

文章编号: 1001-0920(2008)11-1231-07

带有持续扰动的时滞非线性大系统的最优跟踪控制

唐瑞春, 吕贤敏

(中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266071)

摘 要: 研究具有外界持续扰动的时滞非线性大系统的无静差最优跟踪控制问题. 将时滞非线性大系统分解为带有互联项的 N 个时滞非线性子系统, 基于内模原理对子系统构造扰动补偿器, 将带有外部持续扰动的子系统化为无扰动的增广系统. 通过灵敏度法求解不含时滞的两点边值问题, 得到子系统的最优跟踪控制律, 截取最优跟踪控制律的前 N 项作为次优控制律来近似系统的最优控制律. 仿真实例表明了该设计方法的有效性.

关键词: 时滞非线性大系统; 持续扰动; 最优控制; 灵敏度法

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Optimal tracking control for nonlinear time-delay large-scale systems with persistent disturbances

TANG Rui-chun, LV Xian-min

(College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266071, China.

Correspondent: LV Xian-min, E-mail: genjurocn2005@163.com)

Abstract: The problem of optimal tracking control with zero steady-state error for nonlinear time-delay large-scale systems affected by external persistent disturbances is considered. The nonlinear time-delay large-scale systems are decomposed into N nonlinear subsystems. Based on the internal model principle, a disturbance compensator is constructed. The subsystems with external persistent disturbances are transformed into augmented subsystems without disturbances. By using the sensitivity approach, the optimal tracking control law for nonlinear large-scale subsystems can be approximately obtained by solving a sequence of two-point boundary value (TPBV) problems without time-delay. We intercept frontal N terms of optimal tracking control law as an approximate optimal control law. A simulation example demonstrates the validity of the designed approach.

Key words: Nonlinear time-delay large-scale systems; Persistent disturbances; Optimal tracking control; Sensitivity approach

1 引 言

随着现代科技信息化和系统化的发展,越来越多的复杂大系统引起人们的关注. 在大系统的鲁棒控制^[1,2]、稳定性^[3,4]、模型化简^[5,6]、分散和分层控制^[7,8]、最优控制^[9-12]等方面已有许多有价值的成果.

大系统的最优化主要指,按照大系统的最优化目标以及总体系统和各子系统之间的关系,最优地分配各子系统的子目标,并以此控制子系统,从而使总体系统达到最优化. 文献[10,11]利用逐次逼近法^[14]分别研究了一类仿射非线性相似组合大系统的最优控制问题和具有小时滞的线性定常大系统的

次优控制问题. 一般非线性大系统的最优控制问题往往导致一个高阶、耦合和非线性的两点边值问题. 对于一般非线性系统的规范化问题,即使在理想且最简单的情况下,也很难求得解析解^[13]. 这使得研究者们希望找到一些方法,能得到非线性两点边值问题的近似解和非线性互联动态大系统的次优反馈控制.

现实工业过程中,时滞现象十分普遍. 二次性能指标下的时滞系统最优跟踪控制问题必然导致求解既含有时间滞后项又含有时间超前项的两点边值问题,而该两点边值问题很难求得精确解. 因此,研究者的一个重要目标是得到近似最优控制律. 迄今为

收稿日期: 2007-12-03; 修回日期: 2008-03-07.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60574023); 山东省自然科学基金项目(Z2005G01).

作者简介: 唐瑞春(1968—),女,江苏丹阳人,副教授,博士,从事计算机控制理论与控制工程的研究; 吕贤敏(1981—),男,山东烟台人,硕士生,从事线性和非线性大系统的研究.

止,利用近似方法在时滞或非线性系统方面已得到了许多较好的成果^[15,16],但基本都没考虑扰动问题.因此,研究具有外部持续扰动的时滞非线性大系统的最优跟踪控制问题是十分有意义的.

本文使用灵敏度法研究带有持续外部扰动的时滞非线性大系统的最优跟踪控制问题.基于内模原理设计了扰动补偿器,将原系统转化成无扰动的增广系统.利用灵敏度法将原最优跟踪控制问题转化成求解不含时间超前项和时间滞后项的两点边值问题族.通过递归求解两点边值问题序列得到包含精确的非线性状态反馈项和一个时滞补偿项的无静差最优跟踪控制律.通过截取序列有限项的和,近似得到最优跟踪控制律.仿真实例表明了该设计方法的有效性.

2 问题描述

考虑可分解为 N 个互联子系统的受扰非线性大系统,其中第 i 个子系统用如下微分方程描述:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{ii}x_i(t) + A_{ix}(t) + T_ix_i(t - \tau_i) + B_iu_i(t) + f_i(x(t)) + D_iw_i(t), \\ x_i(t) &= x_i(t), y_i(t) = C_ix_i(t), \\ & t \geq 0, i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \tag{1}$$

