第 23 卷 第 12 期 控 制 与 决 策 2008 年 12 月
Vol. 23 No. 12 Control and Decision Dec. 2008

文章编号: 1001-0920(2008)12-1432-03

基于依参数 Lyapunov 函数的不确定系统鲁棒稳定控制

欧阳高翔, 倪茂林, 孙承启
(北京控制工程研究所 空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100190)

摘 要: 采用依参数 Lyapunov 函数方法,对一类含不确定参数的连续线性系统进行鲁棒稳定控制器设计. 通过引入合适的松弛变量扩大参数寻优空间,从而降低系统设计的保守性. 此外,为进一步增加系统设计的自由度,对上述松弛变量进行参数化,从而获得保守性更低的稳定条件. 仿真结果表明,所提出的控制器设计方法与现有方法相比对不确定参数具有更好的鲁棒性.

关键词: 依参数 Lyapunov 函数; 不确定系统; 松弛变量
中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Robust stability design of linear systems with uncertain parameters using parameter-dependent Lyapunov functions

OUYANG Gao-xiang, NI Mao-lin, SUN Cheng-qi
(National Laboratory of Space Intelligent Control, Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China. Correspondent: OUYANG Gao-xiang, E-mail: oygx210@163.com)

Abstract: Based on parameter dependent Lyapunov functions, this paper presents a sufficient robust stability condition for a class of linear systems with polytopic type uncertainty. A new structure of slack variables is introduced to provide extra freedoms in the solution space, which results in reduction of conservatism. In addition, the slack variables are parameterized in order to obtain the less conservative condition for the uncertain systems. Simulation results show the superiority of the method proposed in this paper.

Key words: Parameter dependent Lyapunov function; Uncertain systems; Slack variables

1 引 言

含不确定参数系统的鲁棒分析与综合问题一直是控制界的研究热点,而对于该问题的研究,目前大多采用 Lyapunov 稳定理论,其中二次稳定是一个非常重要的概念和方法[1]. 但是,二次稳定条件要求系统状态所有可能的轨线只存在单一 Lyapunov 变量,这种限制过于苛刻,因此二次稳定是一个较为保守的概念[2]. 若能根据变化的参数选择不同的 Lyapunov 函数,则可以大大降低系统设计的保守性. 因此,不少学者通过将 Lyapunov 变量参数化而获得一类依参数 Lyapunov 函数的稳定条件[3,4],相对于单一 Lyapunov 函数的稳定条件,其系统保守性得到明显改善.

另外,基于二次稳定理论的鲁棒控制器设计具有明显的凸性特点[5],因此诸如 LMI 等凸优化技术已成为目前普遍采用的数学工具. 鉴于优化计算和矩阵的结构特点,Oliverra 等[6]首次在不确定系统的鲁棒分析与综合中通过引入松弛变量,达到降低系统设计保守性的目的. 此后又有很多学者在这方面进行了大量研究[7,8].

本文在文献[9]的基础上,通过引入适量的松弛变量来增加系统设计的自由度,从而改善原有结果的保守性. 这种松弛 LMI 结构的处理方式,其本质是扩大了优化计算的寻优空间,从而可获得保守性更低的鲁棒稳定条件.

2 问题描述和理论准备

考虑如下含有不确定参数 θ 的连续线性系统:

$$\dot{x}(t) = A(\theta)x(t) + B(\theta)u(t). \qquad (1)$$

其中: $x(t) \in R^n$ 是系统状态变量; $u(t) \in R^m$ 是系统控制输入; 系统参数矩阵 A 和 B 都是含有变参数 θ

收稿日期: 2007-09-15; **修回日期**: 2008-02-28.
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(60774002,90405017).
作者简介: 欧阳高翔(1977—),男,四川攀枝花人,博士生,从事鲁棒控制、容错控制的研究; 孙承启(1943—),男,浙江湖州人,教授,博士生导师,从事航天器制导、导航与控制技术等研究.

的不确定性矩阵,为书写方便,将二元组(A_i, B_i)记为S_i. 假定构成系统(1)的不确定参数矩阵组(A, B)是集合Ω中基元的凸组合,即

$$\Omega \triangleq \mathrm{Co}\{S_1, S_2, \cdots, S_E\} = \left\{\sum_{i=1}^{E} v_i S_i; v_i \geq 0, \sum_{i=1}^{E} v_i = 1, i = 1, 2, \cdots, E\right\}. \tag{2}$$

其中:S_i是集合Ω中的基元,E是基元个数. 将满足式(2)的不确定模型称为多胞模型[2].

