & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (16)$$

根据式 (12), 可由式 (15) 和 (16) 分别得到式 (10) 和 (11). 定理的第 2 部分可直接由投影定理<sup>[11]</sup> 得出.  $\square$

值得注意的是, 由于定理 2 中存在矩阵等式 (12), 无法直接采用 Matlab 软件包 LMI-Toolbox 来求解. 下面借助于锥补线性化方法<sup>[12]</sup>, 将定理 2 中的非凸可行性求解问题转化为如下受线性矩阵不等式约束的最小化问题:

$$\min [\text{tr}(PL) + \text{tr}(QR)] \text{ 满足式 (10) 和 (11) 且}$$

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & L \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} Q & I \\ I & R \end{bmatrix} \geq 0. \quad (17)$$

如果以上最小化问题的解为  $(n + m + s + r)$ , 即

$$\min [\text{tr}(PL) + \text{tr}(QR)] = n + m + s + r,$$

则定理 2 中的条件可解. 尽管无法保证一定能找到全局最优解, 但这个最小化问题要比原非凸可行性

求解问题容易得多.此外,可采用如下算法求解:

**算法 1**

第 1 步: 寻求一组有效解  $(P^{(0)}, L^{(0)}, Q^{(0)}, R^{(0)})$ , 满足式(10), (11) 和(17), 并设定  $d = 0$ .

第 2 步: 求解最小化问题

$$\min [\text{tr}(P^{(d)}L + PL^{(d)}) + \text{tr}(Q^{(d)}R + QR^{(d)})],$$

满足式(10), (11) 和(17).

第 3 步: 将所求得解  $(P, L, Q, R)$  代入式(15) 和(16), 如果条件满足且

$$|[\text{tr}(P^{(d)}L + PL^{(d)}) + \text{tr}(Q^{(d)}R + QR^{(d)})] - 2(n + s) - 2(m + r)| < \delta,$$

其中  $\delta > 0$  为充分小的实数, 则输出解  $(P, L, Q, R)$ , 并退出.

第 4 步: 如果  $d > N$  ( $N$  为最大允许迭代次数), 则退出.

第 5 步: 令  $d = d + 1, (P^{(d)}, L^{(d)}, Q^{(d)}, R^{(d)}) = (P, L, Q, R)$ , 转入第 2 步.

**4 仿真实例**

考虑线性连续重复过程(1), 已知过程的通道长度  $\alpha = 20$ , 以及如下矩阵参数:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -11 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \end{bmatrix},$$

$$B_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0.5 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 0.5 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, F_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

原过程(1) 沿通道稳定, 本文工作是利用前面提出的  $H_\infty$  模型降阶理论和方法, 找到一个比原过程阶数 ( $n = 4, m = 3$ ) 更低, 且同样是沿通道稳定的降阶过程, 使得误差过程沿通道稳定且满足  $H_\infty$  性能. 得到的不同阶数的解如下:

1) 三阶模型 ( $s = 3, r = 2$ )

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_0 & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D}_0 & \hat{D} \\ \hat{E} & \hat{F}_0 & \hat{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.9600 & 0.5888 & -0.4989 & 1.4415 & 0.2168 & -0.3919 \\ 1.2061 & -10.4505 & -0.7636 & -2.8968 & 1.7421 & -0.4654 \\ -7.4424 & -0.5572 & -9.9673 & 5.9477 & -2.5986 & 0.3832 \\ -0.5678 & -0.4038 & -0.1199 & 0.0713 & -0.0681 & -0.1148 \\ -1.2135 & -0.6823 & 0.0435 & -0.3648 & 0.0842 & 0.4094 \\ 0.9799 & 2.1027 & -0.1573 & 1.6521 & -0.7025 & 0.9939 \\ 1.9157 & 0.9371 & 0.5318 & 4.3920 & -2.4487 & -0.9993 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

2) 二阶模型 ( $s = 2, r = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_0 & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D}_0 & \hat{D} \\ \hat{E} & \hat{F}_0 & \hat{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.7515 & 1.2931 & -1.4269 & 0.5274 \\ 2.7824 & -10.9083 & -0.3996 & 0.5799 \\ 0.5480 & -0.2895 & 0.2313 & 0.6715 \\ -2.3959 & -0.0496 & -0.6849 & 0.9855 \\ 0.6909 & -2.1937 & -2.2538 & -0.9992 \end{bmatrix}, \tag{19}$$

3) 一阶模型 ( $s = 1, r = 1$ )

$$\begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B}_0 & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D}_0 & \hat{D} \\ \hat{E} & \hat{F}_0 & \hat{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7.4358 & 0.9245 & -0.5153 \\ -0.2459 & 0.2110 & 0.4172 \\ 2.5295 & -0.9426 & 0.9822 \\ 1.5491 & -3.6662 & -1.0033 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

针对以上得到的 3 个低阶模型, 表 1 列出了求解时最小可行  $\gamma$  值及与原系统模型之间的  $H_\infty$  误差值. 可以看出, 实际的  $H_\infty$  误差值均小于所保证的  $H_\infty$  性能指标. 图 1 给出了原重复过程、三阶模型(18)、二阶模型(19) 和一阶模型(20) 的幅值响应, 图 2 给出了 3 个降阶模型与原过程模型组成的误差过程的幅值响应. 从图中可以看出, 误差过程的最大幅值响应小于所保证的  $H_\infty$  性能指标, 说明本文的设计方案是有效的.

