

文章编号: 1001-0920(2008)11-1226-05

## 基于不同加权因子的随机多模型自适应控制

李晓理<sup>1</sup>, 王伟<sup>2</sup>

(1. 北京科技大学 自动化系, 北京 100083; 2. 大连理工大学 自动化系, 辽宁 大连 116024)

**摘要:** 针对一类噪声方差未知的随机系统, 基于不同加权因子设计多个参数辨识器辨识模型参数, 在此基础上, 构成多模型自适应控制器. 在每个采样时刻基于指标切换函数选择最佳辨识模型, 并将基于此最佳模型设计的控制器切换为当前控制器. 同时, 证明了多个模型控制器之间相互切换时整个闭环系统是全局收敛的. 仿真结果表明, 同单一自适应模型控制器相比, 这种基于多个不同加权因子的多模型自适应控制器在模型参数发生跳变时可很好地改善被控对象的控制品质.

**关键词:** 随机系统; 多模型; 自适应控制

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Stochastic system multiple model adaptive control based on different weighting factors

LI Xiao-li<sup>1</sup>, WANG Wei<sup>2</sup>

(1. Department of Automation, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China; 2. Department of Automation, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China. Correspondent: LI Xiao-li, E-mail: lixiaoliustb@sina.com)

**Abstract:** Multiple parameter identifiers based on different weighting factors are set up for a kind of stochastic system with unknown noise variance. A multiple model adaptive controller is formed based on these identified models. At every sample time, an index switching function is used to select the best model identified, and the controller based on this model is switched as the controller of the system. It is proved that the closed-loop system is globally convergent. Simulation result shows that the stochastic system multiple model adaptive controller can improve the control performance greatly compared with the conventional stochastic system adaptive controller, especially for the system with jumping parameters.

**Key words:** Stochastic system; Multiple model; Adaptive control

### 1 引言

多模型自适应控制采用多个模型覆盖被控对象的不确定性, 基于一种最优选择机制, 选择最优模型, 进而设计控制器. 很多文献已证明, 对于模型参数或结构具有不确定性的系统, 该方法能极大地改善控制品质<sup>[1]</sup>. 20 世纪 90 年代以后, 基于指标切换函数的多模型自适应控制再一次使这一研究领域成为研究热点, 并在理论上不断完善. 连续时间系统<sup>[2]</sup>和离散时间系统<sup>[3]</sup>的多模型自适应控制被相继提出, 并不断有改进算法提出<sup>[4]</sup>, 这使确定性系统的多模型自适应控制方法的研究日趋完善. 进入 21 世

纪, 随机系统的多模型自适应控制开始成为新的研究领域, 相继提出不同的随机多模型自适应控制器的设计方法, 如具有白噪声扰动的随机系统<sup>[5]</sup>、含有界扰动的随机系统<sup>[6,7]</sup>的多模型自适应控制器的设计方法, 这些控制器改善了随机系统的控制品质, 但又各自具有局限性. 例如: 文献[6,7]中的噪声是有界的, 因此所设计的控制器不适用于噪声上界未知的系统; 文献[5]中的白噪声扰动方差已知, 但控制器的设计过程中并没有充分利用这个已知条件.

对于含有白噪声扰动的被控对象, 采用带有加权因子(加权因子取值为噪声方差倒数时为最优)的

收稿日期: 2007-08-13; 修回日期: 2007-10-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60604002); 北京科技新星计划项目(2006B23); 国家杰出青年基金项目(69825106).

作者简介: 李晓理(1971—), 男, 沈阳人, 副教授, 博士, 从事多模型自适应控制等研究; 王伟(1955—), 男, 满族, 辽宁鞍山人, 教授, 博士生导师, 从事复杂工业过程建模、预测控制等研究.