其中: $x_i \in R^{n_i}, u_i \in R^{r_i}, w_i \in R^l$ 和 $y_i \in R^{p_i}$ 分别是状态向量、控制向量、外部扰动向量和输出向量; $x = [x_1^T \ x_2^T \ \dots \ x_N^T]^T; A_{ii}, B_i, C_i$ 和 D_i 是给定的适当维数常量矩阵; $f_i: C^1(R^{n_i}) \rightarrow U_i \subset R^{n_i}; A_i = [A_{i1} \ \dots \ A_{i, i-1} \ 0 \ A_{i, i+1} \ \dots \ A_{iN}]$; $n_i = n; r_i = r; p_i = p$; τ_i 是时滞项; $x_i(t)$ 是已知的连续初始状态函数.假定 (A_i, B_i) 为完全能控, (A_i, C_i) 为完全可观测,并满足如下匹配性条件:

$$\text{Rank } D_i = \text{Rank } B_i = \text{Rank}(B_i \ D_i) = r. \tag{2}$$

假定系统(1)的输出 $y_i(t)$ 所要跟踪的期望输出 $\bar{y}_i(t)$ 由以下外系统描述:

$$\begin{aligned} \dot{z}_i(t) &= G_iz_i(t), \\ \bar{y}_i(t) &= H_iz_i(t). \end{aligned} \tag{3}$$

其中: $z_i \in R^{m_i}; \bar{y}_i \in R^{p_i}; G_i, H_i$ 是已知适当维数的常量矩阵.作如下假设:

- 1) 系统(3) 是稳定的,但不必是渐近稳定的;
- 2) (G_i, H_i) 完全可观测,并有 $\text{Rank}(H_i) = p$.

本文的目标是求一个最优控制律,使输出跟踪误差

$$e_i(t) = \bar{y}_i(t) - y_i(t) \tag{4}$$

以最优的形式满足 $e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [\bar{y}_i(t) - y_i(t)] = 0$.

由于系统(1) 受到外界持续扰动,控制向量 u 在无静差跟踪系统中不可能趋向于零.因此,无法得到

系统(1) 的传统有限时域二次性能函数.

3 子系统的扰动补偿器设计

基于内模原理构造一个扰动补偿器,从而在形式上消除扰动,将带有扰动的子系统转化为一个无扰动的增广子系统.在该增广系统中,先定义一个控制向量 $\bar{u}_i(t)$ 作为新的控制向量 $u_i(t)$;然后,选一个同时考虑到跟踪误差和增广系统控制律无限时域的二次性能函数,原问题变成设计增广系统最优跟踪控制器的问题.

由式(2) 可知,存在唯一的可逆矩阵 $L_i \in R^{r \times r}$ 使 $D_i = B_iL_i$. 因此,系统(1) 可由下式描述:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= A_{ii}x_i(t) + A_{ix}(t) + T_ix_i(t - \tau_i) + f_i(x(t)) + B_i(u_i(t) + v_i(t)), \\ x_i(t) &= x_i(t), y_i(t) = C_ix_i(t), \\ & t \geq 0, i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $v_i(t) = L_iw_i(t)$.

假设外部扰动 w_i 的动态特性由以下外系统描述:

$$\begin{aligned} \dot{v}_i(t) &= E_iv_i(t), \\ w_i(t) &= F_iv_i(t), \end{aligned} \tag{6}$$

其中 E_i 和 F_i 为已知适当维数的常量矩阵.令

$$\begin{aligned} \bar{u}_i(t) &= u_i(t) + L_iF_iv_i(t), \\ \tilde{u}_i(t) &= \dot{u}_i(t) - L_iF_iE_i(L_iF_i)^{-1}u_i(t), \\ \tilde{x}_i(t) &= \begin{bmatrix} x_i(t) \\ \bar{u}_i(t) \end{bmatrix}, \tilde{f}_i(x(t)) = \begin{bmatrix} f_i(x(t)) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{7}$$

由式(5), (7) 和 (8), 可得一个 $(n + 2r)$ 维的无扰动增广系统,即

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i(t) &= \tilde{A}_{ii}\tilde{x}_i(t) + \tilde{A}_{ix}(t) + \bar{T}_i\tilde{x}_i(t - \tau_i) + \tilde{B}_i\tilde{u}_i(t) + \tilde{f}_i(x(t)), \\ \tilde{y}_i(t) &= \tilde{C}_i\tilde{x}_i(t), \\ & t \geq 0. \end{aligned} \tag{9}$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{ii} &= \begin{bmatrix} A_{ii} & B_i \\ 0 & L_iF_iE_i(L_iF_i)^{-1} \end{bmatrix}, \tilde{A}_{ix} = \begin{bmatrix} A_{ix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{T}_i &= \begin{bmatrix} T_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \tilde{C}_i = \begin{bmatrix} C_i^T \\ 0 \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

这里 I 为单位矩阵.

