

文章编号: 1001-0920(2008)12-1368-05

## 基于积分流形的柔性机械手组合控制

张袅娜<sup>1,2</sup>, 张德江<sup>1</sup>, 冯 勇<sup>2</sup>

(1. 长春工业大学 电气学院, 长春 130012; 2. 哈尔滨工业大学 电气学院, 哈尔滨 150001)

**摘要:** 为解决柔性机械手非最小相位的控制问题以及克服运动中的抖振, 采用积分流形和奇异摄动理论, 将柔性机械手系统分解为快慢两个子系统. 对于慢变子系统, 设计一种基于一阶鲁棒微分估计器的二阶滑模控制策略, 使其轨迹跟踪期望值; 对于快变子系统, 采用频率成形滤波器设计动态补偿器来抑制弹性振动, 并基于线性二次型最优控制方法给出相应的最优控制规律, 使系统的输出快速趋于稳定. 仿真结果表明了该控制策略的有效性.

**关键词:** 奇异摄动; 滑模; 柔性机械手; 积分流形

**中图分类号:** TP24 **文献标识码:** A

## Combination control of flexible manipulator based on integral manifolds

ZHANG Niao-na<sup>1,2</sup>, ZHANG De-jiang<sup>1</sup>, FENG Yong<sup>2</sup>

(1. Department of Automation, Changchun University of Technology, Changchun 130012, China; 2. Department of Electrical Engineering, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China. Correspondent: ZHANG Niao-na, E-mail: zhangniaona@163.com)

**Abstract:** To address its non-minimum phase characteristics and suppress the oscillation of a two-link flexible manipulator, integral manifolds and the singular perturbation approach are used to decompose the robots into a slow subsystem and a fast subsystem. Second-order sliding mode control strategy based on differential estimator is proposed for the slow subsystem. The rigid motion tracks a desire trajectory using second-order sliding mode control. The dynamic compensator using frequency-shaping filter for the fast subsystem is studied in order to attenuate the oscillatory of the link. The optimal control strategy is proposed based on linear quadratic stabilize the fast system. Simulation results show the effectiveness of the design.

**Key words:** Singular perturbation; Sliding mode; Flexibility manipulator; Integral manifolds

### 1 引言

柔性机械手是强耦合、非线性、时变、多输入多输出的分布参数系统,且本身所固有的振动特性,动力学行为非常复杂,其系统控制不仅要实现柔性臂末端轨迹的精确跟踪,同时需快速解决柔性臂振动问题. 高阶滑模控制是一种消除抖振滑模控制方法<sup>[1-5]</sup>,而且对参数摄动和干扰具有鲁棒性,通过合理设计控制器,系统中的抖振现象可以完全消除,并不影响滑模控制器其他方面所具有的优点.

本文以易于控制的关节电机转角作为系统输出,采用积分流形和奇异摄动理论将柔性机械臂系统分解为快慢两个子系统<sup>[6]</sup>. 对于慢变子系统,采用

一阶鲁棒微分估计器,设计基于非奇异终端滑模<sup>[7]</sup>的二阶滑模控制器,使其轨迹渐近跟踪期望值. 对于快变子系统,基于频率成形滤波器,设计最优控制规律,使系统的输出快速趋于稳定值,在保证跟踪精度的同时快速抑制振动.

### 2 柔性机械手的动力学模型

本文采用假设模态函数为时变的形式,利用 Lagrange 方程推导出的双臂柔性机械手动力学模型. 该模型描述较精确,可应用于实际系统. 模型结构如图 1 所示. 其中:  $O X_0 Y_0$  为固定的参考坐标,  $O X_1$  和  $O X_2$  为视两个柔性机械手臂为刚性时的中心线,  $O X_1 Y_1$  和  $O X_2 Y_2$  为分别绕中心  $O$  和  $O$  旋转

收稿日期: 2007-10-14; 修回日期: 2007-12-20.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60474016).

作者简介: 张袅娜(1972—),女,长春人,副教授,博士,从事变结构控制、鲁棒控制的研究;冯勇(1962—),男,南京人,教授,博士生导师,从事变结构控制、鲁棒控制等研究.

的局部坐标.