最小二乘算法辨识模型参数常常会得到很好的效果. 但当噪声方差值未知时, 通常取加权因子为 1 的辨识算法进行参数辨识. 基于此辨识模型构成的自适应控制器在控制品质上往往不是最优的, 在噪声方差较大时尤为突出. (文献[3,5]中噪声方差已知但仍采用加权因子为 1 的辨识算法进行参数辨识, 并没有充分利用已知的噪声信息设计控制器). 本文针对一类噪声方差取值范围已知的离散时间随机系统, 建立多个基于不同加权因子的最小二乘辨识器辨识被控对象模型参数, 并在多个辨识模型的基础上建立多个控制器. 同时建立一个基于模型输出误差, 带有积分特性的指标切换函数. 每个采样时刻, 选择能使指标函数达到最小值的辨识模型, 并将基于此模型的控制器切换为当前控制器. 可以证明, 尽管多个基于不同加权因子辨识模型的控制器相互切换, 但闭环系统是全局收敛的. 同时从仿真实例可以看出, 当参数发生跳变时, 相对于传统的单一自适应模型控制器, 多模型控制器能很好地改善控制品质.

## 2 被控对象描述及自适应控制

考虑如下离散时间被控对象:

$$y(t+1) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y(t-i) + \sum_{j=0}^{m-1} b_j u(t-j) + w(t+1). \tag{1}$$

其中: 参数  $a_i$  和  $b_j$  未知,  $u(t)$  的系数  $b_0$  不等于 0,  $w(t)$  为白噪声随机扰动. 式(1) 可变换成如下的等价模型形式:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-1}B(q^{-1})u(t) + w(t). \tag{2}$$

其中

$$A(q^{-1}) = 1 - a_0 q^{-1} - a_1 q^{-2} - \dots - a_{n-1} q^{-n},$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{m-1} q^{-m+1},$$

这里  $q^{-1}$  为单位后移算子. 从分析问题的角度看, 模型(1) 更方便.

为建立基于被控对象(1) 的多模型自适应控制器, 作如下假设:

- 1) 系数  $b_0$  已知;
- 2) 式(2) 中多项式  $B(q^{-1})$  的根在复平面上位于单位圆内;
- 3) 扰动项  $w(t)$  具有 0 条件均值和有限的方差, 并满足均方收敛, 即满足

$$E[w(t) | t-1] = 0, \tag{3}$$

$$E[w^2(t) | t-1] = \sigma^2, \tag{4}$$

$$\limsup_N \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N w^2(t) < \infty. \tag{5}$$

式(4) 中  $\sigma^2$  未知, 但其可能取值的范围已知, 即  $\sigma^2 \in [\sigma_1^2, \sigma_2^2]$ ,  $\sigma_1^2$  和  $\sigma_2^2$  为满足  $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$  的已知正数. 为便于参数估计, 将式(1) 改写成如下递归形式:

$$y(t+1) = \Phi^T(t) \theta^* + w(t), \tag{6}$$

$$\Phi(t) = [y(t), y(t-1), \dots, y(t-n+1), u(t), u(t-1), \dots, u(t-m+1)]^T,$$

$$\theta^* = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{m-1}]^T.$$

令

$$\hat{\theta}(t) = [\hat{\theta}_0(t), \hat{\theta}_1(t), \dots, \hat{\theta}_{n-1}(t), \hat{\theta}_n(t), \hat{\theta}_{n+1}(t), \dots, \hat{\theta}_{m-1}(t)]^T, \tag{7}$$

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t) = y(t) - \Phi^T(t-1)\hat{\theta}(t-1). \tag{8}$$

采用如下随机最小二乘辨识算法辨识被控对象参数:

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{a(t-1)P(t-2)\Phi(t-1)}{1 + a(t-1)\Phi(t-1)^T P(t-2)\Phi(t-1)} e(t), \tag{9}$$

$$P(t-1) = P(t-2) - \frac{a(t-1)P(t-2)\Phi(t-1)\Phi^T(t-1)P(t-2)}{1 + a(t-1)\Phi^T(t-1)P(t-2)\Phi(t-1)}. \tag{10}$$

其中: 辨识初值  $\hat{\theta}(0) = \theta_0, P(-1) = P_0, a(t-1) > 0$  为一加权系数.