由式(1) 和 (9) 可得 $\tilde{y}_i(t) = y_i(t)$. 因此,若系统(9) 中的输出 $\tilde{y}_i(t)$ 是 $\bar{y}_i(t)$ 的无静差最优跟踪,则可保证系统(1) 中的 $y_i(t)$ 是 $\bar{y}_i(t)$ 的无静差最优跟踪.选取增广系统(9) 的有限时域二次型性能指标为

$$J_i = \frac{1}{2} e_i^T(t_f) K_i e_i(t_f) + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} [e_i^T(t) Q_i e_i(t) + \tilde{u}_i^T(t) R_i \tilde{u}_i(t)] dt, \tag{10}$$



其中 K_i, Q_i, R_i 为正定矩阵。

至此，原来的无静差最优跟踪控制问题就转化为求得增广系统的最优跟踪控制律 $u_i^*(t)$ ，使性能函数(1)取得最小值。

4 最优跟踪控制器设计

由于 (A_i, B_i) 是完全能控的， (A_i, C_i) 是完全可观测的，可证明 $(\tilde{A}_i, \tilde{B}_i)$ 也是完全能控的， $(\tilde{A}_i, \tilde{C}_i)$ 是完全可观测的。可得

$$\text{Rank}[\tilde{B} \quad \tilde{A}\tilde{B} \quad \tilde{A}^2\tilde{B}] = n + 2r,$$

$$\text{Rank}[\tilde{C}^T \quad \tilde{A}^T\tilde{C}^T \quad (\tilde{A}^T)^2\tilde{C}^T]^T = n + 2r.$$

根据极大值原理，系统(9)关于二次性能指标(10)的无静差最优跟踪控制律

$$\tilde{u}_i^*(t) = -R_i^{-1}\tilde{B}_i^T\lambda_i(t). \quad (11)$$

其中 $\lambda_i(t)$ 是下列两点边值问题的解：

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i(t) &= \tilde{A}_i\tilde{x}_i(t) + \tilde{A}_i\tilde{x}(t) + \tilde{T}_i\tilde{x}_i(t - \tau_i) + \tilde{B}_i u_i(t) + \tilde{f}_i(x(t)), \quad 0 < t \leq t_f; \\ -\dot{\lambda}_i(t) &= \tilde{C}_i^T Q_i \tilde{C}_i \tilde{x}_i(t) - \tilde{C}_i^T Q_i H_i z_i(t) + \tilde{A}_i^T \lambda_i(t) + \tilde{f}_i^T(x(t))\lambda_i(t) + \eta_i(t)\tilde{T}_i\lambda_i(t + \tau_i); \\ \lambda_i(t_f) &= \tilde{C}_i^T K_i \tilde{C}_i \tilde{x}_i(t_f) - \tilde{C}_i^T K_i H_i z_i(t_f), \quad 0 \leq t < f; \\ x_i(t) &= \varphi_i(t). \end{aligned} \quad (12)$$

这里

$$\tilde{f}_i^T(x(t)) = \partial \tilde{f}_i^T(x(t)) / \partial \tilde{x}_i,$$

$$\eta_i = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < t_f - \tau_i; \\ 0, & t_f - \tau_i \leq t < t_f. \end{cases}$$

注意到两点边值问题(12)中既含有时间滞后项又含有时间超前项，还有非线性项。一般而言，对求解带有非线性项和求解带有时间滞后项和时间超前项的问题，很难求得解析解。本文提出了一种利用灵敏度法求解这类既含有时间滞后项又含有时间超前项以及非线性项的两点边值问题。通过灵敏度法可简化增广系统(9)，求得两点边值问题(12)的近似最优跟踪控制律，进而求得原系统(1)的最优跟踪控制律。引入灵敏度参数 ϵ ，构造下列含有灵敏度参数 ϵ 的两点边值问题：

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_i(t, \epsilon) &= \tilde{A}_i\tilde{x}_i(t, \epsilon) + \epsilon \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j(t, \epsilon) + \epsilon \tilde{T}_i\tilde{x}_i(t - \tau_i, \epsilon) + \tilde{B}_i\tilde{u}_i(t, \epsilon) + \epsilon \tilde{f}_i(x(t, \epsilon)), \quad 0 < t \leq t_f; \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_i(t, \epsilon) &= \tilde{C}_i^T Q_i \tilde{C}_i \tilde{x}_i(t, \epsilon) - \tilde{C}_i^T Q_i H_i z_i(t) + \tilde{A}_i^T \lambda_i(t, \epsilon) + \epsilon \tilde{f}_i^T(x(t, \epsilon))\lambda_i(t, \epsilon) + \epsilon \eta_i(t)\tilde{T}_i\lambda_i(t + \tau_i, \epsilon), \quad 0 \leq t < t_f; \\ \lambda_i(t_f) &= \tilde{C}_i^T K_i \tilde{C}_i \tilde{x}_i(t_f) - \tilde{C}_i^T K_i H_i z_i(t_f), \end{aligned} \quad (13b)$$

$$x_i(t) = \varphi_i(t).$$

并且可得

$$\tilde{u}_i(t, \epsilon) = -R_i^{-1}\tilde{B}_i^T\lambda_i(t, \epsilon), \quad (14)$$

其中 $0 \leq \epsilon \leq 1$ 是与 t 无关的灵敏度参数。

假设 $\tilde{x}_i(t, \epsilon), \tilde{x}_i(t, \epsilon), \dot{\lambda}_i(t, \epsilon), \lambda_i(t, \epsilon), \tilde{f}_i(x(t, \epsilon)), \tilde{f}_i^T(x(t, \epsilon)), \tilde{u}_i(t, \epsilon)$ 在 $\epsilon = 0$ 处是无限可微的，则它们的 Maclaurin 级数可分别描述为

