

文章编号: 1001-0920(2008)11-1258-05

基于能量的 Acrobot 动态伺服控制

张晓华, 程红太, 赵旖旎

(哈尔滨工业大学 电气工程及自动化学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 研究了 Acrobot 垂直平面欠驱动机械臂的动态伺服控制问题. 动态伺服控制不同于定点控制和轨迹跟踪控制, 而是利用欠驱动系统中存在的周期轨道特性, 实现对轨迹的动态跟踪. 首先通过对比单摆运动规律寻找到周期轨道所满足的条件; 然后利用 Lyapunov 稳定性理论设计反馈控制律, 并给出控制律存在的一系列条件; 最后分析了系统中存在的奇点及其对收敛性的影响. 仿真实验表明了所设计的控制器是有效的.

关键词: Acrobot; 欠驱动; 动态伺服控制; Lyapunov 稳定性理论

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Energy based dynamical servo control of the Acrobot

ZHANG Xiaohua, CHENG Hongtai, ZHAO Yini

(School of Electrical Engineering and Automation, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China.

Correspondent: CHENG Hongtai, E-mail: redsun_cheng@163.com)

Abstract: The dynamical servo control problem of a vertical planar underactuated manipulator Acrobot is studied in this paper. Different from point control and trajectory tracking control, dynamical servo control realizes periodic dynamical tracking of a given trajectory. Firstly, a condition which the periodical trajectory meets is found by comparing with the motion of the single pendulum. Then a feedback control law is designed by using the Lyapunov stability theory, and law existing conditions are also given. Finally, the singular point in the closed loop system and their affection to the system's convergence ability are analyzed. The simulation results show the effectiveness of the designed control law.

Key words: Acrobot; Underactuated; Dynamical servo control; Lyapunov stability theory

1 引言

Acrobot 是一个垂直平面两杆机械装置, 由一根连杆和一根摆杆组成, 摆杆连接有一驱动输入, 连杆绕肩部自由转动. 它具有两个自由度却只有一个控制输入, 是一个典型的欠驱动机械系统.

Acrobot 有 4 个平衡点, 其中比较典型的是垂直向下和垂直向上 2 个, 前者是稳定的而后者是不稳定的. 以 Acrobot 为对象, 人们展开了一系列研究工作. 最早研究的是不稳定平衡点的镇定问题^[1,2]以及设定点问题^[3], 然后为了使系统可以自垂直向下平衡点摆动到垂直向上平衡点, 研究了上摆控制问题^[4-6]. 在许多研究中, 这两种控制问题是结合在一起的^[4,7,8]. 另外也有学者研究了轨迹跟踪控制问题^[9], 轨迹由一输出方程定义, 通过控制输出变量来实现轨迹的跟踪.

针对欠驱动系统的特点, 本文提出一种运动控制问题——动态伺服控制问题. 它所针对的不是特定点的镇定或者特定轨迹的跟踪, 而是任意点和任意轨迹的动态跟踪. 它不仅适用于 Acrobot 对象, 类似的问题也存在于球棒系统、直线倒立摆等系统中. 欠驱动系统动态伺服控制研究是十分有意义的, 它使得欠驱动系统可以象全驱动系统一样, 达到构形空间中任一点, 或者沿着某个轨迹运动, 从而扩展其应用领域.

2 Acrobot 动力学模型

Acrobot 结构如图 1 所示, 各量意义分别是: m_1 和 m_2 是连杆及摆杆质量, l_1 和 l_2 是连杆及摆杆长度, l_{c1} 和 l_{c2} 是连杆及摆杆质心距.

利用 Lagrange 方程建立系统动力学模型

$$d_{11} \ddot{q}_1 + d_{12} \ddot{q}_2 + h_1 + \phi = 0,$$

收稿日期: 2007-09-03; 修回日期: 2007-10-29.

作者简介: 张晓华(1961—), 男, 哈尔滨人, 教授, 博士生导师, 从事智能机器人与运动控制、机器视觉与自主控制等研究; 程红太(1985—), 男, 河南漯河人, 博士生, 从事非线性控制、机器人控制的研究.

