

文章编号: 100120920(2008)112126304

基于最小二乘拟合的模糊隶属函数构建方法

袁杰^{1,2}, 史海波¹, 刘昶^{1,2}

(1. 中国科学院沈阳自动化研究所, 沈阳 110016; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

摘要: 针对当前模糊隶属函数构造方法中存在的问题, 提出一种构造模糊隶属函数方法. 采用最小二乘法拟合离散数据来获得隶属函数. 为减小拟合误差, 采用了 3 项措施以达到预期目标. 所构建的隶属函数, 对任意输入物理量可直接得到其对应模糊语言变量的隶属度, 从而有效避免专家指定隶属度的主观臆断性及不一致性. 该方法简单、求解精度高, 具有广泛适用性和较强的应用价值. 仿真结果证实了该方法的有效性.

关键词: 隶属函数; 最小二乘; 拟合; 隶属度; 模糊

中图分类号: TP273.4

文献标识码: A

Construction of fuzzy membership functions based on least squares fitting

YUAN Jie^{1,2}, SHI Hai²bo¹, LIU Chang^{1,2}

(1. Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang 110016, China; 2. Graduate School, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China. Correspondent: YUAN Jie, E2mail: yuanjie@sia.cn)

Abstract: This paper proposes a approach for constructing fuzzy membership functions considering some problems existing in some current methods. The approach employs least squares to fit discrete data, and their membership functions are obtained. To decrease fitting errors, three measures are adopted. For any input datum, its corresponding membership degree can be obtained directly by the constructed membership function. Subjectivity and inconsistency generated by experts can be avoided. This approach has simplicity, high accuracy and wide applicability. The simulation results show the effectiveness of this approach.

Key words: Membership function; Least square; Fitting; Membership degree; Fuzzy

1 引言

模糊集理论由 Zadeh 首次提出后, 得到了迅速发展, 并广泛应用于控制系统、人工智能、数据挖掘、模式识别等领域^[2,4]. 在应用模糊集理论时, 一个不容忽视的问题是隶属函数的构建, 它是正确运用该理论的关键^[1,5].

构造出符合客观实际的隶属函数, 是应用模糊集理论的难点之一, 至今尚未完全解决^[1,4,6]. 目前构造隶属函数的方法主要有: 模糊统计法、指派方法、二元对比排序法等^[4,7]. 模糊统计法可得到论域 U 下各分组区间的隶属度, 其隶属函数一般采用扎德法离散化表示^[4,7], 且区间大小直接影响隶属函数精度. 指派法根据研究对象的性质, 套用现成的某种模糊分布, 普遍认为是一种主观的方法^[4], 该方法

受限于指派者的经验知识. 二元比较法主要用于难以直接给出隶属度的模糊集, 通过两两比较确定两个元素隶属度大小, 在进行总体的排序后, 将定性的顺序转换为定量的隶属函数. 但二元比较法获得的隶属函数是离散表示的^[4].

为获得更符合客观实际的连续隶属函数, 人们提出在获得离散数据点的情况下采用拟合、逼近及插值等方法, 取得了一定的研究成果^[1,8,9]. 但这些成果也存在着不足, 如文献[8]所求取的隶属函数形式是基于梯形隶属函数的一种推广, 尽管可通过共轭梯度搜索算法来求取满足约束条件下的参数, 确定最终的隶属函数形式, 但其拟合误差值仅在给定的形式及其精度下最小, 总体误差仍不容忽视. 文献[9]采用 bézier 曲线逼近方式, 当曲线的幂次较低

收稿日期: 2007208201; 修回日期: 2007212210.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60674114); 国家 863 计划项目(2006AA04Z164).

作者简介: 袁杰(1975), 男, 乌鲁木齐人, 博士生, 从事模糊理论、制造系统建模与仿真等研究; 史海波(1966), 男, 沈阳人, 研究员, 博士生导师, 从事生产与运作管理、制造系统建模与仿真等研究.