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(t, \epsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{x}_i^{(k)}(t), \quad \lambda_i(t, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t), \\ \tilde{f}_i(t, \epsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{f}_i^{(k)}, \quad \tilde{f}_i^T(t, \epsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} (\tilde{f}_i^T)^{(k)}, \\ \tilde{u}_i(t, \epsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{u}_i^{(k)}(t), \end{aligned} \quad (15)$$

其中上标 (k) 表示在 $\epsilon = 0$ 处关于 ϵ 的第 k 阶导数。

假设式(15)中的级数在 $\epsilon = 1$ 处收敛。显然当 $\epsilon = 1$ 时，含有灵敏度参数 ϵ 的两点边值问题(13)等价于确定原系统最优输出跟踪控制的两点边值问题(12)。因此式(15)中的最优跟踪控制律可写为

$$\tilde{u}_i^*(t) = \tilde{u}_i(t, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} u_i^{(k)}(t). \quad (16)$$

最优跟踪控制问题的解可由以下定理给出。

定理 1 最优跟踪问题(9)~(11)的最优控制律 $\tilde{u}_i^*(t)$ 可写成

$$\begin{aligned} \tilde{u}^*(t) &= [\tilde{u}_1^*(t)^T \quad \tilde{u}_2^*(t)^T \quad \dots \quad \tilde{u}_N^*(t)^T]^T, \\ \tilde{u}_i^*(t) &= -R_i^{-1}\tilde{B}_i^T [P_i(t)\tilde{x}_i(t) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} g_i^{(k)}(t) + L_i(t)z_i(t)], \quad i = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (17)$$

其中 $P_i(t)$ 是如下 Riccati 矩阵微分方程的唯一半正定解：

$$\begin{aligned} -\dot{P}_i(t) &= P_i(t)\tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T P_i(t) + \tilde{C}_i^T Q_i \tilde{C}_i - P_i(t)S_i P_i(t), \\ P_i(t_f) &= \tilde{C}_i^T K_i \tilde{C}_i, \end{aligned} \quad (18)$$

这里 $S_i = \tilde{B}_i R_i^{-1} \tilde{B}_i^T$ ； $L_i(t)$ 是如下 Sylvester 矩阵微分方程的解：

$$\begin{aligned} -\dot{L}_i(t) &= L_i(t)G_i + \tilde{A}_i^T L_i(t) - \tilde{C}_i^T Q_i H_i - P_i(t)S_i L_i(t), \\ L_i(t_f) &= -\tilde{C}_i^T K_i H_i; \end{aligned} \quad (19)$$

$g_i^{(k)}(t)$ 是下列共态向量微分方程族的解：

$$\begin{aligned} -\dot{g}_i^{(k)}(t) &= (\tilde{A}_i^T - P_i(t)S_i)g_i^{(k)}(t) + kP_i(t) \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{A}_{ij}x_j^{(k-1)}(t) + \tilde{f}_i^{(k-1)} + \tilde{T}_i^{(k-1)}(t - \tau_i) \right] + k \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m (\tilde{f}_i^T)^{(k-m-1)}(P_i(t)\tilde{x}_i^{(m)}(t) + \end{aligned}$$

$$g_i^{(m)}(t) + k\eta_i(t)\tilde{T}_i[P_i(t + \tau_i)\tilde{x}_i^{(k-1)}(t + \tau_i) + g_i^{(k-1)}(t + \tau_i)],$$

$$g_i^{(k)}(t_f) = 0; \tag{20}$$

$\tilde{x}_i^{(k)}(t)$ 由下列微分方程确定:

$$\dot{\tilde{x}}_i^{(0)}(t) = (\tilde{A}_{ii} - S_i P_i(t))\tilde{x}_i^{(0)}(t) - S_i L_i(t)z_i(t),$$

$$\tilde{x}_i^{(0)}(t) = \varphi_i(t),$$

$$\dot{\tilde{x}}_i^{(k)}(t) =$$

$$(\tilde{A}_{ii} - S_i P_i(t))\tilde{x}_i^{(k)}(t) - S_i g_i^{(k)}(t) +$$

$$k \left[\sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \tilde{A}_{ij} \tilde{x}_j^{(k-1)}(t) + \tilde{T}_i^{(k-1)}(t - \tau_i) + \tilde{f}_i^{(k-1)} \right],$$

$$\tilde{x}_i^{(k)}(t) = \varphi_i(t). \tag{21}$$

证明 将式(15)代入(13a),得

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \dot{\tilde{x}}_i^{(k)}(t) =$$

$$\tilde{A}_{ii} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{x}_i^{(k)}(t) + \epsilon \sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \tilde{A}_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{x}_j^{(k)}(t) +$$

$$\epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{T}_i^{(k)}(t - \tau_i) +$$

$$\epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{f}_i^{(k)} - S_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t).$$

