文章编号: 1001-0920(2008)10-1113-04

三角模糊数互补判断矩阵排序的最小方差法

和媛媛, 周德群, 王 强
(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘 要: 研究偏好信息为三角模糊数互补判断矩阵形式给出的方案排序方法. 根据三角模糊数互补判断矩阵完全一致性的概念, 建立了一个基于最小方差的非线性规划模型. 通过求解该模型, 得到三角模糊数互补判断矩阵的权重向量, 并利用三角模糊数排序公式对决策方案进行排序. 最后通过算例分析表明了所提出的方法是可行而有效的.

关键词: 三角模糊数互补判断矩阵; 完全一致性; 非线性规划模型; 排序
中图分类号: N945.25; O223 **文献标识码**: A

Least variance priority method for triangular fuzzy number complementary judgment matrix

HE Yuan-yuan, ZHOU De-qun, WANG Qiang
(College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: HE Yuan-yuan, E-mail: heyy81@163.com)

Abstract: The priority method of complementary judgment matrix is studied, in which the preference information takes the form of triangular fuzzy number judgment matrix. Based on the concept of complete consistency for triangular fuzzy number complementary judgment matrix, a non-linear programming model is set up based on least variance method. The weight vector of triangular fuzzy number complementary judgment matrix is obtained by solving the model. By using a priority formula of triangular fuzzy numbers, the decision alternatives are ranked. Finally, a numerical example shows the effectiveness of the method.

Key words: Triangular fuzzy number complementary judgment matrix; Complete consistency; Non-linear programming model; Priority

1 引 言

AHP方法作为一种定性分析与定量分析相结合的决策工具,已广泛应用于社会、经济、管理、军事以及工程设计等诸多领域. 由于客观事物的复杂性、不确定性以及人类思维的模糊性,近年来,不确定型决策问题研究已引起人们的极大关注,并取得了较为丰富的成果.

在决策过程中,为了得到方案排序结果,常需要专家对方案进行两两比较,并构造判断矩阵. 目前,判断矩阵的形式有两种:互反判断矩阵[1,2]和互补判断矩阵[3-5]. 其中,互补判断矩阵是一类较为常见的判断矩阵形式. 由于判断的不确定性以及信息不足等因素,专家在构造判断矩阵时,往往只能给出矩阵元素的一个判断范围,如以三角模糊数[6]等模糊形式给出. 关于此类模糊互补判断矩阵的理论研究,有助于人们对模糊判断矩阵排序方法的正确认识和应用,丰富模糊决策分析的理论和方法. 因此,对于这类问题的研究具有重要的理论价值和现实意义.

目前,基于三角模糊数互补判断矩阵的相关理论研究,虽然已取得一些进展[6-10],但在排序理论与方法等方面还存在缺陷和不足. 文献[7]基于三角模糊数可能度的概念,给出一种简便实用的排序方法. 但该方法仿照传统AHP中按行求和归一化法求得方案的排序值,关于三角模糊数互补判断矩阵按行求和归一化法求取排序值的合理性,还有待进一步考证. 文献[8]根据三角模糊数互反判断矩阵与互补判断矩阵之间的相互转化关系,提出三角模糊数互补判断矩阵完全一致性等概念,基于此概念构建非

收稿日期: 2007-07-27; **修回日期**: 2007-10-29.
基金项目: 国家自然科学基金项目(90510010); 教育部博士学科点科研基金项目(20050287026).
作者简介: 和媛媛(1981—),女,山东泰安人,博士生,从事决策分析、系统工程等研究; 周德群(1963—),男,江苏盐城人,教授,博士生导师,从事系统工程、管理科学与工程等研究.

线性规划模型,从而求得排序结果.但该文的完全一致性定义仅从权重角度考虑互反判断矩阵的排序一致性,并未从判断矩阵构造思维的一致性方面考虑其一致性概念.

