第 23 卷 第 12 期 控 制 与 决 策 2008 年 12 月
Vol. 23 No. 12 Control and Decision Dec. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)12-1423-04

基于集对分析的不确定多属性决策方法

杨俊杰, 周建中, 方仍存, 刘 力
(华中科技大学 水电与数字化工程学院, 武汉 430074)

摘 要: 提出一种基于集对分析的多属性决策方法. 该方法具有如下特点: 能够有效处理决策过程中的不确定因素; 基于可能势的联系数排序能够准确反映联系数间的同一对立程度, 并能利用联系数的差异度对排序结果进行稳定性分析; 用联系数决策矩阵的概念来刻画备选方案与正、负理想方案组成集对的同一对立程度, 并以此为依据实现多属性决策. 实例计算表明, 该方法是求解不确定多属性决策问题的一种有效工具.

关键词: 集对分析; 多属性决策; 联系数; 不确定性
中图分类号: TP18 **文献标识码**: A

Uncertain multi-attribute decision making methods based on set pair analysis

YANG Jun-jie, ZHOU Jian-zhong, FANG Reng-cun, LIU Li
(School of Hydropower and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China. Correspondent: YANG Jun-jie, E-mail: yangjunjie1998@yahoo.com.cn)

Abstract: The new multi-attribute decision making (MADM) methods based on set pair analysis are proposed. The methods can effectively deal with the uncertain factors in decision making process. The ranking methods based on relatively certainty probability power can accurately depict the identity-contrary degree of the connection numbers and analyze the reliability of the ranking result by the discrepancy degree of connection numbers. Connection number decision matrix can obtain the identity-contrary degree of the set pairs structured by alternative schemes and ideal scheme, and is the core of MADM. Simulation results show that the proposed method is an effective tool to solve the uncertain multi-attribute decision making problems.

Key words: Set pair analysis; Multi-attribution decision-making; Connection number; Uncertainties

1 引 言

如何有效处理决策过程中的不确定信息是多属性决策研究中的重要内容[1,2]. 传统方法是将不确定信息转换为确定信息, 因而决策结果的可信度不高[3], 对决策结果也很难作进一步的分析比较, 达不到柔性决策的要求. 集对分析为不确定性信息的处理提供了一种新的思路, 它重视信息处理中的相对性和模糊性, 从问题本身分离出相对确定性信息和相对不确定性信息, 在相对确定条件下进行决策, 然后利用相对不确定性信息对决策结果进行稳定性分析[3]. 集对分析的应用已取得一定的成果[4-6], 但尚缺乏系统深入的研究.

本文深入研究了集对分析联系数的排序和联系数决策矩阵的实现方法, 并在此基础上提出了基于集对分析多属性决策问题的实现方法.

2 集对分析及其联系数的排序

集对分析(SPA)用同异反联系数(简称联系数)统一描述系统中的各种不确定性, 其基本定义如下[7]:

$$\mu = a + bi + cj. \tag{1}$$

式中: a, b 和 c 分别称为 μ 的同一度、差异度和对立度; i 和 j 仅作为标记, 即表示 b 是差异度, c 是对立度, 并以这两个标记称之为联系数.

在基于集对分析的多属性决策方法中, 通过联系数的排序来描述备选方案与理想方案间的同一对立程度. 目前大多文献中的排序方法主要有势级排

收稿日期: 2007-09-30; **修回日期**: 2007-12-25.
基金项目: 国家自然科学基金项目(50539140); 水利部公益性行业科研项目(200701008).
作者简介: 杨俊杰(1969—), 男, 湖北利川人, 副教授, 博士后, 从事现代决策理论与方法等研究; 周建中(1959—), 男, 武汉人, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统分析的先进理论与方法的研究.

序[7] 和相对贴近度方法[3] ,但都存在排序结果不合理、不能进行稳定性分析等问题. 本文提出的联系数排序方法,能够准确地刻画联系数间的同一对立程度.

定义 1 设联系数 $\mu = a + bi + cj$,则:

1) μ的相对确定可能势 $P(\mu)$ 为

$$P(\mu) = \frac{2a}{b+c} - \frac{c}{a+b}; \tag{2}$$

2) μ的相对乐观可能势 $P_o(\mu)$ 为

$$P_o(\mu) = \frac{2a+\gamma b}{(1-\gamma)b+c} - \frac{c}{a+b}; \tag{3}$$

3) μ的相对悲观可能势 $P_p(\mu)$ 为

$$P_p(\mu) = \frac{2a}{b+c} - \frac{c+\gamma b}{a+(1-\gamma)b}. \tag{4}$$

式中:γ为不确定演化因子,$\gamma \in [0,1]$. 式(2) ~ (4) 中的第 1 项代表系统中同一趋势所占比例,第 2 项则代表对立趋势所占比例. $P(\mu)$ 为 $P_o(\mu)$ 和 $P_p(\mu)$ 中 γ为 0 的特例.