自适应控制问题是决定一个有界的输入  $u(t)$ , 使被控对象输出  $y(t)$  跟踪任意已知的有界参考输入  $y^*(t)$ . 采样时刻为  $t$ , 若  $y^*, y^*(t+1)$  已知, 则控制输入可由如下方程求得:

$$y^*(t+1) = \Phi^T(t) \theta^*. \tag{11}$$

当参数  $\theta^*$  未知, 可用  $\hat{\theta}(t)$  代替  $\theta^*$ , 由如下方程求解控制量:

$$u^*(t+1) = \Phi^T(t)\hat{\theta}(t). \tag{12}$$

## 3 加权因子对控制效果的影响

噪声方差值未知时, 即式(4) 中  $\sigma^2$  未知时, 在由式(7) ~ (10), (12) 构成的随机自适应控制器中,  $a(t-1)$  通常取常数 1, 然而  $a(t-1)$  的选择会对随机自适应控制产生影响.

根据文献[8] 将式(6) 写成

$$(t+1)^T = (t)^T, \tag{13}$$

$$y(t) = \Phi^T(t-1)(t) + w(t). \tag{14}$$

令  $(t-1) = 1/a(t-1)$ , 则式(9), (10) 变为

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\Phi(t-1)}{(t-1) + \Phi(t-1)^T P(t-2)\Phi(t-1)} e(t), \tag{15}$$

$$P(t-1) = P(t-2) - \frac{P(t-2)\Phi(t-1)\Phi^T(t-1)P(t-2)}{(t-1) + \Phi^T(t-1)P(t-2)\Phi(t-1)}. \tag{16}$$

将式(13), (14) 进行卡尔曼滤波所得到的滤波方程<sup>[9]</sup>和式(15), (16) 相比较. 除了将式(16) 中的  $(t-1)$  替换成噪声的协方差值<sup>2</sup>, 其他形式完全一样. 由此可见, 最小二乘辨识算法是以模型参数为状态的一种最优滤波. 因此从滤波的角度而言, 选取式(16) 中的  $(t-1)$  作为噪声的协方差值<sup>2</sup> 会得到最优的线性滤波值, 即最优的参数辨识值.

噪声方差的准确值往往很难获得, 通常只能获得一定的方差取值范围, 如文献[3] 中的  $(t-1)$  只取常数 1. 可以证明, 构成的自适应控制器(12) 是全局收敛的, 但在噪声方差较大时, 过渡过程会较差. 由式(9) 可以看出, 当  $(t-1)$  较小时, 辨识参数受到新的模型误差  $e(t)$  的影响将变大, 对被控对象模型参数变化的适应性强, 但由于对模型误差变化敏感, 容易造成辨识参数的波动; 相反当  $(t-1)$  较大时, 辨识参数受到模型输出误差  $e(t)$  的影响将变小, 参数收敛速度较慢, 建立在此辨识模型基础上的控制器在过渡过程中的波动会小一些, 但对被控对象模型参数的变化敏感性差.

在模型输出误差  $e(t)$  较大时, 选择  $(t-1)$  较小的参数辨识器, 使辨识参数快速趋向真值. 将基于此辨识模型的控制器作用于式(1), 虽然输出与设定值之间有小范围的波动误差, 但可避免大的超调产生; 当模型输出误差  $e(t)$  较小时, 再选择  $(t-1)$  较大的辨识器, 减少辨识参数对模型误差的敏感性, 使辨识参数在真值附近慢慢地微调. 使用基于此模型的控制器将减小输出波动, 并使被控对象输出不断接近设定值. 若有多个控制器可这样切换, 将能改善控制品质. 基于不同加权因子的多模型自适应控制器是基于这种思想建立的.

#### 4 基于不同加权因子的多模型自适应控制器

在噪声方差可能取值的范围内, 建立多个具有不加权因子的参数辨识模型, 并基于辨识模型建立多个模型控制器, 进而基于某种切换机制设计多模型自适应控制器.