基于上述两种一致性所考虑角度的不同,本文从构造思维的角度考虑了判断矩阵的一致性定义,根据三角模糊数互补判断矩阵的完全一致性概念,研究该类判断矩阵的排序问题.最后,算例分析表明该排序方法是可行而有效的.

2 相关概念

2.1 互反判断矩阵与互补判断矩阵

在阐述三角模糊数判断矩阵相关概念及性质之前,首先考虑判断矩阵的元素为确定数值时的情形.设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为方案集,且记 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$.专家对决策方案进行两两比较并构造判断矩阵.若判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij} > 0$, $a_{ji} = 1/a_{ij}$, $a_{ii} = 1$, $i, j \in N$,则称 A 为互反判断矩阵.当 $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$, $\forall i, j, k \in N$ 都成立时,$A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为完全一致性互反判断矩阵.若判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 满足 $b_{ij} \geq 0$, $b_{ij} + b_{ji} = 1$, $b_{ii} = 0.5$, $i, j \in N$,则称 B 为互补判断矩阵.当 $b_{ik}b_{kj}b_{ji} = b_{ki}b_{jk}b_{ij}$, $\forall i, j, k \in N$ 都成立时,$B = (b_{ij})_{n\times n}$ 为完全一致性互补判断矩阵.

设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为互反判断矩阵,则通过转换公式可得互补判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$.若 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为完全一致性互反判断矩阵,则通过 $b_{ij} = a_{ij}/(a_{ij} + 1)$ 转换得到的判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 是完全一致性互补判断矩阵.

设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 是互反判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的排序向量.其中:$\omega_i > 0$, $i \in N$, $\sum_{i=1}^{n}\omega_i = 1$.当 A 为完全一致性互反判断矩阵时,则有 $a_{ij} = \omega_i/\omega_j$, $i, j \in N$.设 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$ 是互补判断矩阵 B 的排序向量.其中:$v_i > 0$, $i \in N$, $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$.则当 B 是完全一致性互补判断矩阵时,有 $b_{ij} = v_i/(v_i + v_j)$, $i, j \in N$.

目前,有关三角模糊数判断矩阵的研究大多建立在上述互反或互补判断矩阵已有的理论基础上[7,11].然而,由于模糊数的特殊性及其运算的复杂性,三角模糊数判断矩阵具有不同于经典判断矩阵的相关性质与方法.

2.2 三角模糊数判断矩阵

定义 1[6] 若 $a = (a_l, a_m, a_u)$, $0 < a_l \leq a_m \leq a_u$,且 a_l 和 a_u 分别为 a 所支撑的上界和下界,而 a_m 为 a 的中值,则称 a 为一个三角模糊数,其隶属函数可表示为

$$\mu_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x - a_l}{a_m - a_l}, & a_l \leq x \leq a_m; \\ \dfrac{x - a_u}{a_m - a_u}, & a_m \leq x \leq a_u; \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

由于三角模糊数的隶属函数为定义在凸集上的普通线性函数,这里不加证明地给出有关三角模糊数的一些运算规则[10].设 $a = (a_l, a_m, a_u)$, $b = (b_l, b_m, b_u)$,则

$$\begin{aligned} a \oplus b &= (a_l, a_m, a_u) \oplus (b_l, b_m, b_u) = \\ &\quad (a_l + b_l, a_m + b_m, a_u + b_u), \\ a \odot b &= (a_l, a_m, a_u) \odot (b_l, b_m, b_u) \approx \\ &\quad (a_l b_l, a_m b_m, a_u b_u), \\ \lambda \odot a &= (\lambda, \lambda, \lambda) \odot (a_l, a_m, a_u) = \\ &\quad (\lambda a_l, \lambda a_m, \lambda a_u), \\ \frac{1}{a} &\approx \left(\frac{1}{a_u}, \frac{1}{a_m}, \frac{1}{a_l}\right). \end{aligned}$$

定义 2[8] 若三角模糊数矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 中的元素满足 $a_{ij} = (a_{lij}, a_{mij}, a_{uij})$, $a_{ji} = (a_{lji}, a_{mji}, a_{uji})$,且 $a_{lij}a_{uji} = a_{mij}a_{mji} = a_{uij}a_{lji}$, $a_{uij} \geq a_{mij} \geq a_{lij} > 0$, $i, j \in N$,则称矩阵 A 是三角模糊数互反判断矩阵.