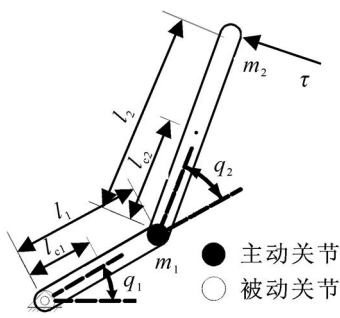


图 1 Acrobot 结构示意图

$$d_{21} \ddot{q}_1 + d_{22} \ddot{q}_2 + h_2 + \phi_2 = \tau \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} d_{11} &= I_1 + m_1 l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + I_2, \\ d_{12} &= d_{21} = m_2 l_1 l_{c2} \cos q_2, \\ d_{22} &= I_2 + m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ h_1 &= -m_1 g l_{c1} \sin q_1 - m_2 g l_1 \sin(q_1 + q_2), \\ h_2 &= -m_2 g l_{c2} \sin q_2, \\ \phi_1 &= m_1 g l_{c1} \cos q_1 + m_2 g l_1 \cos(q_1 + q_2), \\ \phi_2 &= m_2 g l_{c2} \cos q_2. \end{aligned}$$

为摆杆输入力矩, l_1 和 l_2 为连杆及摆杆绕质心转动惯量. 系统总机械能表达式为

$$E = 0.5 \dot{q}^T M(q) \dot{q} + m_1 g l_{c1} \sin q_1 + m_2 g l_1 \sin(q_1 + q_2) \quad (2)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}, q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \dot{E} = \dot{q}_2 \tau$$

3 动态伺服及轨道方程

定义 1 对于系统 $\dot{x} = f(x, u), x(t_0) = x_0$, 在控制作用下, 对于任意给定轨迹 $x_d(t)$ 及允许误差 ϵ , 若 $\exists T_0$ 使得 $t > T_0$ 时有 $|x(t) - x_d(t)| < \epsilon$ 成立, 则称其为伺服轨迹跟踪; 若 $\exists T_0$ 及 $t_i > T_0 (i = 1, 2, \dots)$ 使得 $|x(t_i) - x_d(t_i)| < \epsilon$, 则称其为动态伺服轨迹跟踪.

考虑到欠驱动系统的特性, 将伺服轨迹跟踪定义中以轨迹 $x_d(t)$ 为约束弱化为以其上离散点 $x_d(t_i)$ 为约束. 因此动态伺服控制的目标之一是, 系统可以在某一时刻达到给定点附近可接受范围内, 这里强调时刻而非时刻之后, 是因为对于欠驱动系统并非任意点都可以实现完全镇定. 另外由于相平面中存在极限环, 对于未处于平衡态的欠驱动系统, 系统中存在着周期运动, 因此动态伺服的另一个目标是系统可以周期性地到达给定位置. 前者称为可达性, 后者称为可重复性. 下面给出动态伺服控制定义.

定义 2 对于系统 $\dot{x} = f(x, u), x(t_0) = x_0$, 在控制输入 $u(t)$ 的作用下, 对于任意给定目标 x_d 及目

标误差 $\epsilon, \exists t_1, t_2, \dots$, 使得 $|x(t_i) - x_d| < \epsilon, i = 1, 2, \dots$, 称该控制为动态伺服控制.

这里假设 $t_{i+1} - t_i = T, i = 1, 2, \dots$, 即系统每隔 T 时间就会运动到目标位置 x_d 附近. 从这种运动规律容易联想到单摆的运动. 在一定高度将其释放, 单摆会摆动, 如果不考虑能量损失, 则它会周期性地摆动到初始释放高度.

类似地, 可以发现在 Acrobot 中, 当 $\dot{q}_2 = 0$ 时, 系统能量和两杆夹角不再变化, 从重心(也可理解为末端) 看其行为与单杆摆相同, 系统会沿着一个圆形周期轨道不断摆动, 轨道半径由 q_2 决定, 轨道最高点由初始能量 E 决定. 将目标点取为最高点 $[q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2] = [q_{1d}, q_{2d}, 0, 0]$. 系统输出方程选取为 $y = [E, q_2]^T$, 则周期轨道可描述为

$$y = [E_d, q_{2d}]^T \quad (3)$$

其中 $E_d = m_1 g l_{c1} \sin q_{1d} + m_2 g l_1 \sin(q_{1d} + q_{2d})$.