$P(\mu)$ 不考虑 b的变化所带来的影响,$P_o(\mu)$ 认为 b有向同一度转变的趋势,$P_p(\mu)$ 则认为 b有向对立度转移的趋势. $P_o(\mu)$ 和 $P_p(\mu)$ 能反映系统在演化过程中不确定因素向同一度和对立度转变的趋势. 联系数的可能势越大,所刻画系统的同一度趋势越大;反之,则对立度趋势越大.

基于 $P(\mu)$ 的排序不受不确定因素的影响,所以是稳定的. 基于 $P_o(\mu)$ 和 $P_p(\mu)$ 的排序,当 γ在 $[0,1]$ 间变化时,会影响排序结果的稳定性,因此需在 γ变化时对排序结果的稳定性进行分析.

1) γ对 $P_o(\mu)$ 排序的稳定性分析

设两联系数在 $\gamma = 0$时的排序名次为 k和 l,记两联系数为μ_k和μ_l,排序结果为 $P_o^k(\mu) < P_o^l(\mu)$,代入式(3),有

$$\frac{2a_k}{b_k+c_k} - \frac{c_k}{a_k+b_k} < \frac{2a_l}{b_l+c_l} - \frac{c_l}{a_l+b_l}. \tag{5}$$

当 $\gamma \neq 0$时,设排序结果保持不变,将 $P_o^k(\mu) < P_o^l(\mu)$ 代入式(3),则

$$\frac{2a_k+\gamma b_k}{(1-\gamma)b_k+c_k} - \frac{c_k}{a_k+b_k} < \frac{2a_l+\gamma b_l}{(1-\gamma)b_l+c_l} - \frac{c_l}{a_l+b_l}. \tag{6}$$

求解式(5) 和(6) ,可得到保持排序结果不变的γ的容许范围为

$$0 < \gamma < \min\left\{1, \frac{a_lb_l(1-a_k)^2 - a_kb_k(1-a_l)^2}{a_lb_lb_k - a_kb_kb_l}\right\}. \tag{7}$$

2) γ对 $P_p(\mu)$ 排序的稳定性分析

设两联系数在 $\gamma = 0$下的排序名次为 k和 l,排序结果为 $P_p^k(\mu) < P_p^l(\mu)$. 当 $\gamma \neq 0$时,排序结果不变,代入式(4) ,有

$$\frac{2a_k}{b_k+c_k} - \frac{c_k+\gamma b_k}{a_k+(1-\gamma)b_k} < \frac{2a_l}{b_l+c_l} - \frac{c_l+\gamma b_l}{a_l+(1-\gamma)b_l}. \tag{8}$$

求解式(5) 和(8) ,可得保持排序结果不变的 γ的容许范围为

$$0 < \gamma < \min\left\{1, \frac{b_l(1-c_k)^2 - b_k(1-c_l)^2}{b_lb_k(c_l-c_k)}\right\}. \tag{9}$$

对于基于 $P_o(\mu)$ 或 $P_p(\mu)$ 的一组排序结果,用式(7) 或(9) 对联系数两两计算其γ的容许范围,分析排序结果的稳定性,以寻求更多合理的排序结果.

3 联系数决策矩阵

联系数决策矩阵用来刻画各备选方案与理想方案组成的集对在相对接近程度意义下的同一对立趋势. 理想方案包括正理想方案和负理想方案.

多属性决策问题可描述为 $D(A,U,W,F)$. 其中:有限备选方案集 $A = \{A_l\}$,$l = 1,2,\cdots,n$;有限属性集$U = \{U_k\}$;属性权重$W = \{w_k\}$,$k = 1,2,\cdots,m$;决策矩阵 $F = \{f_{kl}\}_{m\times n}$. 与 F对应的相对优属度矩阵为$R = \{r_{kl}\}_{m\times n}$,记 $R = \{R_1,\cdots,R_l,\cdots,R_n\}$,其中 R_l 为第 l 个备选方案的相对优属度向量,$R_l = \{r_{1l},r_{2l},\cdots,r_{ml}\}^{\mathrm{T}}$.