建立多个不同的加权因子, 满足

$$a_i(t-1), \dots, a_i(t-1), \dots, a_M(t-1),$$

$$i(t-1) = 1/a_i(t-1),$$

$$i(t-1) \in [1/2, 2], i \in \{1, 2, \dots, M\}, t \in R^+.$$

建立多个参数辨识模型

$$\hat{y}_i(t) =$$

$$\hat{y}_i(t-1) +$$

$$\frac{a_i(t-1) P_i(t-2) \phi(t-1)}{1 + a_i(t-1) \phi(t-1)^T P_i(t-2) \phi(t-1)} e_i(t),$$

(17)

$$P_i(t-1) =$$

$$P_i(t-2) -$$

$$\frac{a_i(t-1) P_i(t-2) \phi(t-1) \phi^T(t-1) P_i(t-2)}{1 + a_i(t-1) \phi^T(t-1) P_i(t-2) \phi(t-1)},$$

(18)

$$e_i(t) = y(t) - \hat{y}_i(t) =$$

$$y(t) - \phi^T(t-1) \hat{\alpha}_i(t-1).$$

(19)

定义如下指标切换函数:

$$J_i(t_0, t) = \sum_{\tau=t_0}^t e_i^2(\tau), 0 < 1. \quad (20)$$

由式(17) ~ (20) 可构成如下基于多个遗忘因子的多模型自适应控制器:

- 1)  $t = t_0, I = \{1, 2, \dots, M\};$
  - 2)  $t > t_0,$
- $$i(t) = \arg \min_j J_j(t, t_0), \quad (21)$$

并令  $\hat{\alpha}(t) = \hat{\alpha}_{i(t)}$ , 然后采用式(12) 计算控制输入.

随机多模型自适应控制器的实现是在闭环系统全局收敛的前提下进行的. 下面将证明建立在不同辨识模型上的控制器之间相互切换时, 闭环系统仍是全局收敛的.

**引理 1<sup>[8]</sup>** 根据噪声假设 3) 中式(3) ~ (5), 并假设

$$\limsup_t (\max P(N) / \min P(N)) < \infty,$$

辨识算法(9) 和(10) 有

$$\lim_N \sup_{t=1}^N \frac{e(t) - (t)}{r(t-1)} < \infty, \text{ a. s.}$$

其中

$$r(t-1) = r(t-2) + a(t-1) \phi(t-1)^T \phi(t-1).$$

**引理 2<sup>[3]</sup>** 考虑被控对象(1) 和假设 2), 将自适应控制器(7) ~ (10), (12) 作用于被控对象(1) 有

$$\lim_N \sup \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y^2(t) < \infty, \quad (22)$$

$$\lim_N \sup \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u^2(t) < \infty, \quad (23)$$

$$\lim_N \sup \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N E[(y(t) - y^*(t))^2 / t - 1] =$$

$$E[\sigma^2(t) / t - 1] = \sigma^2. \quad (24)$$

**引理 3<sup>[3]</sup>** 令  $\{x_n\}$  是一个满足  $x_n \geq 0$  和  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s < \infty$  的实数序列.  $\{b_n\}$  序列满足  $b_n > 0$  和  $b_n$  递增, 并且存在  $K > 0$  对所有的  $l < n$  满足  $(b_l/b_n) \leq K$ , 则当  $n \rightarrow \infty$  时有

$$\sum_{k=1}^n (1/b_n) b_k x_k \rightarrow 0. \quad (25)$$

下面的定理可保证在多个模型控制器之间切



换时闭环系统是全局收敛的。

定理 1 考虑系统(1)和假设 2),将基于变化遗忘因子的多模型自适应控制器(17)~(21)作用于被控对象(1),闭环系统的输入输出是全局收敛的。

证明 由式(12),(19)和(21),在(t+1)时刻有

ec(t+1) = y(t+1) - y\*(t+1) = ei(t)(t+1). (26)

令

ri(t-1) = ri(t-2) + ai(t-1)phi(t-1)^T phi(t-1), i in {1, 2, ..., M}, (27)

有

(ec(t+1) - (t+1))^2 / ri(t) = (ei(t)(t+1) - (t+1))^2 / ri(t) (28)

根据引理 1,有

lim\_{t=N} sum\_{i=1}^N (ec(t+1) - (t+1))^2 / ri(t) < . (29)

对于式(21),若 i(t) 是常数,则由式(27)可知,式(29)中的 ri(t) 为单调递增函数,此时多模型控制器转化为单模型自适应控制器,由引理 2 可得结论;若 i(t) 不是常数,由式(27)可知,由于 i(t) (i in {1, 2, ..., M}) 的不同,ri(t) 将不再是一个单调递增函数。