周期轨道沿着给定轨迹调整, 只需通过控制使系统收敛到周期轨道, 即可实现动态伺服轨迹跟踪.

4 控制器设计

要使系统收敛至周期轨道(3), 需要对 E 和 q_2 进行控制. 构造如下形式的 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} k_E e_E^2 + \frac{1}{2} k_D \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} k_P e_{q_2}^2 \quad (4)$$

其中: $e_E = E - E_d, e_{q_2} = q_2 - q_{2d}, k_E, k_D, k_P$ 为正常数.

4.1 反馈控制律设计

记

$$\begin{aligned} \lambda &= d_{11} d_{22} - d_{12} d_{21} > 0, \quad \mu = d_{11} / \lambda > 0, \\ \eta &= \min \left\{ \frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda - (d_{12} d_{21})^2} \right\} > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

E_{top} 为垂直向上时系统所具有的势能.

结论 1 对于系统(1), 当满足条件

$$k_D > 2 k_E E_{top} / \eta \quad (6)$$

时, 在反馈控制律

$$\begin{aligned} \tau &= -k_V \dot{q}_2 - k_P e_{q_2} - \frac{k_D}{\lambda} [d_{21} (h_1 + \phi_1) - d_{11} (h_2 + \phi_2)] \\ &= \frac{-k_V \dot{q}_2 - k_P e_{q_2} - \frac{k_D}{\lambda} [d_{21} (h_1 + \phi_1) - d_{11} (h_2 + \phi_2)]}{k_E e_E + k_D d_{11} / \lambda} \end{aligned} \quad (7)$$

的作用下, Lyapunov 函数(4) 收敛, 对应状态收敛至

$$e_E = 0, \dot{q}_2 = 0; e_{q_2} = 0. \quad (8)$$

证明 将式(4) 对时间求导可得

$$\dot{V} = \dot{q}_2 (k_E e_E + k_D \dot{q}_2 + k_P e_{q_2}). \quad (9)$$

显然 V 为正定函数, 若有

$$k_E e_E + k_D \dot{q}_2 + k_P e_{q_2} = -k_V \dot{q}_2, \quad (10)$$

则有 $\dot{V} = -k_V \dot{q}_2^2$ 成立. 由 Lyapunov 理论可知, 系统必收敛. 由式(1) 可求得

$$\ddot{q} = [d_{11} + d_{21}(h_1 + \phi) - d_{11}(h_2 + \phi)] / \quad (11)$$

代入式(10)有

$$(k_{EE} + k_D d_{11} /) = -k_V \dot{q}_2 - k_P e_{q_2} - \frac{k_D}{d_{11}} [h_{21}(h_1 + \phi) - d_{11}(h_2 + \phi)].$$

若有 $k_{EE} + k_D = 0$, 则式(7)成立.

因为 $E_d \in [-E_{top}, E_{top}]$, 若式(4)收敛则有 $E \in [-E_{top}, E_{top}]$, 所以 $e_E \in [-2E_{top}, 2E_{top}]$.

为使得控制律非奇异, 只须满足

$$k_{EE} + k_D > 0 \Rightarrow \min(k_{EE} + k_D) > 0 \Leftrightarrow -2k_E E_{top} + k_D > 0 \Leftrightarrow k_D > 2k_E E_{top}.$$

因此, 在式(6)成立的条件下, 反馈控制律(7)非奇异, 系统(1)在式(7)的作用下收敛. 当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $\dot{v} = 0 \Rightarrow \dot{q}_2 = 0$, 并有式(8)成立.

4.2 终值分析

在控制律(7)的作用下, 系统最终会达到稳定状态, 误差变量会收敛到2个常数, 但并不一定收敛到零, 下面对这2种情况进行讨论.

(1) $e_E = 0$

当 $t \rightarrow \infty$ 时有 $e_E = e_E^* = 0$, 另由式(8)可知, $\ddot{q} = 0, \dot{q}_2 = 0$. 代入式(10)可得

$$e_{q_2} = e_{q_2}^* = 0. \quad (12)$$

这种情况是所期望的, 下面分析此时的系统行为.