时,修改曲线的功能较弱,此时灵活性受到限制.文献[1,9]需确定控制点数目及位置,且控制点数目会对拟合出的隶属函数精度造成影响.

由离散数据点构造隶属函数时,离散点本身不一定非常准确,不必精确地通过各点,只需构造出的隶属函数符合离散点分布的总体轮廓,并尽可能接近已知的数据.基于这一思想,本文尝试通过最小二乘法来构建隶属函数,并取得了较好的效果.最小二乘法是一种数学优化技术,它建立在误差控制基础上,通过最小化误差的平方和找到一组数据的最佳函数匹配^[10,12].该方法可拟合任意给定数据集下具有总体最小误差的隶属函数,其方法简单,求解精度高,可考虑作为实际应用时构建隶属函数的一种方法.

2 最小二乘法原理

设 f 是在 m 个点 $x_i \in [a, b]$ 上给定的离散函数,其离散实验观测数据为 $(x_i, f(x_i)) (i = 1, 2, \dots, m)$. 取 Ω 为线性空间

$$\Omega = \text{span}\{U_0(x), U_1(x), \dots, U_n(x)\},$$

其中 $U_0(x), U_1(x), \dots, U_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上线性无关组.对于任意拟合函数 $s(x) \in \Omega$, 残差为

$$D_i = f(x_i) - s(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

残差平方和为

$$+D^2 = \sum_{i=1}^m Q(x_i) D_i^2 = \sum_{i=1}^m Q(x_i) (f(x_i) - s(x_i))^2, \quad (1)$$

其中 $Q(x_i) (i = 1, 2, \dots, m)$ 为权函数,表示该离散点的重要程度.这时,最小二乘法即为求一函数

$$s^*(x) = \sum_{j=0}^n a_j^* U_j(x), \quad n \in [m-1, \infty) \quad (2)$$

使残差平方和满足

$$+D^2 = \sum_{i=1}^m Q(x_i) (s^*(x_i) - y_i)^2 = \min_{s \in \Omega} \sum_{i=1}^m Q(x_i) (s(x_i) - y_i)^2. \quad (3)$$

其中: $s(x) = \sum_{j=0}^n a_j U_j(x)$ 为属于 Ω 线性空间上的任意拟合函数; $s^*(x)$ 称为 f 在 m 个点 $x_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 上的最小二乘解,即为残差平方和最小的拟合函数^[11,12].

针对本文所讨论的隶属函数拟合问题,设各离散点的重要程度均相同,即取 $Q(x_i) = 1 (i = 1, 2, \dots, m)$,取 Ω 为多项式空间 $\Omega = P_n = \text{span}\{1, x, \dots, x^n\}$,这时所求最小二乘解为

$$s^*(x) \in P_n,$$

$$s^*(x) = a_0^* + a_1^* x + \dots + a_n^* x^n = \sum_{j=0}^n a_j^* x^j. \quad (4)$$

3 最小二乘拟合问题求解方法

已知一组具有 m 对的离散数据 $(x_i, f(x_i)) (i = 1, 2, \dots, m)$,其拟合问题转化为求多元函数

$$F(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^m (f(x_i) - s(x_i))^2, \quad n \in [m-1, \infty) \quad (5)$$

的极小值.

由求极值的必要条件,可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial a_k} &= 2 \sum_{i=1}^m (f(x_i) - s(x_i)) x_i^k = 0, \\ &k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

其二阶导数为

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial a_k^2} &= 2 \sum_{i=1}^m x_i^{2k} > 0, \quad k = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

由式(6)和(7)可知,式(5)所表达的函数 F 是非负上无界二次函数,无最大值,但可达到最小值.故按式(6)计算所得唯一解 $a_j^* (j = 0, 1, \dots, n)$ 可使函数 F 在 $(a_0^*, a_1^*, \dots, a_n^*)$ 达到最小值.将式(6)整理得

$$\sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=1}^m x_i^{k+j} \right) a_j = \sum_{i=1}^m f(x_i) x_i^k, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (8)$$