表 1 低阶模型的逼近性能

降阶模型	保证的 $H_\infty$ 性能	实际的 $H_\infty$ 误差值
三阶模型 (18)	0.0610	0.0522
二阶模型 (19)	0.0950	0.0736
一阶模型 (20)	0.1880	0.1368

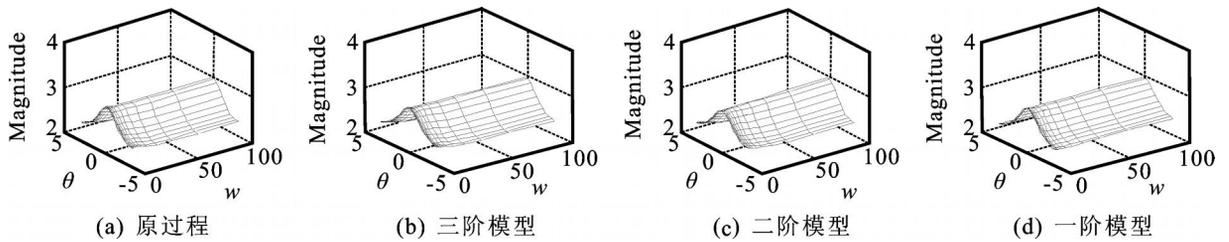


图1 原过程、三阶、二阶和一阶模型的幅值响应

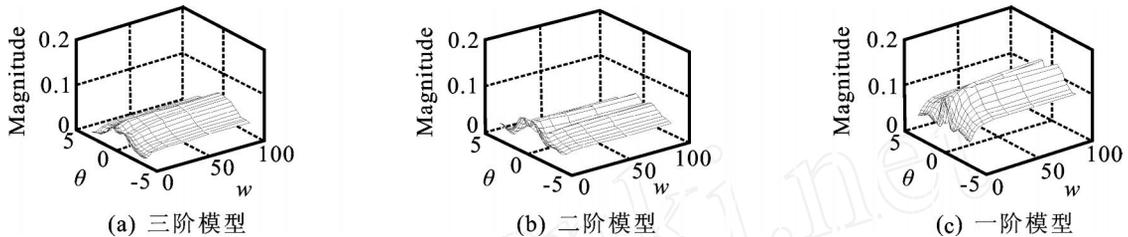


图2 误差过程的幅值响应

## 5 结 论

本文研究线性连续重复过程的  $H$  模型降阶问题,设计出一类低阶的重复过程来近似原高阶的重复过程,使得误差在  $H$  性能指标下达到最小.文中推导了误差系统沿通道稳定且满足  $H$  性能指标的充分条件,并采用投影定理来解决模型降阶问题.考虑到所得的条件不完全是线性矩阵不等式的形式,采用锥补线性化算法进行计算求解.仿真实例证实了该设计方法的有效性.

## 参考文献(References)

- [1] Rogers E, Owens D H. Stability analysis for linear repetitive processes: Lecture notes in control and information sciences [M]. London: Springer-Verlag, 1992.
- [2] Galkowski K, Paszke W, Rogers E, et al. Stability and control of differential linear repetitive processes using an LMI setting[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems — , 2003, 50(9): 662-666.
- [3] Galkowski K, Rogers E, Xu S, et al. LMIs — A fundamental tool in analysis and controller design for discrete linear repetitive processes [J]. IEEE Trans on Circuits and Systems — , 2002, 49(6): 768-778.
- [4] Sulikowski B, Galkowski K, Rogers E, et al. Output feedback control of discrete linear repetitive processes[J]. Automatica, 2004, 40(12): 2167-2173.
- [5] Paszke W, Galkowski K, Rogers E, et al.  $H$  and guaranteed cost control of discrete linear repetitive processes[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 412(2/3): 93-131.
- [6] Grigoriadis K M. Optimal  $H$  model reduction via linear matrix inequalities: Continuous and discrete-time cases [J]. Systems and Control Letters, 1995, 26(5): 321-333.
- [7] Gao H, Lam J, Wang C, et al.  $H$  model reduction for discrete time-delay systems: Delay independent and dependent approaches[J]. Int J of Control, 2004, 77(4): 321-335.
- [8] Gao H, Lam J, Wang C, et al. Hankel norm approximation of linear systems with time varying delay: Continuous and discrete cases[J]. Int J of Control, 2004, 77(17): 1503-1520.
- [9] Wu L, Shi P, Gao H, et al.  $H$  mode reduction for two-dimensional discrete state-delayed systems[J]. IEE Proc — Vision, Image and Signal Processing, 2006, 153(6): 769-784.
- [10] Wu L, Wang Z, Gao H, et al. Robust  $H$  filtering for uncertain two-dimensional discrete systems with state delays[J]. Signal Processing, 2007, 87(9): 2213-2230.
- [11] Grigoriadis K M, Skelton R E. Alternating convex projection methods for covariance control design[J]. Int J of Control, 1994, 60(6): 1083-1106.
- [12] El Ghaoui L, Oustry F, Ait Rami M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(8): 1171-1176.