稳态时有 $e_{q_2}^* = 0$, 但 q_1 的状态仍然没有确定, 假设 $\dot{q}_1 = 0, q_1 = q_1^*$, 代入式(1)有

$$\begin{aligned} 1 g \cos q_1 + 5 g \cos(q_1 + q_{2d}) &= 0, \\ 5 g \cos(q_1 + q_{2d}) &= -1 g \cos q_1. \end{aligned} \quad (13)$$

另外, 由

$$e_E^* = 4 g (\sin q_1^* - \sin q_{1d}) + 5 g (\sin(q_1^* + q_{2d}) - \sin(q_{1d} + q_{2d})) = 0 \Rightarrow q_1^* = q_{1d},$$

代入式(13)有

$$1 g \cos q_{1d} + 5 g \cos(q_{1d} + q_{2d}) = 0. \quad (14)$$

显然, 式(14)并不是对于任意 q_{1d} 均成立的, 事实上, 只对重心位于中垂线上的状态成立. 这里假定目标位置不包括这些点, 则式中存在矛盾, 故 $\dot{q}_1 \neq 0$. 稳态时系统仍然运动, 此时有

$$d_{11} \ddot{q}_1 + 4 g \cos q_1 + 5 g \cos(q_1 + q_{2d}) = 0, \quad (15)$$

$$d_{21} \ddot{q}_1 + 3 \dot{q}_1^2 \sin q_{2d} + 5 g \cos(q_1 + q_{2d}) = 0. \quad (16)$$

式(15)化简可得

$$d_{11} \ddot{q}_1 = -\sqrt{A^2 + B^2} \cos(q_1 + \phi). \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} A &= -4 g - 5 g \cos q_{2d}, \quad B = 5 g \sin q_{2d}, \\ \phi &= \arctan A/B. \end{aligned}$$

可见稳定时, 系统状态并非静止, q_1 的运动轨迹满足单摆方程, 它按照单摆运动规律作周期运动.

(2) $e_E^* \neq 0$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 由式(8)可知, $\ddot{q} = 0, \dot{q}_2 = 0$. 式(8)代入式(10)可得

$$k_{EE} e_E^* + k_P e_{q_2}^* = 0. \quad (18)$$

这种情形是应该避免的, 下面分析此时的系统行为.

由式(18)可知稳态时应有

$$e_E^* = \text{const}, \quad e_{q_2}^* = \text{const}, \quad \dot{q}_1 = \text{const}.$$

q_1 未定, 假设 $\dot{q}_1^* \neq 0$. 将稳态终值代入式(1)有

$$\begin{aligned} -\frac{d_{11}}{d_{11}} (4 g \cos q_1 + 5 g \cos(q_1 + q_2^*)) + \\ 3 \dot{q}_1^2 \sin q_2^* + 5 g \cos(q_1 + q_2^*) &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

将式(19)对时间求导有

$$\begin{aligned} A \sin q_1 - B \cos q_1 &= 0, \\ A &= 2 \dot{q}_1^2 + 2 \dot{q}_1 \dot{q}_2^* + (3 \dot{q}_1^2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2^*) \cos q_2^* - 3 \dot{q}_1 \dot{q}_2^* \sin q_2^*, \\ B &= (2 \dot{q}_1 \dot{q}_2^* + \dot{q}_1 \dot{q}_2^* + 3 \dot{q}_1 \dot{q}_2^* \cos q_2^*) \sin q_2^*. \end{aligned} \quad (20)$$

式(20)中, A 和 B 为常数. 当它们不同时为零, 方程有解, 此时有 $\dot{q}_1 = 0$, 出现矛盾, 假设不成立, $q_1 = q_1^*$, 系统稳态是静止的.