将式(8)写成 $A \cdot b = c$ 矩阵表示形式为

$$\begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^m x_i & \dots & \sum_{i=1}^m x_i^n \\ \sum_{i=1}^m x_i & \sum_{i=1}^m x_i^2 & \dots & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^m x_i^n & \sum_{i=1}^m x_i^{n+1} & \dots & \sum_{i=1}^m x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m f(x_i) \\ \sum_{i=1}^m f(x_i) x_i \\ \dots \\ \sum_{i=1}^m f(x_i) x_i^n \end{bmatrix}. \quad (9)$$

其中: A 为式(9)中 $n+1$ 阶系数矩阵,

$$\begin{aligned} b &= (a_0, a_1, \dots, a_n)^T, \\ c &= \left(\sum_{i=1}^m f(x_i), \sum_{i=1}^m f(x_i) x_i, \dots, \sum_{i=1}^m f(x_i) x_i^n \right)^T. \end{aligned}$$

将已知离散数据 $(x_i, f(x_i)) (i = 1, 2, \dots, m)$ 代入式(9),可得系数矩阵 A 及向量 c .又因线性空间 Ω

$= P_n = \text{span}\{1, x, \dots, x^n\}$. 其中: $1, x, \dots, x^n$ 线性无关; $n \in [m-1]$; A 为非奇异矩阵, 即 $|A| \neq 0$. 可按式 $b = A^{-1} \cdot c$ 计算出向量 b , 则 $s^* = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ 即为所求得的线性最小二乘解.

4 数据拟合要点

4.1 离散数据点获取

设某一模糊语言变量 v 描述的参数是连续变化物理量 u , 经模糊统计法^[7] 得到 m 个相邻区间段 $[a_i, a_{i+1}] (i = 0, 1, \dots, m-1)$ 的隶属度值. 令各区间中点元素 $x_i = (a_i + a_{i+1})/2$ 代表该区间, 对应隶属度 $L(x_i)$ 为该区间的隶属度, 由此得到二维空间下 m 个离散数据点 $(x_i, L(x_i)) (i = 0, 1, \dots, m-1)$. 目的是避免隶属函数在分段点处突变, 而同一分段内隶属度又无任何变化的缺陷, 从而为得到更符合客观对象本质的连续隶属函数提供了条件.

4.2 拟合精度保证措施

为减少截断误差, 降低存储精度要求限制, 提高拟合精度, 提出以下 3 项措施.

1) 数据类型设置. 在程序设计时将待求解系数的数据类型设定为双精度.

2) 物理量原始数值 u 转换处理. 对物理量原始数据按以下步骤进行处理:

Step1: 在待拟合数据集中按物理量 u 升序排列数据对(已按升序排列的该步省略).

Step2: 找到排序后原始物理量数值的中间值, 将该值转换为在 10^0 量级内, 记录转换系数 t , 对应隶属度值保持不变.

Step3: 将该集合内所有物理量数据 u 按式 $x = ut$ 进行转换处理, 相应隶属度值不作改动.

Step4: 计算得到所求区间离散点集合内的连续隶属函数表达式.

Step5: 在该模糊语言变量 v 下, 求任意一个属于该区间内物理量 u 的隶属度时, 先将该物理量按 $x = ut$ 进行转换后代入 Step4 中得到的表达式, 求得隶属度 $L(x)$.

3) 多项式变量系数精度. 得到的程序计算结果中, 对多项式不同阶变量的系数采用不同的精度. 其原则为: 变量次数越高, 保留其系数的精度也越高, 直观上体现在小数点后保留的位数越多; 反之, 则系数精度低.

在以上 3 项措施中, 第 1 项措施保证了拟合精度, 以减小截断误差; 第 2 项措施降低对存储中间及结果计算数据的高精度限制要求, 有效地减少因存储精度不够所带来的截断误差的影响; 第 3 项措施减小高次变量系数精度不足带来的截断误差, 保证

所求隶属度的精度.