3.1 与正理想方案相对接近程度法

设 R 的正理想方案为 $R^+ = \{r_k^+\}$,$r_k^+ = \max\limits_{l=1,\cdots,n}(r_{kl})$,$k = 1,2,\cdots,m$. 集对$\{r_{kl},r_k^+\}$ 在相对接近程度意义下的联系数定义为

$$\mu_{kl}^+ = \frac{r_{kl}}{r_k^+} + \left(\frac{r_k^+ - r_{kl}}{r_k^+}\right)j. \tag{10}$$

式中:等号右边的两项分别为 μ_{kl}^+ 的同一度 a_{kl}^+ 和对立度c_{kl}^+,差异度 $b_{kl}^+ = 0$. μ_{kl}^+是对集对$\{r_{kl},r_k^+\}$的一种相对确定性的同一对立刻画,r_{kl} 越接近 r_k^+,μ_{kl}^+的同一度越大,对立度越小;反之,同一度越小,对立度越大. 当 $r_{kl} = r_k^+$ 时,$\mu_{kl}^+ = 1 + 0j$,表示集对$\{r_{kl},r_k^+\}$完全确定.

备选方案 f_l 与正理想方案组成的集对$\{R_l,R^+\}$在相对接近程度意义下的联系数为

$$\mu_l^+ = \left(\sum_{k=1}^m w_k \cdot a_{kl}^+\right) + \left(\sum_{k=1}^m w_k \cdot c_{kl}^+\right)j. \tag{11}$$

式中:μ_l^+ 的第1分量为同一度 a_l^+,第2分量为对立度c_l^+.

3.2 与负理想方案相对接近程度法

设 R 的负理想方案为 $R^- = \{r_k^-\}$,$r_k^- = \min\limits_{l=1,\cdots,n}(r_{kl})$,$k = 1,2,\cdots,m$. 集对$\{r_{kl},r_k^-\}$ 在相对接近程度意义下的联系数定义为

$$\mu_{kl} = \frac{r_k^-}{r_{kl}} + \left(\frac{r_{kl} - r_k^-}{r_{kl}}\right) j, \quad (12)$$

式中 μ_{kl} 的两项分别为同一度 a_{kl}^- 和对立度 c_{kl}^+. μ_{kl} 是对集对 $\{r_{kl}, r_k^-\}$ 的一种相对确定性的同一对立刻画, r_{kl} 越远离 r_k^-, μ_{kl} 的同一度越小,对立度越大;反之,同一度越小,对立度越大. 当 $r_{kl} = r_k^-$ 时, $\mu_{kl} = 1 + 0j$,表示集对 $\{r_{kl}, r_k^-\}$ 完全确定.

备选方案 f_l 与负理想方案组成的集对 $\{R_l, R^-\}$ 在相对接近程度意义下的联系数为

$$\mu_l = \left(\sum_{k=1}^{m} w_k \cdot a_{kl}^-\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} w_k \cdot c_{kl}^-\right) j. \quad (13)$$

式中: μ_l 第 1 分量为同一度 a_l^-,第 2 分量为对立度 c_l^-.

3.3 综合理想方案法

在一些决策问题中,接近正理想方案的备选方案不一定同时远离负理想方案[3],而且前面 2 种方法得到的联系数都是确定的,不能对决策结果进行稳定性分析. 本文的综合理想方案法将系统地考虑这两方面的因素.

式(10) 的 a_{kl}^+ 和式(12) 的 c_{kl}^- 分别表示 r_{kl} 接近 r_k^+ 和远离 r_k^- 的趋势, c_{kl}^+ 和 a_{kl}^- 则表示 r_{kl} 远离 r_k^+ 和接近 r_k^- 的趋势. 用 $a_{kl}^+ \times c_{kl}^-$ 评价 r_{kl} 对 r_k^+ 的接近程度和对 r_k^- 的远离程度,用 $c_{kl}^+ \times a_{kl}^-$ 评价 r_{kl} 对 r_k^+ 的远离程度和对 r_k^- 的接近程度. 刻画 r_{kl} 在区间 $[r_k^-, r_k^+]$ 上接近 r_k^+ 并远离 r_k^- 的联系数为

$$\mu_{kl} = \left(\frac{r_{kl}}{r_k^+} - \frac{r_k^-}{r_k^+}\right) + \left(1 - \frac{r_{kl} + 2r_k^-}{r_k^+} - \frac{r_k^-}{r_{kl}}\right) i + \left(\frac{r_k^-}{r_{kl}} - \frac{r_k^-}{r_k^+}\right) j, \quad (14)$$

式中 μ_{kl} 的 3 个分量分别为 a_{kl}, b_{kl} 和 c_{kl}.