定义 3[9] 设三角模糊数互反判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,若有 $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$, $i, j \in N$ 成立,则称 A 是三角模糊数一致性互反判断矩阵.

定义 4[11] 设判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$.其中:$b_{ij} = (b_{lij}, b_{mij}, b_{uij})$, $b_{ji} = (b_{lji}, b_{mji}, b_{uji})$.若 $b_{lij} + b_{uji} = b_{mij} + b_{mji} = b_{uij} + b_{lji} = 1$, $b_{uij} \geq b_{mij} \geq b_{lij} \geq 0$, $i, j \in N$,则称矩阵 B 是三角模糊数互补判断矩阵.

定义 5[11] 设 $B = (b_{ij})_{n\times n}$ 是三角模糊数互补判断矩阵,称 B 是三角模糊数一致性互补判断矩阵,若 $b_{ik}b_{kj}b_{ji} = b_{ki}b_{jk}b_{ij}$, $\forall i, j, k \in N$.

由此可见,三角模糊数判断矩阵的类型及其一致性概念不只一种.对于不同类型的三角模糊数判断矩阵,其一致性的研究与排序方法是不同的.设 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)^{\mathrm{T}}$ 和 $v = (v_1, v_2, \cdots, v_n)^{\mathrm{T}}$ 分别是三角模糊数互反判断矩阵 A 与互补判断矩阵 B 的排序向量,其中分量 $\omega_i = (\omega_{li}, \omega_{mi}, \omega_{ui})$, $v_i = (v_{li}, v_{mi}, v_{ui})$.对于三角模糊数互反判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$,文献[8]所给出的矩阵元素与排序向量的关系式 $a_{ij} = \omega_i/\omega_j$ $(i, j \in N)$,显然不满足等式 $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$.因此,对于三角模糊数互补判断矩阵 $B = (b_{ij})_{n\times n}$,基于互反判断矩阵与互补判断矩阵之间的转化公式所得到的关系式[8] $b_{ij} = 1/(1 + v_j/v_i)$ 亦不满足 $b_{ik}b_{kj}b_{ji} = b_{ki}b_{jk}b_{ij}$ $(i, j, k \in N)$.

综上所述,文献[8]从权重角度考虑了三角模糊数互反判断矩阵的一致性,然而当 $a_{ij}=\omega_i/\omega_j$ 时,互反判断矩阵并不满足构造思维一致性的定义(即文献[9]的一致性概念).由此可知,对于三角模糊数判断矩阵而言,从权重角度和构造思维一致性两个不同方面分别给出的一致性概念是完全不同的.本文基于构造思维的一致性定义,讨论三角模糊数互补判断矩阵的排序方法.

3　最小方差排序法

对于三角模糊数互补判断矩阵 $B=(b_{ij})_{n\times n}$,其中 $b_{ij}=(b_{lij},b_{mij},b_{uij})$.设 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$ 是判断矩阵 B 的排序向量,其中分量 $v_i=(v_{li},v_{mi},v_{ui})$,$i\in N$,则当 B 是三角模糊数一致性互补判断矩阵时,有 $b_{ij}=v_i/(v_i+v_j)$,$i,j\in N$,即

$$(b_{lij},b_{mij},b_{uij})=\frac{(v_{li},v_{mi},v_{ui})}{(v_{li},v_{mi},v_{ui})+(v_{lj},v_{mj},v_{uj})}=\frac{(v_{li},v_{mi},v_{ui})}{(v_{li}+v_{lj},v_{mi}+v_{mj},v_{ui}+v_{uj})}=\left(\frac{v_{li}}{v_{ui}+v_{uj}},\frac{v_{mi}}{v_{mi}+v_{mj}},\frac{v_{ui}}{v_{li}+v_{lj}}\right),\ i,j\in N.$$