将上式分解,得

$$\dot{\tilde{x}}_i^{(0)}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \dot{\tilde{x}}_i^{(k)}(t) =$$

$$\tilde{A}_{ii} \tilde{x}_i^{(0)}(t) + \tilde{A}_{ii} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{x}_i^{(k)}(t) +$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \tilde{A}_{ij} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{k+1}}{k!} \tilde{x}_j^{(k)}(t) +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{k+1}}{k!} \tilde{T}_i^{(k)}(t - \tau_i) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^{k+1}}{k!} \tilde{f}_i^{(k)} +$$

$$S_i \lambda_i^{(0)}(t) + S_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t). \tag{22}$$

将式(15)代入(13b),得

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \dot{\lambda}_i^{(k)}(t) =$$

$$\tilde{C}_i^T Q_i \tilde{C}_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{x}_i^{(k)}(t) - \tilde{C}_i^T Q_i H_i z_i(t) +$$

$$\tilde{A}_{ii}^T \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t) + \epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} (\tilde{f}_i^T)^{(k)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t) +$$

$$\epsilon \eta_i(t) \tilde{T}_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t + \tau_i).$$

将上式分解,有

$$- \dot{\lambda}_i^{(0)}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \dot{\lambda}_i^{(k)}(t) =$$

$$\tilde{C}_i^T Q_i \tilde{C}_i \tilde{x}_i^{(0)}(t) + \tilde{C}_i^T Q_i \tilde{C}_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \tilde{x}_i^{(k)}(t) -$$

$$\tilde{C}_i^T Q_i H_i z_i(t) + \tilde{A}_{ii}^T \lambda_i^{(0)}(t) + \tilde{A}_{ii}^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t) +$$

$$\epsilon \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} (\tilde{f}_i^T)^{(k)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t) +$$

$$\epsilon \eta_i(t) \tilde{T}_i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t + \tau_i). \tag{23}$$

将式(15)代入(14),得

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \dot{u}_i^{(k)}(t) = -R_i^{-1} \tilde{B}_i^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon^k}{k!} \lambda_i^{(k)}(t). \tag{24}$$

比较式(22)和(23)等号两端 $\epsilon^k (k = 0, 1, \dots)$ 的系数,可得

$$\dot{\tilde{x}}_i^{(0)}(t) = \tilde{A}_{ii} \tilde{x}_i^{(0)}(t) - S_i \lambda_i^{(0)}(t),$$

$$- \dot{\lambda}_i^{(0)}(t) = \tilde{C}_i^T Q_i \tilde{C}_i \tilde{x}_i^{(0)}(t) - \tilde{C}_i^T Q_i H_i z_i(t) +$$

$$\tilde{A}_{ii} \lambda_i^{(0)}(t),$$

$$\lambda_i^{(0)}(t_f) = \tilde{C}_i^T K_i \tilde{C}_i \tilde{x}_i^{(0)}(t_f) - \tilde{C}_i^T K_i H_i z_i(t_f), \tag{25}$$

$$\dot{\tilde{x}}_i^{(k)}(t) = \tilde{A}_{ii} \tilde{x}_i^{(k)}(t) + k \left[\sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \tilde{A}_{ij} \tilde{x}_j^{(k-1)}(t) +$$

$$\tilde{T}_i^{(k-1)}(t - \tau_i) + \tilde{f}_i^{(k-1)} \right] - S_i \lambda_i^{(k)}(t), \tag{26a}$$

$$- \dot{\lambda}_i^{(k)}(t) = \tilde{C}_i^T Q_i \tilde{C}_i \tilde{x}_i^{(k)}(t) + \tilde{A}_{ii}^T \lambda_i^{(k)}(t) +$$

$$k \left[\sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1}^m (\tilde{f}_i^T)^{(k-m-1)} \lambda_i^{(m)}(t) +$$

$$\eta_i(t) \tilde{T}_i \lambda_i^{(k-1)}(t + \tau_i) \right], \tag{26b}$$

$$\lambda_i^{(k)}(t_f) = 0,$$

并有

$$\dot{u}_i^{(k)}(t) = -R_i^{-1} \tilde{B}_i^T \lambda_i^{(k)}(t). \tag{27}$$

下面分析 $u_i^{(k)}(t)$ 的解. 当 $k = 0$ 时,令

$$\lambda_i^{(0)}(t) = P_i(t)x_i^{(0)}(t) + L_i(t)z_i(t). \tag{28}$$

根据式(28)和(25),可得式(18)和(19). 在给定的假设条件下, $P_i(t)$ 是式(18)的唯一正定解. 为了证明式(19)的存在性和唯一性,引入如下引理.

引理 1 当 $X \in R^{n \times m}$, Sylvester 方程

$$JX + XN = G \tag{29}$$

有唯一解,当且仅当

$$\lambda_i(J) + \lambda_j(N) \neq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m, \tag{30}$$

其中 $J \in R^{n \times n}$ 和 $N \in R^{m \times m}$ 为已知矩阵. 根据线性系统的最优控制理论,可得如下不等式:

$$\text{Re}(\lambda_i(A - SP)) < 0. \tag{31}$$

由假设 1) 可得

$$\text{Re}(\lambda_j(F)) \leq 0. \tag{32}$$

因此

$$\lambda_i(A^T - PS) + \lambda_j(F) \neq 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m. \tag{33}$$