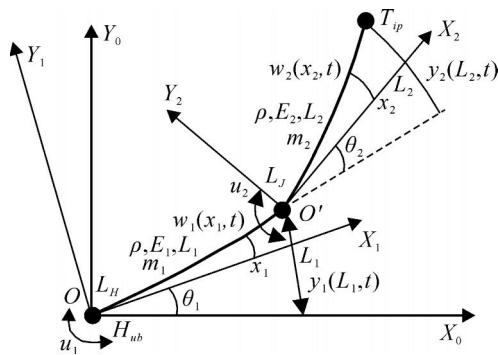


图 1 双臂柔性机械手模型示意图

双臂柔性机械手的动力学方程简述如下:

$$\begin{cases} M_r \ddot{q} + M_{rf} \ddot{q} + f_r + E_1 \dot{q} = u, \\ M_{rf}^T \ddot{q} + M_f \ddot{q} + f_f + E_2 \dot{q} + Kq = 0. \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $R^2$  为关节电机转角向量,  $q \in R^{2r}$  为柔性模态向量,  $u \in R^2$  为控制转矩向量,  $f_r \in R^2$  和  $f_f \in R^{2r}$  分别为受重力、哥氏力和离心力影响的项,  $E_1 \in R^{2 \times 2}$  和  $E_2 \in R^{2r \times 2r}$  分别为正定阻尼矩阵,  $K \in R^{2r \times 2r}$  为正定刚度矩阵,  $M = [M_r \ M_{rf}; M_{rf}^T \ M_f]$   $\in R^{(2r+1) \times (2r+1)}$  为正定惯量矩阵,  $r$  为柔性模态的个数.

柔性机械手的端点位移为

$$y(L, t) = L + \sum_{j=1}^r \phi_j q_j(t) = L + \phi^T q(t). \quad (2)$$

### 3 采用积分流形与奇异摄动理论分解系统

首先采用积分流形和奇异摄动法,将柔性机械手的运动控制分解成两种不同时间尺度的子系统:等效刚性臂运动的慢变子系统和抖振抑制的快变子系统;然后对快慢子系统分别设计控制器,目的是在保证跟踪精度的同时能快速抑制柔性臂的抖振.

下面首先建立奇异摄动模型<sup>[1]</sup>,定义

$$H(\epsilon, q) = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} = M^{-1}(\epsilon, q). \quad (3)$$

将柔性机械臂系统方程(1)简写为如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -H_{12} E_2 \dot{q} - H_{11} f_r - H_{12} f_f - H_{12} Kq + H_{11} u, \\ \dot{z}_2 &= -H_{22} E_2 \dot{q} - H_{21} f_r - H_{22} f_f - H_{22} Kq + H_{21} u. \end{aligned} \quad (4)$$

引入新变量  $x_1 = z_1$ ,  $x_2 = z_2$ ,  $z_1 = \epsilon^{-1} z_1$ ,  $z_2 = \epsilon^{-1} z_2$ . 其中  $\epsilon$  是奇异摄动参数,相当于边界层的厚度,定义  $\epsilon^{-1} = 1/\min(\|H_{220} K\|)$  为比例因子<sup>[8]</sup>,  $H_{220} = H_{22}(\epsilon, 0)$ . 将上述新的状态变量代入系统方程(4),得

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= a(x_1, x_2, z_1, z_2) - A(x_1, z_1) z_1 + H_{11}(x_1, z_1) u; \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= b(x_1, x_2, z_1, z_2) - B(x_1, z_1) z_1 + H_{21}(x_1, z_1) u. \end{aligned} \quad (6)$$

式中:  $x_1, x_2 \in R^2$ ,  $z_1, z_2 \in R^{2r}$ . 且

$$\begin{aligned} a(x_1, x_2, z_1, z_2) &= -H_{11} f_r - H_{12} f_f - H_{12} E_2 z_2, \\ b(x_1, x_2, z_1, z_2) &= -H_{21} f_r - H_{22} f_f - H_{22} E_2 z_2; \\ A(x_1, z_1) &= \min(\|H_{220} K\|^{-1} H_{12}(x_1, z_1) K), \\ B(x_1, z_1) &= \min(\|H_{220} K\|^{-1} H_{22}(x_1, z_1) K). \end{aligned}$$

定义慢变子系统控制输入分量为  $u_s$ , 快变子系统控制输入分量为  $u_f$ , 则组合控制  $u = u_s + u_f$ , 且在慢变子系统中  $u_f$  为零.