对不同时为零的条件需要进行分类讨论, 相关结论参见文献[5], 该条件与 Acrobot 参数有关, 一般均能满足. 在该条件下, 可以得到

$$\dot{q}_1 = -4 g \cos q_1^* = 5 g \cos(q_1^* + q_2^*), \quad (21)$$

$$e_E^* = 4 g (\sin q_1^* - 1) + 5 g (\sin(q_1^* + q_2^*) - 2), \quad (22)$$

其中 $1 = \sin q_{1d}, 2 = \sin(q_{1d} + q_{2d})$. 由式(21)可推出

$$5 \cos(q_1^* + q_2^*) + 4 \cos q_1^* = 0. \quad (23)$$

考虑到系统重心在水平方向分量为

$$\begin{aligned} r_{cx} &= \frac{m_2 l_2 \cos(q_1 + \varphi) + (m_1 l_2 + m_2 l_1) \cos q_1}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{5 \cos(q_1 + \varphi) + 4 \cos q_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \quad (24)$$

由此可知, 稳定时, 系统重心在竖直位置, 这样的位置共有4种, 如图2所示. 由系统特性知, 位置1和2是不稳定的, 只要有少许扰动就会脱离稳定状

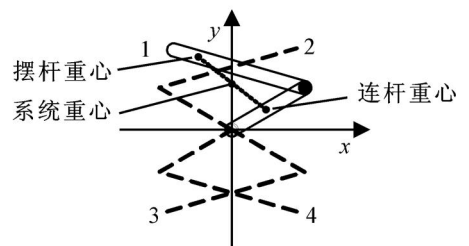


图2 闭环系统中4种奇异状态

态,位置 3 和 4 是稳定的. 这些奇点会干扰系统的运动过程,为了实现动态伺服控制目标,需要分析这些奇点的性质及其对系统收敛性的影响.

4.3 奇点与收敛条件

结合方程(18)和(21),整理化简可得

$$5g\cos(q_1^* + q_2^*) + 4g\cos q_1^* = 0, \quad (25)$$

$$k_P e_{q_2}^* - k_E(4g(\sin q_1^* - 1) + 5g(\sin(q_1^* + q_2^*) - 2)) + 4g\cos q_1^* = 0. \quad (26)$$

记 $\alpha = 4/5, \beta = k_P/k_E + 5g^2$,由式(25)可得

$$\cos q_1^* \cos q_2^* = \sin q_1^* \sin q_2^* - \cos q_1^*. \quad (27)$$

结合式(27),式(26)可化简为

$$0 = e_{q_2}^* + (\alpha + \beta)\cos q_1^* - \sin q_2^*. \quad (28)$$

记 $\gamma = \sqrt{(\cos q_2^* + \alpha)^2 + \sin^2 q_2^*}$,由式(27)可得

$$\cos q_1^* = \pm \sin q_2^* / \gamma. \quad (29)$$

代入式(28),化简得

$$q_2^* - q_{2d} = [1 \mp (\alpha + \beta)/\gamma] \sin q_2^*. \quad (30)$$

这是一个超越方程,它的根与奇点对应,可以用图解法来直观地理解方程解的位置及数量.

方程右边除了与 q_2^* 有关外,还与 α, q_{1d}, q_{2d} 有关. $\alpha + \beta$ 的取值范围是 $[-1, +1]$,这里给出 $\alpha = 1.5, \beta = 2 = 1$ 时的曲线,如图 3 所示. 其中

$$\begin{aligned} y_1 &= (q_2 - q_{2d}), \\ y_2 &= (1 + \frac{\alpha + \beta}{\gamma}) \sin q_2, \\ y_3 &= (1 - \frac{\alpha + \beta}{\gamma}) \sin q_2. \end{aligned}$$

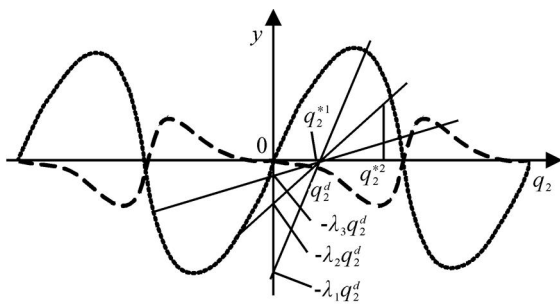


图 3 $\alpha = 1.5, \beta = 2 = 1$ 时超越方程对应曲线

方程左边是一个过点 $(q_2^d, 0)$ 的直线簇,其斜率为 $\lambda > 0$,直线与曲线交点即为方程的根.从图中可以看出,方程至少有一个根.另外, λ 越大,超越方程根越少且越靠近 q_2^d .