根据引理 1, 式(19) 的解 T_i 存在且唯一. 因此 $u_i^{(0)}(t) = -R_i^{-1}B_i^T(P_i(t)x_i^{(0)}(t) + L_i(t)z_i(t))$.

$$\lambda_i^{(k)}(t) = P_i(t)x_i^{(k)}(t) + g_i^{(k)}(t), \quad (35)$$

将式(26a) 代入式(35), 可得

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i^{(k)}(t) &= P_i(t)\dot{x}_i^{(k)}(t) + \dot{g}_i^{(k)}(t) = \\ &P_i(t)\{\tilde{A}_{ij}\tilde{x}_i^{(k)}(t) + k[\sum_{j=1, j \neq i}^{\infty} \tilde{A}_{ij}\tilde{x}_j^{(k-1)}(t) + \\ &\tilde{T}_i^{(k-1)}(t - \tau_i) + \tilde{f}_i^{(k-1)}] - S_i\lambda_i^{(k)}(t)\} + \dot{g}_i^{(k)}(t), \\ &i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (36)$$

将式(35) 代入(26b) 有

$$\begin{aligned} -\dot{\lambda}_i^{(k)}(t) &= \\ &\tilde{C}_i^T Q_i \tilde{C}_i \tilde{x}_i^{(k)}(t) + \tilde{A}_{ii}^T(P_i x_i^{(i)}(t) + g_i^{(k)}(t)) + \\ &k[\sum_{m=0}^{k-1} C_{m-1}^T (\tilde{f}_i^T)^{(k-m-1)}(P_i x_i^{(m)}(t) + g_i(t)) + \\ &\eta_i(t) \tilde{T}_i(P_i x_i^{(k-1)}(t + \tau_i) + g_i(t + \tau_i))], \\ &i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (37)$$

根据式(36) 和(37) 可以得式(20).

根据式(31), 对于任意 t , 有

$$\begin{aligned} g_i(t) &= \\ &k \int_t^{t_f} e^{(A_i^T - PS)(r-t)} + P_i(t) \left[\sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{A}_{ij} x_j^{(k-1)}(r) + \right. \\ &\left. \tilde{f}_i^{(k-1)} + \tilde{T}_i^{(k-1)}(r - \tau_i) \right] + \\ &\sum_{m=0}^{k-1} C_{m-1}^T (\tilde{f}_i^T)^{(k-m-1)} (P_i(t) \tilde{x}_i^{(m)}(r) + g_i^{(m)}(r)) + \\ &\eta_i(r) \tilde{T}_i [P_i(r + \tau_i) \tilde{x}_i^{(k-1)}(r + \tau_i) + g_i^{(k-1)}(r + \tau_i)], \\ &i = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (38)$$

其中 $x^{(k-1)}$ 和 g_{i-1} 是已知项. 由式(25), (26) 和(38) 可知, $g^{(i)}(t)$ 和 $x^{(i)}(t)$ 可通过递归算法计算得到. 将式(35) 代入(27), 得

$$u_i^{(k)}(t) = -R_i^{-1}B_i^T(P_i(t)x_i^{(k)}(t) + g_i^{(k)}(t)), \quad k = 1, 2, \dots. \quad (39)$$

由式(14) ~ (16), (28) 和(39) 可得形如式(17) 的最优跟踪控制律. □

注 1 式(17) 中的无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} g_i(t)$ 很难精确求解. 在实际工程中, 可通过用正整数 T 替换 ∞ 得到一个近似最优跟踪控制律. 从而可得如下 T 次逼近的次优跟踪控制律:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{iT}^*(t) &= -R_i^{-1} \tilde{B}_i^T (P_i(t) \tilde{x}_i(t) + \\ &\sum_{k=0}^T \frac{1}{k!} g_i^{(k)}(t) + L_i(t) z_i(t)). \end{aligned} \quad (40)$$

注 2 在式(29) 中, 含有外系统(3) 的状态变

量 $z_i(t)$, 它是物理不可实现的. 可通过设计一个扰动观测器预估外系统的状态向量 $z(t)$. 取扰动观测器为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_i(t) &= (G_i - M_i H_i) \hat{z}_i(t) + M_i \bar{y}_i(t), \\ \hat{z}_i(0) &= z_i(0), \end{aligned} \quad (41)$$

其中 M 是增益矩阵. 可选择增益矩阵 M 使状态观测器(30) 的极点配置在左半根平面希望的位置. 由此可得, 系统(1) 的动态输出跟踪控制律为

$$\begin{aligned} v_{iT}(t) &= \\ &L_i F_i E_i (L_i F_i)^{-1} v_{iT}(t) + R_i^{-1} \tilde{B}_i^T [P_i(t) \tilde{x}_i(t) + \\ &\sum_{k=0}^T \frac{1}{k!} g_{ik}(t) + L_i(t) \hat{z}_i(t)], \\ u_{iT}^*(t) &= V_{iT}(t). \end{aligned} \quad (42)$$

近似最优跟踪控制律 $\tilde{u}_i^*(t)$ 的仿真算法如下:

Step1: 由 Riccati 矩阵微分方程(18) 求得唯一半正定时变矩阵 $P_i(t)$.

Step2: 由矩阵微分方程(19) 求得唯一时变矩阵 $L_i(t)$.