引理 1[10]　对于任何对称矩阵$Q = Q^{\mathrm{T}}$,矩阵F以及一个定义在紧集上的实矩阵集合$\mathcal{H}$,下面两种表述等价:

1) 对于$\forall H \in \mathcal{H}$, $\forall \xi \neq 0$且$HF\xi = 0$使

$$\xi^{\mathrm{T}} Q \xi < 0; \tag{3}$$

2) 对于$\forall H \in \mathcal{H}$,存在一个$\Theta = \Theta^{\mathrm{T}}$使

$$Q + F^{\mathrm{T}} \Theta F < 0,\ N_H^{\mathrm{T}} \Theta N_H \geq 0. \tag{4}$$

上述引理实际上是对 Finsler 定理[11]的一种推广,并且式(3)和(4)利用了无损 S-Procedure[2].

引理 2[12]　以下不等式表述的两个条件等价:

$$\Phi + A\Pi B + B^{\mathrm{T}}\Pi^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} < 0, \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \\ \hline B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{cc|cc} \Phi & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & T & S \\ 0 & 0 & S^{\mathrm{T}} & R \end{array}\right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & A \\ \hline B & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} I \\ \Pi \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T & S \\ S^{\mathrm{T}} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ \Pi \end{bmatrix} \geq 0. \tag{6}$$

其中:矩阵T和R是对称矩阵,S是任意方阵.

引理 3[9]　对于采用凸胞模型(2)描述的参数不确定系统(1),在参数摄动时保持系统渐近稳定的充分条件是:存在正定矩阵P_j和J_{ij},对称矩阵Q_i和矩阵U以及正标量α,使

$$\begin{bmatrix} \Pi_0 & B_i M & 0 \\ * & -U-U^{\mathrm{T}} & \alpha P_j - U \\ * & * & -J_{ij} \end{bmatrix} < 0, \tag{7}$$

其中$\Pi_0 = A_i P_j + P_j A_i^{\mathrm{T}} + B_i M + M^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} + Q_j - Q_i + J_{ij}$. 则变参数多胞系统(1)的状态反馈增益矩阵为$K = \alpha M U^{-1}$. 这里正标量$\alpha$是系数指示标度,选择合适的数值可增大 Lyapunov 变量P_j的范数值,改善鲁棒稳定条件的保守性.

3　状态反馈控制器设计

针对凸胞模型(2)描述的参数不确定系统(1),下面给出本文的主要结果.

定理 1　对于变参数多胞系统(1),若存在正定对称矩阵P_j和J_{ij},对称矩阵T和R以及矩阵$M, U, S, Q_i (i, j = 1, 2, \cdots, N)$,标量$\alpha > 0$,使

$$\begin{bmatrix} T_0 & * & * & * \\ 0 & -U-U^{\mathrm{T}} & * & * \\ 0 & \alpha P_j - U^{\mathrm{T}} & -J_{ij} & * \\ M + S^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} & M & 0 & R \end{bmatrix} < 0, \tag{8}$$

其中$T_0 = A_i P_j + P_j A_i^{\mathrm{T}} + Q_j - Q_i + J_{ij} + B_i T B_i^{\mathrm{T}}$,并同时满足$T + S^{\mathrm{T}} + S + R \geq 0$. 则参数不确定系统(1)在鲁棒稳定时的状态反馈增益阵为$K = \alpha M U^{-1}$.

证明　考虑如下不等式:

$$\begin{bmatrix} B_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F [M \quad M \quad 0] + \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}} \\ M^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} F [B_i^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0] + \begin{bmatrix} \Psi & 0 & 0 \\ * & -U-U^{\mathrm{T}} & P_j - U \\ * & * & -J_{ij} \end{bmatrix} < 0. \tag{9}$$

其中:$\Psi = A_i P_j + P_j A_i^{\mathrm{T}} + Q_j - Q_i + J_{ij}$, F是一个适维的对称矩阵. 根据引理 2 可知,不等式(9)等价于

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{K} \\ \hline \tilde{B}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \left[\begin{array}{cc|cc} \Xi & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & T & S \\ 0 & 0 & S^{\mathrm{T}} & R \end{array}\right] \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{K} \\ \hline \tilde{B}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} T & S \\ S^{\mathrm{T}} & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix} \geq 0. \tag{10}$$

其中

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Psi & 0 & 0 \\ * & -U-U^{\mathrm{T}} & P_j - U \\ * & * & -J_{ij} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{K} = [M \quad M \quad 0]^{\mathrm{T}},\ \tilde{B}_i = [B_i^{\mathrm{T}} \quad 0 \quad 0].$$