故有

$$b_{lij}=\frac{v_{li}}{v_{ui}+v_{uj}},\quad b_{mij}=\frac{v_{mi}}{v_{mi}+v_{mj}},\quad b_{uij}=\frac{v_{ui}}{v_{li}+v_{lj}},\ i,j\in N.$$

从而可得

$$v_{li}=b_{lij}(v_{ui}+v_{uj}),\quad v_{mi}=b_{mij}(v_{mi}+v_{mj}),\quad v_{ui}=b_{uij}(v_{li}+v_{lj}),\ i,j\in N.\tag{1}$$

然而,由于决策者在实际决策过程中所给出的三角模糊数互补判断矩阵往往不具有一致性,式(1)一般不成立.为此引入偏差函数

$$f_{lij}=[b_{lij}(v_{ui}+v_{uj})-v_{li}]^2,$$
$$f_{mij}=[b_{mij}(v_{mi}+v_{mj})-v_{mi}]^2,$$
$$f_{uij}=[b_{uij}(v_{li}+v_{lj})-v_{ui}]^2.$$

显然,为了得到合理的排序向量 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$,上述偏差函数总是越小越好,因此建立下列多目标优化模型:

$$\begin{aligned}&\min f_{lij}=[b_{lij}(v_{ui}+v_{uj})-v_{li}]^2,\\&\min f_{mij}=[b_{mij}(v_{mi}+v_{mj})-v_{mi}]^2,\\&\min f_{uij}=[b_{uij}(v_{li}+v_{lj})-v_{ui}]^2,\\&0<v_{li}\le v_{mi}\le v_{ui}\le 1,\\&0<\sum_{i=1}^{n}v_{li}\le 1\le\sum_{i=1}^{n}v_{ui}.\end{aligned}$$

为了求解该优化模型,每个目标函数希望达到的期望值均为 0,因此可建立下列非线性规划模型:

$$\begin{aligned}\min J=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}&[b_{lij}(v_{ui}+v_{uj})-v_{li}]^2+\\&[b_{mij}(v_{mi}+v_{mj})-v_{mi}]^2+\\&[b_{uij}(v_{li}+v_{lj})-v_{ui}]^2,\\\text{s.t. }&0<v_{li}\le v_{mi}\le v_{ui}\le 1,\\&0<\sum_{i=1}^{n}v_{li}\le 1\le\sum_{i=1}^{n}v_{ui},\ i\in N.\end{aligned}\tag{2}$$

通过求解该模型,即可得到三角模糊数互补判断矩阵 B 的排序向量 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_n)^{\mathrm{T}}$.为了最终对方案进行排序,利用下式[12]计算三角模糊数 $v_i(i\in N)$ 的期望值:

$$v_i^{(\alpha)}=\frac{1}{2}[(1-\alpha)v_{li}+v_{mi}+\alpha v_{ui}],\quad 0\le\alpha\le 1,\ i\in N,\tag{3}$$

α 值的选择取决于决策者的风险态度.当 $\alpha>0.5$ 时,称决策者是追求风险的;当 $\alpha=0.5$ 时,称决策者是风险中立的;当 $\alpha<0.5$ 时,称决策者是厌恶风险的.从而由 $v_i^{(\alpha)}(i\in N)$ 值可得相应方案排序结果.