Step3: 令 $T = 0, J_{-1} = \infty$, 给定允许相对误差 σ .

Step4: For $k = 0$ to T , 由共态向量微分方程(20) 求得共态向量序列 $g_i^{(k)}(t)$, 由状态方程(21) 求得 $\tilde{x}_i^{(k)}(t) (k = 1, 2, \dots, T)$.

Step5: 将

$$\tilde{u}_i^*(t) = -R_i^{-1} \tilde{B}_i^T (P_i(t) \tilde{x}_i(t) + \sum_{k=0}^T \frac{1}{k!} g_i^{(k)}(t) + L_i(t) z_i(t)) \quad (43)$$

代入式(10) 得 J . 令 $J_T = J$.

Step6: if $|J_T - J_{T-1}| / J_T < \sigma$, then 由式(42) 求得近似最优跟踪控制律, end; else $T = T + 1$, 转 Step4.

5 实例仿真

考虑带有持续扰动的非线性大系统(1), 其中

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1.8 & 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T, D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix},$$

$$f(x_1(t)) = \begin{bmatrix} 0.5x_1x_2 \\ 0.3x_2^2 \end{bmatrix},$$

$$f(x_2(t)) = \begin{bmatrix} 0.4x_1x_2 \\ 0.2x_2^2 \end{bmatrix},$$

$$z_{10} = 1, z_{20} = 1, z_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, z_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

考虑期望输出外系统(3), 其中

$$G_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -0.5 & -1.2 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -0.8 & -2 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$z_{10} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, z_{20} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

考虑扰动外系统(6), 其中: $E_1 = E_2 = 1, w_1(0) = w_2(0) = 0$.

在式(10)描述的性能指标中, $Q_i = K_i = R_i =$

1. 取控制精度 $\epsilon = 0.1$, 当 $|(J_T - J_{T-1})/J_T| < \epsilon$ 时,

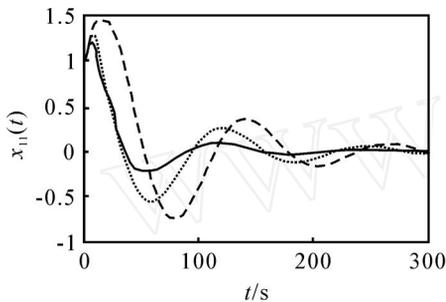


图 1 状态分量 $x_{11}(t), x_{12}(t)$ 变化曲线

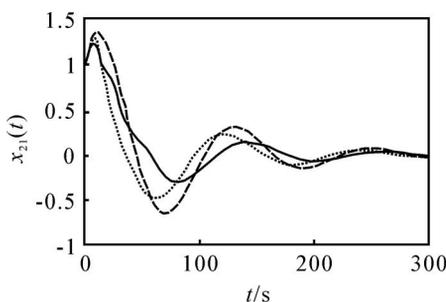


图 2 状态分量 $x_{21}(t), x_{22}(t)$ 变化曲线

认为已获得满足精度要求的最优控制律.

图 1 ~ 图 4 分别表示了系统状态向量 $x_{11}(t), x_{12}(t), x_{21}(t), x_{22}(t)$, 系统控制律 $u_1(t), u_2(t)$ 和系统输出误差 $e_1(t), e_2(t)$ 的仿真曲线. 其中: 长划线代表 $k = 1$ 时各个变量的变化曲线, 点划线代表 $k = 2$ 时各个变量的变化曲线, 实线代表 $k = 3$ 时各个变量的变化曲线. 从图中很明显可看出, 随着叠加次数的增大, 系统性能越来越好.

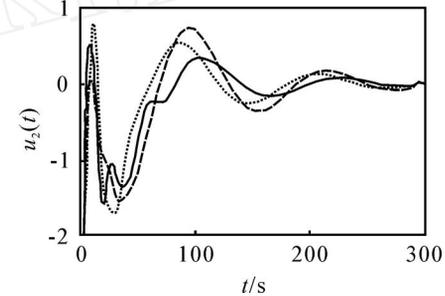
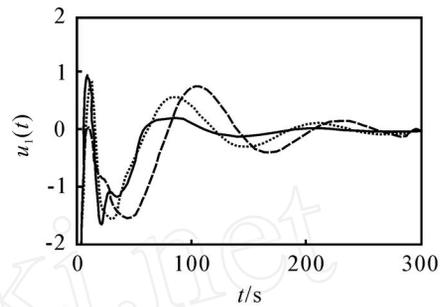


图 3 控制律 $u_1(t), u_2(t)$ 曲线

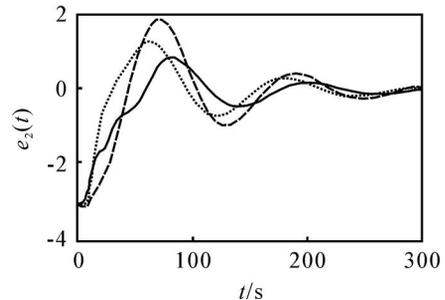
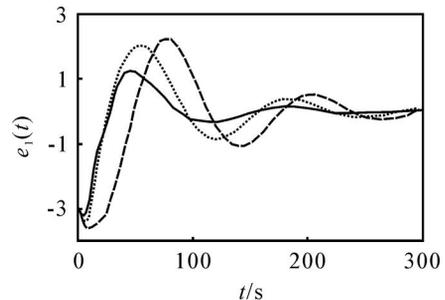