下面推导慢变子系统的数学模型. 首先设系统的不变流形  $z = h(x, u)$ , 其中:  $z^T = [z_1^T, z_2^T]$ ,  $h$  是  $x$  和  $u$  的足够光滑的函数. 因为多数情况下不能精确求解出  $z$ , 所以可采用在  $\epsilon = 0$  展开的 Taylor 级数上任意逼近  $h(x, u)$ , 得

$$z_1 : h_1(x, u) = h_{10} + h_{11} + \epsilon^2 h_{12} + o(\epsilon^3), \quad (7)$$

$$z_2 : h_2(x, u) = h_{20} + h_{21} + \epsilon^2 h_{22} + o(\epsilon^3), \quad (8)$$

$$u_s = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + o(\epsilon^3). \quad (9)$$

将式(7) ~ (9)代入(6),按  $\epsilon$  的同次幂项系数相等求解,得

$$h_{10} = B^{-1}(x_1, 0) (b(x_1, 0, 0) + H_{21}(x_1, 0) u_0),$$

$$h_{11} = B^{-1}(x_1, 0) H_{21}(x_1, 0) u_1,$$

$$h_{12} =$$

$$B^{-1}(x_1, 0) \left( -\dot{h}_{21} + \frac{\partial b}{\partial q} \Big|_{q, \dot{q}=0} h_{10} + \right.$$

$$\left. \frac{\partial b}{\partial q} \Big|_{q, \dot{q}=0} h_{21} - \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial B}{\partial q_i} \Big|_{q=0} h_{10i} \right) h_{10} + \right.$$

$$\left. H_{21}(x_1, 0) u_2 + \left( \sum_{i=1}^m \frac{\partial H_{21}}{\partial q_i} \Big|_{q=0} h_{10i} \right) u_0 \right),$$

$$h_{20} = 0, h_{21} = \dot{h}_{10}, h_{22} = \dot{h}_{11}.$$

将所求得的  $z$  代入式(5),得到慢变子系统的数学模型,忽略  $o(\epsilon^2)$  项,有

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= M_{r0}^{-1} (-f_{r0} + u_0 + u_1). \end{aligned} \quad (10)$$

式中:  $M_{r0}, f_{r0}$  表示  $\epsilon = 0$  时的慢变分量;  $u_0$  和  $u_1$  是慢变子系统新的输入. 可见,慢变子系统的动力学方程与刚性机械臂动力学方程具有相同的形式. 因此,

慢变子系统代表了整个柔性机械臂的刚性部分<sup>[9]</sup>。

为了推导快变子系统的数学模型,定义如下状态变量:

$$\tilde{z}_1 = z_1 - (h_{10} + h_{11} + {}^2 h_{12}), \quad (11)$$

$$\tilde{z}_2 = z_2 - (h_{20} + h_{21} + {}^2 h_{22}), \quad (12)$$

式中变量上加“~”表示的是精确的快变量  $z$  偏离系统不变流形的差值. 将式(11)和(12)代入系统方程(6),并引入快变时间尺度  $\tau = t^{-1}$ ,忽略  $o(\tau^2)$  项,得

$$\begin{aligned} d\tilde{z}_1/d\tau &= \tilde{z}_2, \\ d\tilde{z}_2/d\tau &= -B(x_1, 0)\tilde{z}_1 + H_{210}u_f + o(\tau). \end{aligned} \quad (13)$$

可见,快变子系统是线性系统.

综上所述,采用奇异摄动理论可将系统(1)分解为慢变子系统(10)和快变子系统(13).实际系统输出与两个子系统输出之间的关系如下:

$$\begin{aligned} y_s &= Lx_1 + {}^2 h_{10}, \\ y_f &= {}^2 z_1. \end{aligned} \quad (14)$$

忽略  $o(\tau^2)$  项,则实际系统的输出为  $y = y_s = Lx_1$ .