式(14) 中:当 $r_{kl} = r_k^+$ 时, $a_{kl} + b_{kl} = 1$,其中 $a_{kl} = (r_k^+ - r_k^-)/r_k^+$ 取得最大值;当 $r_{kl} = r_k^-$ 时, $c_{kl} + b_{kl} = 1$, $c_{kl} = (r_k^+ - r_k^-)/r_k^+$ 取得最大值,但此时联系数的同一度(或对立度) 小于 1,也就是说在判断同一性和对立性上具有不确定性,这也说明联系数对系统不确定性的刻画方法与传统的模糊数学不同,联系数的这种性质称为两级刻画的模糊性[3].

备选方案 f_l 在相对接近程度意义下基于综合理想方案的联系数为

$$\mu_l = \left(\sum_{k=1}^{m} w_k \cdot a_{kl}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} w_k \cdot b_{kl}\right) i + \left(\sum_{k=1}^{m} w_k \cdot c_{kl}\right) j, \quad (15)$$

式中 μ_l 的 3 个分量分别为同一度 a_l,差异度 b_l 和对立度 c_l.

4 决策方法

4.1 决策步骤

Step1: 计算目标优属度矩阵.

Step2: 根据问题的特点和决策需求,选择式(11),(13) 或(15) 中的一种方法,计算联系数决策矩阵,得到各个备选方案的决策联系数值.

Step3: 用式(2) ～(4) 计算各备选方案决策联系数的 $P(\mu)$, $P_o(\mu)$ 和 $P_p(\mu)$,并以此为依据对备选方案进行排序. 对联系数决策矩阵中的任意两备选方案,用式(7) 或(9) 计算其 γ 的容许变化范围值 $\Delta\gamma$. 对 $\Delta\gamma$ 按升序排序,根据不同的 $\Delta\gamma$ 区间得到所有可能的排序结果. 如果 $\Delta\gamma$ 最小值不小于 1,则表明排序结果是稳定的.

4.2 实例分析

用文献[2] 中的例 3.9(最佳防御要点选择问题) 检验本文方法的有效性. 该问题有 6 个目标、5 个备选方案. 其中:目标 f_3, f_4 和 f_5 属于效益型; f_1 属于成本型; f_2 属于固定型. 各个防御要点的目标值由决策矩阵 F 给出.

$$F = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1250 & 750 & 1370 & 1250 & 2200 \\ 250 & 984 & 766 & 1861 & 2161 \\ 0.34 & 0.23 & 0.39 & 0.36 & 0.29 \\ 83 & 110 & 130 & 234 & 176 \\ 14 & 25 & 10 & 26 & 14 \\ \text{中等} & \text{好} & \text{差} & \text{好} & \text{差} \end{bmatrix} \end{array}. \quad (16)$$

经专家评判确定,各目标的权重向量为

$$w = (0.24, 0.18, 0.18, 0.12, 0.12, 0.16)^T. \quad (17)$$

将式(16) 变换为目标相对优属度矩阵[2],则

$$R = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.60 & 1.0 & 0.55 & 0.60 & 0.34 \\ 0.55 & 0.79 & 0.70 & 0.72 & 0.62 \\ 0.87 & 0.59 & 1.0 & 0.92 & 0.74 \\ 0.35 & 0.47 & 0.56 & 1.0 & 0.75 \\ 0.54 & 0.95 & 0.38 & 1.0 & 0.54 \\ 0.75 & 1.0 & 0.50 & 1.0 & 0.50 \end{bmatrix} \end{array}. \quad (18)$$

由式(18) 得到正负理想方案为

$$R^+ = (1.00, 0.79, 1.00, 1.00, 1.00, 1.00), \quad (19)$$

$$R^- = (0.34, 0.55, 0.59, 0.35, 0.38, 0.5). \quad (20)$$

基于与正、负理想方案相对接近程度法的计算结果如表 1 所示.