考虑到 ai(t) in [1/2, 1/2], 1/2 和 1/2 为满足 1/2 的已知正数. ri(t) (i in {1, 2, ..., n}) 是一个对时间 t 的单调递增函数. 因此对任意的 l in n 和 i, j = 1, 2, ..., M, 有

ri(l) / rj(n) < K. (30)

故由式(25)有

lim\_{t=N} 1 / ri(N) sum\_{i=1}^N (ec(t+1) - (t+1))^2 = 0. (31)

由假设 2) 可知,下式仍然成立:

r(N) / N <= D1 / N sum\_{i=1}^N (ec(t+1) - (t+1))^2 + D2, D1 > 0, D2 > 0. (32)

由式(31)和(32)可得

lim\_{t=N} sum\_{i=1}^N (ec(t+1) - (t+1))^2 / N = 0. (33)

由引理 2 可得结论(22)~(24),即闭环系统的输入和输出是全局收敛的。

5 仿真实例

考虑如下被控对象:

y(t) = 2y(t-1) - 0.5y(t-2) + q^-1(2.5 + 2q^-1)u(t) + (t). (34)

其中: (t) 为白噪声扰动项,且满足式(3)~(5); [0.1, 10].

在仿真实验中, (t) 采用[-2, 2]之间均匀分布的随机数(此时其方差为 4/3), y\*(t) = 5 分别采用常规(即加权因子为 1)的单自适应模型控制器和由 3 个加权因子分别为 a1(t) = 2, a2(t) = 2/3, a3(t) = 0.5(即 i1(t) = 0.5, i2(t) = 1.5, i3(t) = 2)构成的多模型控制器进行控制. 其中指标切换函数中 = 0.4. 仿真结果如图 1 所示。

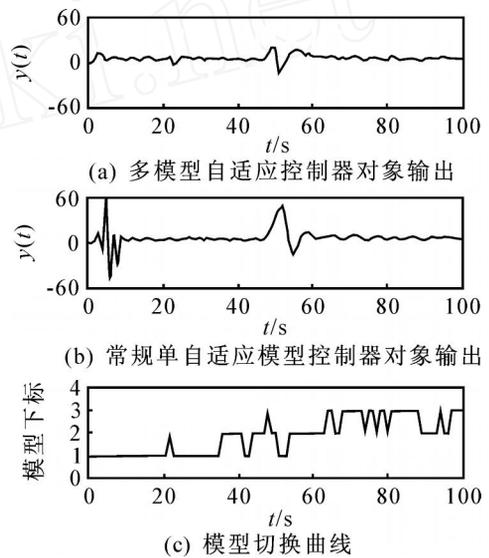


图 1 控制器仿真结果

所有自适应模型的辨识初值都选 [0.5, -0.5, 2.5, 1.2]^T. 在 t = 50 s 时,被控对象模型参数发生一次跳变,即

y(t) = 3.5y(t-1) - 0.5y(t-2) + q^-1(2.5 + 2.2q^-1)u(t) + (t). (35)

图 1(c) 中纵坐标 1, 2, 3 分别对应 i1(t) = 0.5, i2(t) = 0.5, i3(t) = 2 的 3 个模型. 由模型切换曲线可以看出,初始阶段由于辨识模型误差较大,基于 i1(t) = 0.5 模型辨识设计的控制器(简称 i1(t) = 0.5 的控制器)将被切换到当前控制器. 但参数辨识接近真值后,当前控制器切换到 i1(t) = 1.5 的控制器(i1(t) = 1.5 与噪声的方差 4/3 最接近). 当 t = 50 s 参数发生跳变时, i1(t) = 0.5 的控制器又被切换以改善瞬态响应. 参数辨识接近真值后,控制器又在 i1(t) = 1.5 和 i1(t) = 2.0 之间切换,以保证输出的稳定性. 对比图 1(a) 和 (b),对于含跳变参数的随机系统,多模型自适应控制器已极大地改善了控制品质。

## 6 结 论

本文针对采用具有加权因子的最小二乘法构成的自适应控制器,研究不同加权因子对控制系统性能的影响.并针对被控对象噪声方差可能取值范围设计多个基于不同加权因子的辨识器,并针对每个辨识模型设计控制器.采用一个基于模型输出误差具有积分形式的指标切换函数,在每个采样时刻选择最优模型,并将基于此模型的控制器切换为当前控制器.仿真结果表明,采用多个自适应模型构成的控制器和传统的单自适应模型控制器相比,可很好地改善瞬态响应.同时证明,虽然多个控制器之间相互切换,但闭环系统是全局收敛的,被控对象输出渐近跟踪参考输入.