## 4 柔性机械臂控制器设计

### 4.1 慢变子系统二阶滑模控制器设计

设  $u_0 = f_{r0} + M_{r0}v_0$ ,  $u_1 = M_{r0}v_1$ . 代入式(10),得系统的状态方程如下:

$$\ddot{x}_1 = v_0 + v_1, \quad (15)$$

式中  $v_0$  和  $v_1$  为系统新的输入. 令  $v_1 = Cv_0$ ,代入式(15),得  $\ddot{x}_1 = v_0 + Cv_0$ . 其中  $C$  为设计矩阵,满足  $v_0 + Cv_0 = 0$  渐近稳定,因此本文选取  $C = I$ .

设系统端点位移期望的轨迹为  $y_d$ ,则关节矢量的期望轨迹为  $Lx_d = y_d$ . 令  $e = x_1(t) - x_d(t)$ ,针对系统(15),分别提出如下积分型滑模面和非奇异终端滑模

$$s(t) = k_p e + k_1 \int_0^t e dt + k_D \dot{e}, \quad (16)$$

$$l(t) = \mu s^{p/q} + s. \quad (17)$$

式中:  $\mu > 0$ ,  $p$  和  $q$  为奇数,且  $2 > p/q > 1$ ;  $k_p, k_1, k_D$  为需要设计的滑模面系数.

为实现慢变子系统(15)在有限时间内跟踪期望轨迹,提出如下二阶滑模控制策略设计定理:

**定理 1** 对于慢变子系统(15),令  $v_0 + Cv_0 = v_s$ ,选取积分型滑模面(16)和终端滑模(17),如果采取控制策略(18),则系统(10)渐近跟踪任意有界期望的  $n$  阶可微信号  $x_d(t)$ .

$$\begin{aligned} w &= k_p v_s + k_D \dot{v}_s, \\ w &= w_{eq} + w_n, \\ w_{eq} &= k_p \ddot{x}_d - k_1(x_2 - \dot{x}_d) + k_D \ddot{x}_d - \frac{q}{\mu} s^{2-p/q}, \\ w_n &= -\text{sgn}(l) - kl. \end{aligned} \quad (18)$$

式(18)的控制策略需用到滑模面  $s$  的一阶微分,而在实际系统的应用中,状态测量不可避免地含有噪声,因而理想的微分运算不能在控制系统中直接应用. 本文通过一阶鲁棒微分估计器<sup>[1,2]</sup>获得滑模面  $s$  的一阶微分估计值  $\hat{s}$ ,用其代替  $\dot{s}$ . 滑模状态  $s(t)$  一阶滑模微分估计器设计如下:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= 0, \\ \dot{s}_0 &= s_1 - s_0 / \tau - s_i / \tau^{1/2} \text{sign}(s_1 - s_i); \\ \dot{s}_1 &= -s_1 \text{sign}(s_1 - s_0), \\ \hat{s}_i(t) &= s_i. \end{aligned}$$

式中:  $s_0$  和  $s_1$  为设计参数,  $i = 1, 2$ .

**证明** 定义 Lyapunov 函数  $V(t) = 0.51^T(t)l(t)$ ,求得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= 1^T \dot{l} = 1^T (\mu p q^{-1} s^{p/q-1} \dot{s} + \dot{s}) = \\ &= 1^T (p q^{-1} \mu s^{p/q-1} (\dot{s} + q(\mu p)^{-1} s^{2-p/q})) = \\ &= 1^T (\mu p q^{-1} s^{p/q-1} (w - k_p \ddot{x}_d + k_1(x_2 - \dot{x}_d) - \\ &= 1^T \mu p q^{-1} s^{p/q-1} (-\text{sgn}(l) - kl) \\ &= \mu p q^{-1} s^{p/q-1} (-|l| - kl^2). \end{aligned}$$

根据李亚普诺夫稳定定理,系统将在有限时间到达并保持滑模状态  $l = 0$ ,而  $s$  也将在有限时间内到达并保持二阶滑模状态,此后  $e$  将渐近收敛到零. 因此,  $x_1(t)$  可在有限时间内跟踪到信号  $x_d(t)$ .