4.3 拟合多项式阶数 n 的确定

多项式阶数 n 确定原则: 先设定拟合多项式阶数 n 的初值和拟合的最大允许误差 e . 为保证得到唯一解, 阶数 n 初值必须小于离散点数 m . 求出 n 阶多项式拟合时残差平方和 $E = \sum D_i^2$. 当 $E < e$ 时, 说明用 n 阶多项式拟合可满足精度要求; 否则, 增加拟合多项式的阶数, 直至满足要求为止.

为提高一次拟合满意率, 对于阶数 n 初值的设定问题, 通过 75 组离散数据在 Matlab 7.0 下进行了拟合实验. 结果显示: 在离散数据点数量较多(一般大于 6 个)时, n 取 3 或 4 可得到较为理想的拟合结果; 在数据点较少($m \in [6]$)时, n 取 2 或 1 拟合效果较好. 在数据点数目 $m \gg n$ 时, 继续增大阶数 n , 拟合精度提高并不明显, 而计算量却显著增加. 表 1 给出了构建隶属函数时选取阶数 n 初值的参考值.

表 1 阶数 n 初值设置

离散点数 m	$m \in [6]$	$m > 6$
初阶数 n	1 或 2	3 或 4

5 仿真研究

由 4.1 节建立起来的离散数据如表 2 所示. 根据表 2 数据特点, 建立隶属函数形式如下:

$$L(x) = \begin{cases} 0, & u < 135; \\ L_L(x(u)), & 135 \leq u \leq 338; \\ 1, & 338 < u < 367; \\ L_R(x(u)), & 367 \leq u \leq 570; \\ 0, & u > 570. \end{cases} \quad (10)$$

该隶属函数在形式上与文献[9]基本一致, 但在构造 $L_L(x)$ 和 $L_R(x)$ 时采用了截然不同的方法, 即最小二乘法. 由表 1, 选取阶数初值 $n = 4$, 并设最大允许误差 $e = 0.01$.

表 2 离散数据下的隶属度

u	135	164	193	222	251	280	309	338
$L(u)$	0	0.11	0.3	0.55	0.79	0.86	0.98	1
u	367	396	425	454	483	512	541	570
$L(u)$	1	0.91	0.82	0.78	0.65	0.35	0.2	0

由表中数据得到转换系数 $t = 0.01$, 且 $x = ut$. 按 Step1~ Step3 对物理量数据 u 进行处理, 并基于最小二乘的计算方法, 结合 Matlab 矩阵计算优势, 编程环境选在 Matlab 7.0 下进行. 在得到的计算结果中, 对高次变量系数保留高的精度, 以减小可能的截断误差. 由此得到 $L_L(x)$ 和 $L_R(x)$ 表达式如下:

$$L_L(x) = 0.0001 D (1.0000 C (5.665 - 11.0814x + 7.446416x^2 - 1.9919344x^3 + 0.1887831403x^4)), \quad (11)$$

$$L_R(x) = 0.097 - 100.9412x + 33.237630x^2 - 4.8186873x^3 + 0.2584045721x^4 \quad (12)$$

式(11)和(12)即为式(10)隶属函数中所求闭区间上的函数表达式. 其中操作符/ D₀及/ C₀定义如下:

$$a \text{ D } b \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a, b\},$$

$$a \text{ C } b \stackrel{\text{def}}{=} \min\{a, b\}.$$

由于最小二乘法拟合的曲线不必精确通过各离散点, 在分段点附近的隶属度可能存在对[0, 1]越界的可能性. 通过以上操作, 可有效克服这种缺陷.

为验证物理量级处理的效果, 以表2数据构造式(10)中 $L(x)$, 并进行了比较试验. 结果显示: $L(x)$ 最高次多项式系数由未处理前的 10^9 量级降为处理后的 10^1 量级, 构建出的隶属函数对正确求解隶属度无影响, 从而极大地降低了对中间和结果数据存储精度的要求, 有效地减少了因存储精度不够所带来的截断误差的影响. 由此, 得到拟合后的隶属函数曲线如图1所示.