尽管可以通过参数计算使系统奇点数目减少,但由于动态伺服问题控制目标的任意性,奇点不能完全消除.虽然一个大的斜率可以使得奇点数目减少,但却对动态特性产生不良影响.由于 $\alpha + \beta = k_P/k_E + 5g^2$,过大的斜率会使得 $k_P \gg k_E$.而在 Lyapunov 函数(4)中, k_P 和 k_E 是分别保证 q_2 和 E 快

速平稳收敛的,如果 $k_P \gg k_E$,则会使能量收敛过慢,因此二者不能相差太大.在文献[5]中,作者只给出了 $k_P = 22$ 时的仿真结果也正是这个原因.

结论 2 对于系统(1),在条件(6)成立的前提下,采用式(7)中的反馈控制律,目标点 $[E_d, q_{2d}]$ 是全局渐近稳定的.

证明 证明过程利用了 Lassel 不变性原理^[10]:设 $V: R^n \rightarrow R$ 是连续可微的,集合 $c = \{x \in R^n: V(x) = c\}$ 是有界的,且对所有的 $x \in c, \dot{V} = 0$. 定义 $S \subset c$ 为 $S = \{x \in R^n: \dot{V}(x) = 0\}$. 令 M 为 S 中最大的不变集,则对任何 $x_0 \in c$,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $(t, x_0, 0)$ 必趋于 M .

显然文中定义的 Lyapunov 函数(5)满足定理中的条件,可知系统会收敛到其最大的不变集.该不变集由 $(E_d, q_{2d}), (E^*, q_2^*)$ 构成.容易证明前者是局部渐近稳定的,下面分析 (E^*, q_2^*) 的稳定性.

对于平衡点 x_e ,考虑其邻域 $A: V(x) < V(x_e^*);$ 对于平衡点 x_e^* ,考虑其邻域 $B: B(x_e^*) < \epsilon$,并记 $C: A \cap B$.根据 Lassel 原理,取 $c = V(x_e^*)$,此时从 c 内任一点出发的轨线必会收敛到 c 内的唯一不变集 x_e .即不论 ϵ 取多小,总有点存在(至少包含 C 中的所有点),使得以它们为起点的轨线最终不收敛于 x_e^* ,因此 x_e^* 是不稳定的.

综上,闭环系统的稳定平衡状态只有一个,在反馈控制律作用下,系统会最终收敛到目标位置.

注 1 尽管目标位置是渐近稳定的,但初始位置对收敛过程有很大影响,如果初始位置位于 c 内部,则系统会直接收敛至目标位置;若其位于 c 外部,则奇点的吸引作用会使系统收敛很慢,以至于在小时间范围内认为它是不收敛的.

5 仿真实验

采用下述参数来进行仿真实验: $m_1 = 1 \text{ kg}, m_2 = 1 \text{ kg}, l_1 = 1 \text{ m}, l_2 = 2 \text{ m}, l_{c1} = 0.5 \text{ m}, l_{c2} = 1 \text{ m}, I_1 = 0.083 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, I_2 = 0.33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, g = 10 \text{ m/s}^2$. 取参数^[5] $k_D = 15, k_E = 0.5, k_P = 22, k_V = 45$.

图 4 给出了单点给定时的仿真结果,(a) 目标为 $[q_{1d}, q_{2d}] = [0, 1]$,由于能量较大,控制作用较强,奇点作用不明显,系统经过 10s 到达目标位置;(b) 目标为 $[q_{1d}, q_{2d}] = [-1, 1]$,控制作用较弱,奇点作用明显,系统在奇点附近作小幅度振荡,直到 400s 时才收敛到目标值.

图 5 给定轨迹 $y = 2$,其上离散点选取 $(1, 2)$ 和 $(2, 2)$.从仿真曲线上可以看出系统收敛到目标点,并且沿着周期轨道实现了对目标轨迹的动态跟踪.