表 1 基于与正负理想方案相对接近程度法的决策结果

备选方案	与正理想方案相对接近法 a	与正理想方案相对接近法 c	$P(\mu)$	与负理想方案相对接近法 a	与负理想方案相对接近法 c	$P(\mu)$
A_1	0.6527	0.3473	3.2269	0.7492	0.2508	5.6391
A_2	0.8566	0.1434	11.7796	0.6043	0.3957	2.3992
A_3	0.6643	0.3357	3.4522	0.7510	0.2490	5.7003
A_4	0.8737	0.1263	13.6845	0.5565	0.4435	1.7131
A_5	0.5909	0.4091	2.1959	0.6836	0.3164	3.8591
结果	$A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5$			$A_4 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_3$		

从表 1 可看出,在与正理想方案相对接近法的计算结果中,方案 A_3 比 A_5 更接近正理想方案,但在与负理想方案相对接近法的结果中,方案 A_5 比 A_3 更远离负理想方案,说明接近正理想方案的备选方案不一定同时远离负理想方案. 与正理想方案相对接近法的结果与文献[2]的最小隶属度偏差法、最大隶属度偏差法、相对比值法的 $q = 1$ 和极大极小法的计算结果相同.

基于综合理想方案法的各备选方案决策联系数及排序结果如表 2 所示.

表 2 基于综合理想方案法的决策结果

备选方案	联系数 a	联系数 b	联系数 c	$P(\mu)$	$P_o(\mu)$ ($\gamma = 0.6114$)	$P_p(\mu)$ ($\gamma = 1.00$)
A_1	0.2864	0.4713	0.2423	0.4829	1.7039	-0.7113
A_2	0.4788	0.4142	0.1070	1.7175	4.3990	0.5791
A_3	0.2908	0.4632	0.2460	0.4938	1.7038	-0.7111
A_4	0.4992	0.4173	0.0835	1.9025	5.0116	0.7935
A_5	0.2212	0.4586	0.3202	0.0971	0.9792	-1.1300

根据 $P(\mu)$ 的排序结果为 $A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5$,由式(7)计算得到 $P_o(\mu)$ 中 γ 的容许变化范围有 $[0, 0.6113]$ 和 $[0.6113, 1]$. 因此,得到基于 $P_o(\mu)$ 的两种排序结果分别为 $A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5$ 和 $A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$. 由式(9)计算得到 $P_p(\mu)$ 中的 γ 值大于 1,因而基于 $P_p(\mu)$ 的排序结果是稳定的,同 $P(\mu)$.

5 结 论

基于集对分析的多属性决策,对不确定因素采取客观承认、系统分析的方法,克服了传统方法将不确定因素转换为确定因素所带来的不利影响. 本文首先提出了联系数基于可能势的排序方法,并给出了使排序结果保持稳定的不确定演化因子的计算方法;然后提出了联系数决策矩阵的 3 种实现方法:与正、负理想方案相对接近程度法以及综合理想方案法,后者能够准确反映备选方案接近正理想方案且远离负理想方案的程度;最后给出了基于集对分析决策方法的实现步骤,并通过一个实例计算,表明了所提出方法的有效性.

参考文献(References)

[1] 贺金凤, 徐济超, 吴卫东. 不确定性多属性决策中的 ER 方法改进[J]. 控制与决策, 2006: 21(4): 385-390.
(He J F, Xu J C, Wu W D. Improvement of evidential reasoning approach for multiple attribute decision making under uncertainty [J]. Control and Decision, 2006: 21(4): 385-390.)

[2] 李登峰. 模糊多目标多人决策与对策[M]. 北京: 国防工业出版社, 2003.
(Li D F. Fuzzy multi-objective multi-person decision making and game [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2003.)

[3] 张斌. 多目标系统决策的模糊集对分析方法[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 17(12): 108-114.
(Zhang B. The fuzzy set pair analysis way of multi-objective system decision [J]. Systems Engineering Theory & Practice, 1997, 17(12): 108-114.)

[4] Su H S, Mi G S. Set pair analysis applied for identifying power transformer faults [C]. Int Conf on Machine Learning and Cybernetics. Dalian, 2006: 1708-1713.

[5] Dong L, Li G G, He Z X. Pattern recognition based on all set theory and SPA in complex system innovative computing [C]. 1st Int Conf on Information and Control. Beijing, 2006: 204-208.

[6] Huang D C, Zhao K Q. Uncertainty network planning methodology based on the connection number $a + bi + cj$ [C]. 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou, 2004: 2863-2866.

[7] 赵克勤. 集对分析及其初步应用[M]. 杭州: 浙江科学技术出版社, 2000.
(Zhao K Q. Set pair analysis and its preliminary applications [M]. Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press, 2000.)