图 4 系统输出误差 $e_1(t), e_2(t)$ 变化曲线

表 1 表示系统的二次性能指标. 从表中可看出 $J_0 > J_1 > J_2$, 即性能指标随叠加次数增加而减小, 并趋于一个稳定的最优性能指标 J^* . 从表中也可看出, 随着叠加次数的增加, 性能指标相对误差逐渐减小. 当 $T = 2$ 时, 满足控制精度要求. 因此, 可认为

$u_2(t)$ 为近似无静差最优跟踪控制律。

表 1 各阶性能指标值及控制精度

叠加次数 T	性能指标 J_T	$ J_T - J_{T-1} / J_T$
0	46.3105	/
1	27.3861	0.6910
2	26.0640	0.0507

从仿真曲线和计算结果都可看出,本文方法设计的最优跟踪控制律收敛速度较快,控制精度较高,较适用于受扰的非线性大系统。

6 结 论

本文研究了带有持续扰动时滞非线性大系统的最优跟踪控制问题。首先,将时滞非线性大系统分解成 N 个时滞非线性子系统,然后,对第 i 个时滞非线性子系统设计增广系统,从形式上消除扰动项;最后,将时滞非线性受扰子系统转化为无扰动的时滞非线性子系统。原问题转化为求解无扰动的时滞非线性大系统的最优跟踪控制问题。由灵敏度法可得增广子系统的最优跟踪控制律,进而求得原时滞非线性大系统的最优跟踪控制律。利用灵敏度法较好地解决了求解带有持续扰动的时滞非线性大系统的最优跟踪控制律的问题,并推广到该系统的无静差最优跟踪控制律问题。仿真结果表明,该算法对带有持续扰动时滞非线性大系统最优跟踪控制律的设计是有效的。

参考文献(References)

[1] Xie Y F, Gui W H, Jiang Z H. Decentralized robust H output feedback controller design for value bounded uncertain large-scale interconnected systems[J]. Control and Decision, 2006, 21(7) : 819-822.

[2] Hsiao Feng-Hsiang, Hwang Jung-Dong, Chen Cheng-Wu, et al. Robust stabilization of nonlinear multiple time-delay large-scale systems via decentralized fuzzy control [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2005, 13(1) : 152-163.

[3] Chiou J-S. Stability analysis for a class of switched large-scale time-delay systems via time-switched method [J]. Control Theory and Applications, 2006, 153(6) : 684-688.

[4] Gallivan K, Rao X, Van Dooren, et al. Singular Riccati equations stabilizing large-scale systems [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 415(2/3) : 359-372.

[5] Lin Shieh-Shing, Chang Huay. A decomposition-

technique-based algorithm for nonlinear large scale mesh-interconnected system and application[J]. IEICE Trans on Fundamentals of Electronics, 2006, E89-A(10) : 2847-2856.

[6] Gugercin, Serkan, Antoulas, et al. Model reduction of large-scale systems by least squares[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2006, 415(2/3) : 290-321.

[7] Chen W S, Li J M. Adaptive neural network decentralized control for nonlinear time-delay large-scale systems[J]. Control and Decision, 2006, 21(8) : 873-878.

[8] Yousef H, El-Madbouly E, Eteim D, et al. Adaptive fuzzy semi-decentralized control for a class of large-scale nonlinear systems with unknown interconnections [J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2006, 16(15) : 687-708.

[9] Tang G Y, Sun L. Successive approximation procedure of optimal control for nonlinear similar composite systems[J]. Control and Decision, 2005, 20(1) : 82-87.

[10] Tang G Y, Sun L. Optimal control for nonlinear interconnected large-scale systems — A successive approximation approach [J]. Acta Automatic Sinica, 2005, 31(2) : 248-254.

[11] 唐功友,王芳. 具有小时滞的线性大系统的次优控制 [J]. 控制理论与应用, 2003, 20(1) : 121-124. (Tang G Y, Wang F. Suboptimal control for linear large-scale systems with small time-delay [J]. Control Theory and Applications, 2003, 20(1) : 121-124.)

[12] Zazi Malka, Elalami N. Decentralized optimal stabilization of large-scale systems with prescribed degree of convergence [J]. WSEAS Trans on Systems, 2006, 5(8) : 1792-1796.

[13] Lu P F, Tang G Y, Jia X B, et al. Successive approximation approach of suboptimal control for nonlinear time-delay systems[J]. Control and Decision, 2004, 19(2) : 230-234.

[14] Tang G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach [J]. Systems and Control Letters, 2005, 54(5) : 429-434.

[15] Cimen T, Banks S P. Nonlinear optimal tracking control with application to super-tankers for autopilot design[J]. Automatica, 2004, 40(1) : 1845-1863.

[16] Tang G Y, Wang H H. Suboptimal control for discrete linear systems with time-delay: A non-delay conversion approach[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(3) : 419-426.