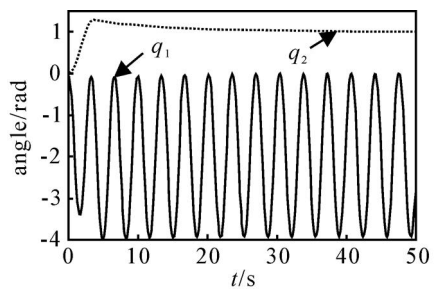
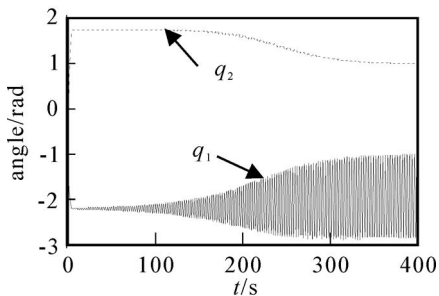
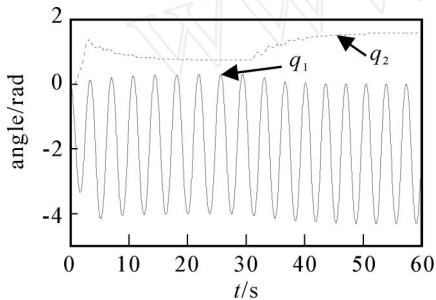
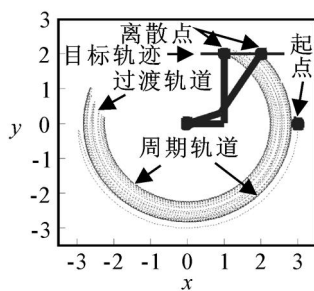
(a) $[q_{1,0}, q_{2,0}] = [0, 1]$ (b) $[q_{1,0}, q_{2,0}] = [-1, 1]$

图4 单点给定仿真结果



(a) 状态曲线



(b) 终端轨迹

图5 轨迹跟踪仿真结果

6 结论

本文研究了 Acrobot 系统中的动态伺服控制问题. 通过类比得到周期轨道的描述方程, 并结合 Lyapunov 理论设计了基于能量的控制器; 最后重点分析了闭环系统中控制器参数、奇点与收敛性之间的关系, 实现了轨迹的动态伺服跟踪. 对于所设计

的控制器, 仍然存在一些问题, 其闭环奇点不能消除, 虽然不影响整体收敛性, 但会极大影响收敛速度; 另外, 在实际应用中会出现控制输入、状态变量受限等一系列问题, 这些问题仍需进一步研究解决.

参考文献 (References)

- [1] Hauser J, Murray R M. Nonlinear controllers for nonintegrable systems: The acrobot example[C]. Proc of American Control Conf. San Diego, 1990: 669-671.
- [2] Murray R M, Hauser J. A case study in approximate linearization: The acrobot example [C]. Proc of American Control Conf. San Diego, 1990.
- [3] Zergeroglu E, Dixon W, Dawson D M. Lyapunov based set-point control of the acrobot [C]. Proc of the IEEE Conf on Int Conf on Control Applications. Trieste, 1998: 887-891.
- [4] Spong M W. The swing up control problem for the acrobot[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1995, 15(1): 49-55.
- [5] Xin X, Masahiro Kaneda. The swing up control for the Acrobot based on energy control approach[C]. Proc of the 41st IEEE Conf on Decision and Control. Las Vegas, 2002, 3: 3261- 3266.
- [6] Xin X, Masahiro Kaneda. New analytical results of the energy based swinging up control of the acrobot [C]. Proc of the IEEE Conf on Decision and Control. Bahamas, 2004: 704-709.
- [7] Tomohiro Henmi, Deng Mingcong, Akira Inoue. Swing up control of the acrobot using a new partial linearization controller based on the Lyapunov theorem [C]. Proc of the 2006 IEEE Int Conf on Networking, Sensing and Control. Lauderdale, 2006: 60-65.
- [8] Arun D Mahindrakar, Alessandro Astolfi, Romeo Ortega. Further constructive results on interconnection and damping assignment control of mechanical systems [C]. Proc of the 2006 American Control Conf. Minneapolis, 2006: 671- 685.
- [9] Matthew D. Berkemeier, Ronald S Fearing. Tracking fast inverted trajectories of the underactuated Acrobot [J]. IEEE Trans on Robotics and Automation, 1999, 15(4): 740-750.
- [10] 胡跃明. 非线性控制系统理论与应用[M]. 北京: 国防工业出版社, 2002.
(Hu Y M. Nonlinear control system theory and applications [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2002.)