### 参考文献(References)

- [1] 王伟, 李晓理. 多模型自适应控制[M]. 北京: 科学出版社, 2001.  
(Wang W, Li X L. Multiple model adaptive control [M]. Beijing: Science Publishing House, 2001.)
- [2] Narendra K S, Balakrishnan J. Adaptive control using multiple models[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(2): 171-187.
- [3] Narendra K S, Xiang C. Adaptive control of discrete-time systems using multiple models[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(9): 1669-1686.
- [4] 李晓理, 王伟. 基于局部化技术的多模型自适应控制[J]. 自动化学报, 2000, 26(4): 523-528.  
(Li X L, Wang W. Localization based multiple-model adaptive control [J]. Acta Automatic Sinica, 2000, 26(4): 523-528.)
- [5] Narendra K S, Driollet Osvaldo. Stochastic adaptive control using multiple models for improved performance in the presence of random disturbance[J]. Int J Adapt Control Signal Process, 2001, 15(3): 287-317.
- [6] 李晓理, 王书宁. 含有界扰动系统的多模型自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(4): 577-581.  
(Li X L, Wang S N. Multiple-model adaptive control of system with bounded disturbance [J]. Control Theory and Applications, 2003, 20(4): 577-581.)
- [7] 李晓理, 王伟. 基于有界扰动分区的多模型自适应控制[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 283-286.  
(Li X L, Wang W. Multiple model adaptive control based on the divided scope of bounded disturbance [J]. Control Theory and Applications, 2006, 23(2): 283-286.)
- [8] Goodwin G C, Sin K S. Adaptive filtering, prediction and control [M]. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1984.
- [9] 李树英, 许茂增. 随机系统的滤波与控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1991.  
(Li S Y, Xu M Z. Filtering and control of stochastic system [M]. Beijing: National Defence Publication, 1991.)
- [3] Kendra E Moore, Askiner Gungor, Surendra M Gupta. A Petri net approach to disassembly process planning [C]. 23rd Int Conf on Computers and Industrial Engineering. Britain, 1998: 165-168.
- [4] Stefano Caselli, Francesco Zanichelli. On assembly sequence planning using Petri nets [C]. Proc of Assembly and Task Planning. Pittsburgh, 1995: 239-244.
- [5] Ahmed Tarek. Optimal legal firing sequence of Petri nets using linear programming [J]. Optimization and Engineering, 2004, 5(1): 25-43.
- [6] Tadashi Matsumoto, Ahmed Tarek. Finding legal firing sequences of Petri nets by means of dynamic programming included linear programming [C]. Proc of the 35th Conf on Decision and Control. Kobe, 1996: 4459-4466.
- [7] Tadashi Matsumoto. Finding legal firing sequences in submarking reachability problems of Petri nets by discrete time pontryagin 's minim principle [C]. 1997 IEEE Int Symposium on Circuits and Systems. Hong Kong, 1997: 1017-1020.
- [8] Ahmed Tarek. Optimization algorithms applied to large Petri nets [D]. Texas: Texas Tech University, 2001: 36-39.
- [9] Kendra E Moore, Surendra M Gupta. Petri net approach to disassembly process planning for products with complex AND/OR precedence relationships [J]. European J of Operational Research, 2001, 135(2): 428-449.
- [10] 蒋昌俊. 一类同步合成网合法发射序列判定的一个多项式时间算法 [J]. 中国科学 (E 辑), 2002, 32(1): 116-124.  
(Jiang C J. Algorithm with polynomial complexity for detecting legal firing sequence of synchronous composed Petri nets [J]. Science in China (Series E), 2002, 32(1): 116-124.)

(上接第 1225 页)