### 4.2 基于频率成形滤波器的快变子系统最优控制器设计

将快变子系统(10)重写为如下形式:

$$\dot{z}_1 = A_{11} \tilde{z}_1 + A_{12} \tilde{z}_2, \quad (19)$$

$$\dot{z}_2 = A_{21} \tilde{z}_1 + A_{22} \tilde{z}_2 + B_2 u_f. \quad (20)$$

式中:  $A_{11} = 0, A_{12} = I, A_{21} = -B(x_1, 0), A_{22} = 0, B_2 = H_{210}$ .

本文基于频率成形滤波器<sup>[10]</sup>,采用二次性能指标优化的方法设计最优控制策略. 首先选择二次性能指标函数

$$J = \int_0^\infty (\tilde{z}^T Q \tilde{z} + u_f^T R u_f) dt, \quad (21)$$

式中  $Q$  和  $R$  是常值权矩阵,满足  $Q \geq 0, R > 0$ . 根据 Parseval's 原理,式(21)可重写为如下形式:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} (\tilde{z}^*(j\omega) Q(j\omega) \tilde{z}(j\omega) + u_f^*(j\omega) R(j\omega) u_f(j\omega)) d\omega. \quad (22)$$

式中:  $*$  和  $u_f^*$  分别是  $\tilde{z}$  和  $u_f$  的复数共轭转置矩阵,在整个频域  $\omega$  内,满足  $Q(\omega) = R^{2r \times 2r} \geq 0, R(\omega) = R^{2 \times 2} > 0$ . 本文将  $R(\omega)$  选作具有高通频率特性的滤波器,以抑制输入信号的高频分量,起到去除抖振的

作用. 选取  $Q(w) = I, R(jw) = w_2^*(jw)w_2(jw)$ , 其中  $w_2(jw)$  为需要设计的高通滤波器的频率响应函数, 则式(22) 可重写为如下形式:

$$J = \int_0^{\infty} (\tilde{z}^* Q \tilde{z} + \tilde{u}^* \tilde{u}) dt, \quad (23)$$

式中  $\tilde{u}(s) = w_2(s) u_f(s)$ ,  $w_2(s)$  是  $w_2(jw)$  的傅立叶逆变换. 对应滤波器的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{u}} &= A_{w_2} \tilde{u} + B_{w_2} u_f, \\ \tilde{u} &= C_{w_2} \tilde{u} + D_{w_2} u_f. \end{aligned} \quad (24)$$

式中:  $A_{w_2}, B_{w_2}, C_{w_2}, D_{w_2}$  为设计矩阵.

采用高通滤波器后, 组合系统的状态方程如下:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u_f, \quad (25)$$

其中

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{w_2} & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$x_c = \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \end{bmatrix}, B_c = \begin{bmatrix} B_{w_2} \\ 0 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

对于系统(25), 二次性能指标更改为如下形式:

$$J = \int_0^{\infty} (x_c^T Q_c x_c + 2x_c^T N_c u_f + u_f^T R_c u_f) dt. \quad (26)$$

式中:  $Q_c = \text{diag}(C_{w_2}^T C_{w_2}, Q)$ ,  $N_c = [C_{w_2}^T D_{w_2}, 0]^T$ ,  $R_c = D_{w_2}^T D_{w_2}$ . 由最优控制原理, 求得使性能指标  $J(u_f)$  取得极小值时的快变子系统的控制为

$$\begin{aligned} u_f &= - (K_c + R_c^{-1} N_c^T) x_c, \\ K_c &= R_c^{-1} B_c^T P_c, \end{aligned} \quad (27)$$

式中  $P_c$  是下面黎卡提方程的解:

$$\begin{aligned} (A_c - B_c R_c^{-1} N_c^T)^T P_c + P_c (A_c - B_c R_c^{-1} N_c^T) - \\ P_c B_c R_c^{-1} B_c^T P_c + (Q_c - N_c^T R_c^{-1} N_c) = 0. \end{aligned}$$

可见, 通过采用奇异摄动理论将系统分解为慢变子系统和快变子系统, 对两子系统分别设计控制策略(18)和(27), 可使系统跟踪给定参考信号.