令$F = I$,这里I是单位矩阵,按文献[9]给出的改善系统鲁棒稳定条件保守性的数值处理方法,用αP_j替代Ξ中的P_j,则条件(10)化简后可写成条件(8),并满足$T + S^{\mathrm{T}} + S + R \geq 0$. 考虑当$F = I$,且条件(8)满足时,由条件(9)与(8)的等价关系和引理 3 得到的状态反馈增益阵$K = \alpha M U^{-1}$,使变参数多胞系统(1)鲁棒稳定. □

在不等式(8)中已引入了松弛变量T, S和R,这些松弛变量能增加控制器设计的自由度,进而降低系统设计的保守性. 应该指出的是,这种增加松弛变量的方法会增加一定的计算代价,但本文中鲁棒控制器的求解计算都是离线计算.

需特别说明的是:当满足条件$R < 0$时,由 Schur 补引理[2],条件(8)可进一步写成

$$\begin{bmatrix} T_0 & * & * \\ 0 & -U-U^{\mathrm{T}} & * \\ 0 & \alpha P_j - U^{\mathrm{T}} & -J_{ij} \end{bmatrix} -$$

$$\begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}} + B_i S \\ M^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1} (*)^{\mathrm{T}} < 0. \tag{11}$$

若令 $S = T = -R$ 且 R^{-1} 与 M 正交,则不等式(11)与(7)完全一致,此时 $T + S^{\mathrm{T}} + S + R \geq 0$ 自动满足. 于是,不等式(8)的成立必然能推出不等式(7)的成立. 因此,条件(7)只是作为(8)的一种特殊形式而存在.

为进一步扩大系统稳定条件下的参数摄动范围,设定三元组(T,S,R)为凸胞组合,即

$$(T,S,R) = \mathrm{Co}\{(T_1,S_1,R_1),\cdots,(T_N,S_N,R_N)\}, \tag{12}$$

其中 N 是基元个数.

定理 2　对于变参数多胞系统(1),若存在正定对称矩阵 P_j 和 J_j,对称矩阵 T_i 和 R_i,以及矩阵 M,U,S_i,$Q_i\ (i,j = 1,2,\cdots,N)$,正标量 α,使

$$\begin{bmatrix} K_0 & * & * & * \\ 0 & -U-U^{\mathrm{T}} & * & * \\ 0 & \alpha P_j - U^{\mathrm{T}} & -J_j & * \\ M + S_i^{\mathrm{T}} B_i^{\mathrm{T}} & M & 0 & R_i \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$

其中 $K_0 = A_i P_j + P_j A_i^{\mathrm{T}} + Q_j - Q_i + B_i T_i B_i^{\mathrm{T}}$,并同时满足 $T_i + S_i^{\mathrm{T}} + S_i + R_i \geq 0$. 则变参数多胞系统(1)鲁棒稳定时的状态反馈增益阵为 $K = \alpha M U^{-1}$.

证明过程与定理 1 类似.

4　仿真实例

考虑如下含摄动参数 d 的不确定系统[9]:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12-3d & -12-3d & -25 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = [0\quad 0\quad -6\quad 6]^{\mathrm{T}}; \tag{14}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -12+3d & -12+3d & -25 & -1 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = [0\quad 0\quad 0\quad 6]^{\mathrm{T}}. \tag{15}$$

对于系统(14)和(15),当不确定参数 d 最大摄动值为 12.63 时,按照定理 2 给出的鲁棒稳定控制设计方法得到状态反馈增益矩阵为

$$K = [-12.4600\quad -32.9321\quad -1.6487\quad -2.8450],$$

其中 $\alpha = 100$.

对于本文而言,不确定参数 d 在[0,12.63]范围内摄动时,参数不确定系统(14)和(15)在上述静态反馈控制器 K 的作用下保持鲁棒渐近稳定. 另外,由文献[9]给出鲁棒稳定控制条件(7)在 $0 \leq d \leq 11.62$ 时有可行解存在,但当 $d = 12.63$ 时没有可行解存在. 这说明本文给出的控制器设计较文献[9]具有更低的保守性.

下面借用文献[9]给出的不确定系统稳定度指标,定义泛函 $\rho(d)$ 作为不确定系统稳定的度量指标,其值为通过状态反馈后得到的闭环系统中所有特征值实部的最大值. 图 1 分别给出了按照不同方法得到的 $\rho(d)$ 值. 其中:曲线 1～曲线 4 分别代表基于标准二次稳定理论、文献[13]、文献[9]和本文定理 2 的数值结果.