4　算例分析

设某决策问题有 4 个备选决策方案 x_1,x_2,x_3,x_4,决策者针对方案集合 $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 给出的三角模糊数互补判断矩阵为

$$B=\begin{bmatrix}(0.5,0.5,0.5)&(0.3,0.5,0.6)&(0.6,0.7,0.9)&(0.5,0.6,0.8)\\(0.4,0.5,0.7)&(0.5,0.5,0.5)&(0.4,0.6,0.8)&(0.5,0.7,0.9)\\(0.1,0.3,0.4)&(0.2,0.4,0.6)&(0.5,0.5,0.5)&(0.2,0.4,0.7)\\(0.2,0.4,0.5)&(0.1,0.6,0.8)&(0.3,0.6,0.8)&(0.5,0.5,0.5)\end{bmatrix}.$$

根据模型(2),利用软件 Lingo 求解,可得矩阵 B 的三角模糊数权重向量为

$$v_1=(v_{l1},v_{m1},v_{u1})=(0.214,0.331,0.495),$$
$$v_2=(v_{l2},v_{m2},v_{u2})=(0.246,0.282,0.554),$$
$$v_3=(v_{l3},v_{m3},v_{u3})=(0.031,0.163,0.362),$$
$$v_4=(v_{l4},v_{m4},v_{u4})=(0.061,0.224,0.400).$$

利用式(3)可得

$$v_1^{(\alpha)}=0.273+0.141\alpha,\quad v_2^{(\alpha)}=0.264+0.154\alpha,$$
$$v_3^{(\alpha)}=0.097+0.166\alpha,\quad v_4^{(\alpha)}=0.143+0.170\alpha$$

显然,对于任意 $0\le\alpha\le 1$,均有 $v_1^{(\alpha)}>v_4^{(\alpha)}>v_3^{(\alpha)}$ 和 $v_2^{(\alpha)}>v_4^{(\alpha)}>v_3^{(\alpha)}$.当 $0\le\alpha\le 0.630$ 时,有 $v_1^{(\alpha)}\ge v_2^{(\alpha)}$.因此有:1) 若 $0\le\alpha\le 0.630$,则有 $v_1^{(\alpha)}>v_2^{(\alpha)}>v_4^{(\alpha)}>v_3^{(\alpha)}$,相应方案的排序结果为 $x_1\succ x_2\succ x_4\succ x_3$;2) 若 $\alpha=0.630$,则有 $v_1^{(\alpha)}=v_2^{(\alpha)}>v_4^{(\alpha)}>v_3^{(\alpha)}$,相应的方案排序结果为 $x_1\succ x_2\succ x_4\succ x_3$;3) 若 $0.630<\alpha\le 1$,则有 $v_2^{(\alpha)}>v_1^{(\alpha)}>v_4^{(\alpha)}>v_3^{(\alpha)}$,相应方案的排序结果为 $x_2\succ x_1\succ x_4\succ x_3$.

由以上结果可知,方案的排序结果受决策者风

险态度的影响.

5 结 论

本文针对偏好信息以三角模糊数给出的互补判断矩阵,从构造思维的角度考虑了判断矩阵的一致性定义.进而根据三角模糊数互补判断矩阵的完全一致性概念,建立了基于最小方差的非线性规划模型.通过求解该模型讨论了三角模糊数互补判断矩阵的排序问题.算例分析表明了该排序方法是可行而有效的.

参考文献(References)

[1] Satty T L. The analytic herarchy process [M]. New York: Mc Graw-Hill, 1980.

[2] Xu Z S, Wei C P. A consistency improving method in the analytic hierarchy process [J]. European J of Operational Research, 1999, 116(2): 443-449.

[3] Orlovsky S A. Decision-making with a fuzzy preference relation[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1978, 1(3): 155-167.

[4] Kacprzyk J. Grouup decision making with a fuzzy linguistic majority[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 18(2): 105-118.

[5] Chiclana F, Herrera F, Herrera Viedma E, et al. A classification method of alternatives for multiple preference ordering criteria based on fuzzy majority[J]. J of Fuzzy Mathematics, 1996, 4(4): 128-143.