### 5 仿真研究

下面用仿真实例进行分析. 奇异摄动参数  $\epsilon = 0.0377$ ; 机械臂的参数如下:  $L_1 = L_2 = 0.8 \text{ m}$ ,  $m_1 = 1.1718 \text{ kg/m}$ ,  $m_2 = 0.5859 \text{ kg/m}$ ,  $M_{n1} = 0.5 \text{ kg}$ ,  $M_{n2} = 0 \text{ kg}$ ,  $J_1 = 2.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $J_2 = 0.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $J_h = 0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $EI_1 = 544.32 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ,  $EI_2 = 68.04 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ; 系统状态初始值选取如下:  $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0.5$ , 其余选为 0; 跟踪的参考信号为:  $x_{d1} = 1.25 - (7/5)e^{-t} + (7/20)e^{-4t}$ ,  $x_{d2} = 1.25 + e^{-t} - (1/4)e^{-4t}$ ; 滑模面参数:  $p = 5, q = 3, k_p = 5, k_1 = 0.05, k_D = 1, r = 1$ . 对于快变子系统, 高通滤波器设计如下:

$$w_{21}(jw) = \left( \frac{10(jw + 0.5)}{jw + 5} \right)^2,$$

$$w_{22}(jw) = \left( \frac{0.05jw + 1}{0.025jw + 1} \right)^2.$$

仿真结果如图 2 ~ 图 5 所示: 图 2 和图 3 分别为两个机械臂的跟踪误差, 可见关节转角能跟踪给定轨迹; 图 4 和图 5 为两个柔性臂的控制输入, 由仿真结果可见, 它们有效地削弱了抖振.

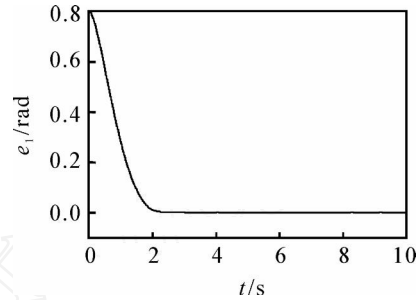


图 2 第 1 个臂关节转角的跟踪误差

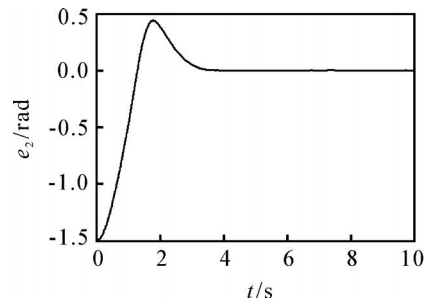


图 3 第 2 个臂关节转角的跟踪误差

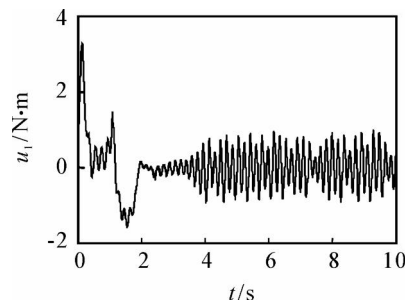


图 4 第 1 个臂的控制输入  $u_1$

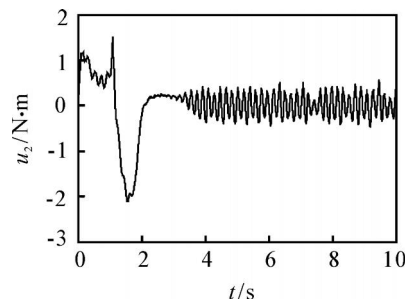


图 5 第 2 个臂的控制输入  $u_2$

### 6 结 论

根据积分流形和奇异摄动方法, 将柔性机械臂的运动控制分解为慢变的等效刚性臂运动控制和快

变的振动控制. 对于慢变子系统, 基于鲁棒滑模微分估计器设计二阶滑模控制, 使系统状态跟踪期望的轨迹, 保留了滑模的鲁棒性和易于实现的特点, 有效地去除了抖振和信号噪声. 对于快变子系统, 采用动态补偿器抑制输入信号的高频分量, 设计最优控制规律, 使柔性模态快速趋于稳定值. 仿真结果表明, 本文提出的混合控制方法, 在保证刚性轨迹精确跟踪期望值的同时, 弹性振动得到了有效抑制.