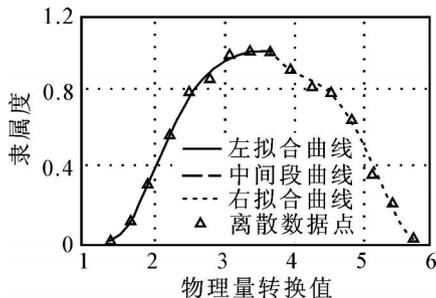


图1 最小二乘拟合得到的隶属函数曲线

在阶数 $n=4$ 时, 按式(1)计算隶属函数与离散点的总残差平方和 $E = \sum D_i^2 = 0.008706 < 0.01$, 因 $E < e$, 故拟合结果满足精度要求. 由此可见, 总拟合误差较小, 拟合精度较高. 其方法简单、拟合能力强、人工干预少, 可以考虑作为实际应用中的求取隶属函数的一种方法.

本文工作有两点需要说明: 1) 对具有任意分布形状的离散数据, 如何确定阶数 n 的最佳值, 将是不断探索的过程; 2) 本文仅提供了基于最小二乘的一种解法, 此外还可利用正交多项式做最小二乘拟合^[11,12], 尽管是采用最小二乘的不同解法, 但构造模糊隶属函数的思想和过程是基本一致的.

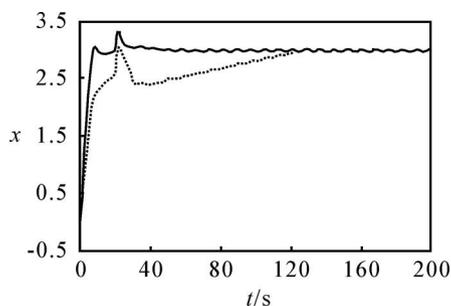
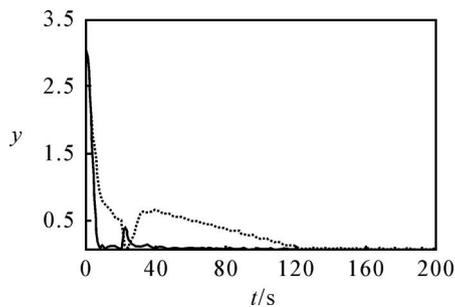
6 结 论

本文提出一种构造模糊隶属函数方法, 即采用最小二乘拟合来构建隶属函数. 该方法建立在误差控制基础上, 有效降低了构造隶属函数时的总误差.

在拟合离散数据时, 对表示物理量的数据进行量级处理, 可有效降低对中间及结果数据存储精度的要求. 此外, 对程序设计也作了相应要求, 减小了截断误差. 在得到的计算结果中, 对高次变量系数保留高的精度, 以保证求取隶属度的精度. 其方法简单、拟合能力强、人工干预少. 仿真结果进一步证实了该方法的有效性.

参考文献(References)

- [1] Wang C H, Wang W Y, Lee T T, et al. Fuzzy B-spline membership function (BMF) and its applications in fuzzy2neural control[J]. IEEE Trans on Systems, Man and Cybernetics, 1995, 25(5): 842-851.
- [2] 王士同, 夏祖勋, 陈剑夫. 模糊数学在人工智能中的应用[M]. 北京: 机械工业出版社, 1991. (Wang S T, Xia Z X, Chen J F. Application of fuzzy mathematics in artificial intelligence [M]. Beijing: Machine Industry Press, 1991.)
- [3] Cano J C, Nava P A. A fuzzy method for automatic generation of membership function using fuzzy relations from training examples[C]. IEEE Proc. New Orleans, 2002: 152-162.
- [4] 谢季坚, 刘承平. 模糊数学方法及其应用[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006. (Xie J J, Liu C P. Fuzzy mathematics approach and application [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2006.)
- [5] Yang C C, Bose N K. Generating fuzzy membership function with self-organizing feature map[J]. Pattern Recognition Letters, 2006, 27(5): 356-365.
- [6] Dombi J, Gera Z. The approximation of piecewise linear membership functions and Lukasiewicz operators[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2005, 154(2): 272-286.
- [7] 李鸿吉. 模糊数学基础及实用算法[M]. 北京: 科学出版社, 2005. (Li H J. Fuzzy mathematics base and algorithm[M]. Beijing: Science Press, 2005.)
- [8] Chang P T, Huang L C, Lin H J. The fuzzy Delphi method via fuzzy statistics and membership function fitting and an application to the human resources[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 112(3): 512-520.
- [9] Medaglia A L, Fang S C, Nuttle H L W, et al. An efficient and flexible mechanism for constructing membership functions[J]. European J of Operational Research, 2002, 139(1): 84-95.
- [10] Campos I, Islas M, Ramirez G, et al. Growth kinetics of borided layers: Artificial neural network and least square approaches[J]. Applied Surface Science, 2007, 253(14): 6226-6231.