[6] Van Laarhoven P J M, Pedrycz W. A fuzzy extension of satty's priority theory[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1983, 11(1): 229-241.

[7] 姜艳萍, 樊治平. 三角模糊数互补判断矩阵排序的一种实用方法[J]. 系统工程, 2002, 20(2): 89-92.
(Jiang Y P, Fan Z P. A practical ranking method for reciprocal judgment matrix with triangular fuzzy numbers[J]. Systems Engineering, 2002, 20(2): 89-92.)

[8] 巩在武, 刘思峰. 三角模糊数互补判断矩阵的一致性及其排序研究[J]. 控制与决策, 2006, 21(8): 903-907.
(Gong Z W, Liu S F. Consistency and priority of triangular fuzzy number complementary judgment matrix [J]. Control and Decision, 2006, 21(8): 903-907.)

[9] Buckley J J. Fuzzy hierarchy analysis[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1985, 17(3): 233-247.

[10] Chang D Y. Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP [J]. European J of Operational Research, 1996, 95(3): 649-655.

[11] 徐泽水. 三角模糊数互补判断矩阵排序研究[J]. 系统工程学报, 2004, 19(1): 85-88.
(Xu Z S. On priority method of triangular fuzzy number complementary judgment matrix [J]. J of Systems Engineering, 2004, 19(1): 85-88.)

[12] Liou T S, Wang M J J. Ranking fuzzy numbers with integral value[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1992, 50(3): 247-255.

(上接第 1112 页)

参考文献(References)

[1] Daw C S, Finney C E A, Tracy E R. A review of symbolic analysis of experimental data [J]. Review of Scientific Instruments, 2003, 74 (2): 915-930.

[2] Veenman C J, Reinders M J T, Bolt E M, et al. A maximum variance cluster algorithm[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2002, 24 (9): 1273-1280.

[3] Chau T, Wong A K C. Pattern discovery by residual analysis and recursive partitioning [J]. IEEE Trans on Knowledge Data Engineering, 1999, 11(6): 833-852.

[4] Kakizawa Y, Shumway R H, Taniguchi N. Discrimination and clustering for multivariate time series [J]. J of American Statistical Assoc, 1999, 93(441): 328-340.

[5] Rajagopalan V, Ray A. Wavelet-based space partitioning for symbolic time series analysis[C]. Proc of IEEE Conf on CDC and ECC. Seville, 2005: 5245-5250.

[6] Kennel M B, Buhl M. Estimating good discrete partitions form observed data: Symbolic false nearest neighbors[J]. Physical Review Letters, 2003, 91(8): 84-102.

[7] Lin J, Keogh E, Lonardi S, et al. A symbolic representation of time series, with implications for streaming algorithms [C]. Proc of the 8th ACM SIGMOD Workshop on Research Issues in Data Mining and Knowledge Discovery. San Diego, 2003.

[8] Lkhagva B, Suzuki Y, Kawagoe K. Extended SAX: Extension of symbolic aggregate approximation for financial time series data representation[C]. DEWS2006 Int Sessions Program. 4A-i8.

[9] Keogh E, Chakrabarti K, Pazzani M. Locally adaptive dimensionality reduction for indexing large time series databases [J]. Proc of ACM SIGMOD Conf on Management of Data, 2001, 5(21-24): 151-162.

[10] Keogh E, Chakrabarti K, Pazzani M, et al. Dimensionality reduction for fast similarity search in large time series databases[J]. J of Knowledge and Information Systems, 2001, 3: 263-286.

[11] Jessica Lin, Eamonn Keogh, Li Wei, et al. Experiencing SAX: A novel symbolic representation of time series[J]. DMKD J, 2007, 15(2): 107-144.

[12] Keogh E, Lin J, Fu A. Hot SAX: Efficiently finding the most unusual time series subsequence[C]. Proc of the 5th IEEE Int Conf on Data Mining. 2005: 226-233.