### 参考文献(References)

- [1] Levant A. Universal single-input-single-output (SISO) sliding-mode controllers with finite-time convergence [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2001, 46(9): 1447-1451.
- [2] Levant A. Quasi-continuous high-order sliding-mode controllers[C]. Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control Maui. Hawaii, 2003: 4605-4610.
- [3] Levant A. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control[J]. Int J of Control, 2003, 76(9/10): 924-941.
- [4] Xu J X, Lee T H, Pan YJ. On the sliding mode control for DC servo mechanisms in the presence of unmodeled dynamics [J]. Mechatronics, 2003, 13(7): 755-770.
- [5] Bartolini G, Pisano A, Punta E, et al. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems[J]. Int J of Control, 2003, 76(9): 875-892.
- [6] Bruno Siciliano, Wayne J Book. A singular perturbation approach to control of lightweight flexible manipulators [J]. The Int J of Robotics Research, 1988, 7(4): 79-90.
- [7] Feng Y, Bao S, Yu X. Inverse dynamics terminal sliding mode control of two-link flexible manipulators [C]. Proc of the 3rd Int DCDIS Conf on Engineering Applications and Computational Algorithms. Gueph, Ontario, 2003: 52-57.
- [8] Hashtrudi-Zaad K, Khorasani K. Control of nonminimum phase singularly perturbed systems with applications to flexible link manipulators [J]. Int J of Control, 1996, 63(4): 679-701.
- [9] Sanz A, Etxebarria V. Composite robust control of a laboratory flexible manipulator [C]. Decision and Control, 2005 European Control Conf. CDC-ECC '05. 44th IEEE Conf on Plazade Espana Seville, 2005: 3614-3619.
- [10] Anderson B D O, Moore J B, Mingori D L. Relations between frequency-dependent control and state weighting in LQG problems[J]. Proc of IEEE Conf on Decision and Control, 1983, 22: 612-617.
- [9] 刘飞, 张曦煌.  $L_2$  增益约束下跳变系统鲁棒控制[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(13): 1030-1037. (Liu F, Zhang X H. Robust control for jump systems with  $L_2$  gain constraints [J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(13): 1030-1037.)
- [10] 刘飞, 苏宏业, 褚健. 含参数不确定性的马尔可夫跳变过程鲁棒正实控制[J]. 自动化学报, 2003, 29(5): 761-766. (Liu F, Su H Y, Chu J. Robust positive real control of Markov jump systems with parametric uncertainties [J]. Acta Automatica Sinica, 2003, 29(5): 761-766.)
- [11] 徐琰恺, 陈曦. 模态跳变概率可控的 Markov 跳变线性系统的优化[J]. 控制与决策, 2008, 23(3): 246-250. (Xu Y K, Chen X. Optimization of Markov jump linear system with controlled jump probabilities of modes[J]. Control and Decision, 2008, 23(3): 246-250.)
- [12] Bradtke S J, Ydstie B E, Barto A G. Adaptive linear quadratic control using policy iteration [C]. Proc of American Control Conf. Maryland, 1994: 3475-3479.
- [13] Hagen S, Krose B. Linear quadratic regulation using reinforcement learning[C]. Proc of Belgian-dutch Conf on Machine Learning. Wageningen, 1998: 39-46.
- [14] Al-Tamimi A, Lewis F L, Abu-Khalaf M. Model-free  $Q$ -Learning designs for linear discrete-time zero-sum games with application to  $H$ -infinity control [J]. Automatica, 2007, 43(3): 473-481.
- [15] Costa O, Aya J. Monte Carlo TD( ) methods for the optimal control of discrete-time Markovian jump linear systems[J]. Automatica, 2002, 38(2): 217-225.
- [16] Sutton R S, Barto A G. Reinforcement learning: An introduction [M]. Cambridge: The MIT Press, 1998.
- [17] Goodwin G C, Sin K S. Adaptive filtering prediction and control[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1984.
- [18] Zhang K J, Xu Y K, Chen X, et al. Policy iteration based feedback control[J]. Automatica, 2008, 44(4): 1055-1061.

(上接第 1362 页)