图 4 系统状态变量 x 的仿真结果图 5 系统输出 y 的仿真结果

5 结 论

对于传统极值搜索控制系统设计中存在的缺陷,考虑到被控系统存在的非线性和不确定性,本文构建了极值搜索算法与被控对象的一体化设计框架,利用终端滑模控制策略,实现了极值搜索控制系统的一体化设计方法。该方法确保了搜索通道能迅速寻找到系统的最优值,同时控制通道可收敛至最优值附近的邻域内。仿真结果对比分析表明,这种一体化设计方法在系统的动态性能和鲁棒性方面都有较大提高,同时验证了该方法的有效性和分析的正确性。

参考文献(References)

- [1] Tsien H S. Engineering cybernetics [M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1954.
- [2] Drakunov S, Ozguner U. Optimization of nonlinear system output via sliding mode approach[C]. IEEE Int

Workshop on Variable Structure and Lyapunov Control of Uncertain Dynamical System. Sheffield, 1992: 612-62.

- [3] Krstic M. Toward faster adaptation in extremum seeking control[C]. Proc of the 39th IEEE Conf on Decision and Control. Phoenix, 1999: 4762-4771.
- [4] Rotea M A. Analysis of multivariable extremum seeking algorithms[C]. Proc of the American Control Conf. Chicago, 2000: 432-443.
- [5] Walsh G C. On the application of multi-parameter extremum seeking control[C]. Proc of the American Control Conf. Chicago, 2000: 4112-4115.
- [6] Pan Y D, Ozguner U, Acarman T. Stability and performance improvement of extremum seeking control with sliding mode[J]. Int J of Control, 2003, 76(9/10): 968-985.
- [7] 左斌, 胡云安, 施建洪. 极值搜索算法的研究与进展[J]. 海军航空工程学院学报, 2006, 21(6): 611-617.
(Zuo B, Hu Y A, Shi J H. Research and development of extremum seeking algorithm [J]. J of Naval Aeronautical Engineering Institute, 2006, 21(6): 611-617.)
- [8] 查旭, 左斌, 胡云安. 利用退火回归神经网络极值搜索算法求纳什均衡解[J]. 控制与决策, 2006, 21(10): 1162-1171.
(Zha X, Zuo B, Hu Y A. Nash equilibrium solution by extremum seeking algorithm based on annealing recurrent neural network [J]. Control and Decision, 2006, 21(10): 1162-1171.)
- [9] Ilker Tunay. Antiskid control for aircraft via extremum seeking[C]. Proc of the American Control Conf. Arlington VA, 2001: 662-670.
- [10] Tang Y. Terminal sliding mode control for rigid robots [J]. Automatica, 1998, 34(1): 51-56.
- [11] Polycarpou M M, Ioannou P A. A robust adaptive nonlinear control design [J]. Automatica, 1996, 32(3): 423-427.

(上接第 1266 页)

- [11] 郑咸义. 计算方法[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2003.
(Zheng X Y. Computational approaches [M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 2003.)

- [12] 施吉林, 刘淑珍, 陈桂芝. 计算机数值方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
(Shi J L, Liu S Z, Chen G Z. Numerical approaches used in computer [M]. Beijing: Higher Education Press, 1999.)