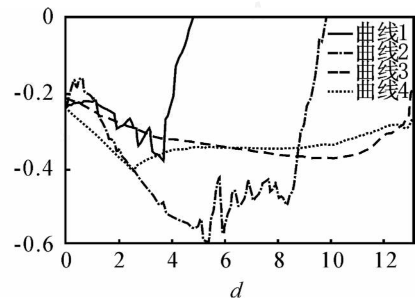

图 1　系统稳定指标度

由图 1 可知,采用标准二次稳定理论设计的闭环系统在不确定参数 d 变化到 4 左右时系统失稳;而基于文献[13]的设计方法得到的闭环系统在不确定参数 d 为 9 左右时也失去了稳定;文献[9]对于不确定参数 d 在摄动范围为[0,11.62]时有严格可行解存在;而本文方法对于不确定参数 d 在[0,12.63]范围内变化时均有严格可行解存在.

5　结　　论

本文针对变参数多胞系统进行状态反馈控制增益阵的求解,使闭环系统在参数摄动情况下保持鲁棒稳定. 此外,已有的结果可作为本文的特例. 为进一步增加系统对变参数的鲁棒性,本文对松弛变量采用依参数形式扩大参数寻优空间,可较好地改善原有结果的保守性. 仿真结果表明,本文方法对于变参数摄动具有更好的鲁棒性.

参考文献(References)

[1] 黄琳. 稳定性与鲁棒性的理论基础[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
(Huang L. The theory of stability and robustness[M]. Beijing: Science Press, 2003.)

[2] 俞立. 鲁棒控制——线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(Yu L. Robust control — Methods for linear matrix inequalities[M]. Beijing: Tsignhua University Press, 2002.)

(下转第 1440 页)

参考文献(References)

[1] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results [J]. Evolutionary Computation, 2000, 8(2): 173-195.

[2] Srinivas N, Deb K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms[J]. Evolutionary Computation, 1994, 2(3): 221-248.

[3] Knowles J D, Corne D W. The pareto archived evolution strategy: A new baseline algorithm for pareto multiobjective optimization[C]. Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE, 1999: 98-105.

[4] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: A comparative case study and the strength pareto approach [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 1999, 3(4): 257-271.

[5] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength pareto evolutionary algorithm[R]. Zurich: Computer Engineering and Networks Laboratory (TIK), Swiss Federal Institute of Technology (ETH) Zurich, 2001.

[6] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.

[7] 雷德明, 吴智铭. 基于个体密集距离的多目标进化算法[J]. 计算机学报, 2005, 28(8): 1320-1326.
(Lei D M, Wu Z M. Crowding-measure based multi-objective evolutionary algorithm[J]. J of Computers, 2005, 28(8): 1320-1326.)

[8] Farhang-Mehr A, Azarm S. Diversity assessment of pareto optimal solution sets: An entropy approach[C]. Proc of the 2002 Congress on Evolutionary Computation. Piscataway: IEEE, 2002: 723-728.

[9] 陈昌巨, 武秀文. 求解多目标优化问题基于相对熵的 Pareto 解演化算法[J]. 华中农业大学学报, 2003, 22(1): 65-69.
(Chen C J, Wu X W. A relative entropy-based Pareto evolutionary algorithm for multi-objective optimization [J]. J of Huazhong Agricultural University, 2003, 22(1): 65-69.)

[10] Deb K, Goel T. Controlled elist non-dominated sorting genetic algorithms for better convergence[C]. 1st Int Conf on Evolutionary Multi-criterion Optimization. Zurich: Springer-Verlag, 2001: 67-81.

[11] Deb K, Pratap A, Moitra S. Mechanical component design for multiple objectives using elitist non-dominated sorting GA[R]. Kanpur: Indian Institute of Technology, 2000.

[12] Coello C A, Sierra M R. A coevolutionary multi-objective evolutionary algorithm[C]. Proc of the 2003 Congress on Evolutionary Computation. Australia: IEEE, 2003: 482-489.

[13] Deb K, Agrawal R B. Simulated binary crossover for continuous search space[J]. Complex Systems, 1995, 9(2): 115-148.

(上接第 1434 页)

[3] Bliman P A. A convex approach to robust stability for linear systems with uncertain scalar parameters [J]. SIAM J of Control Optimization, 2004, 42(6): 2016-2042.

[4] Oliveira Ricardo C L F. LMI conditions for robust stability analysis based on polynomially parameter-dependent Lyapunov functions[J]. Systems and Control Letters, 2006, 55(2): 52-61.

[5] Boyd S, Ghaoui E L, Feron E, et al. Linear matrix inequalities in system and control theory [M]. New York: SIAM, 1994.

[6] Oliveira M De. A new discrete-time robust stability condition[J]. Systems and Control Letters, 1999, 37(3): 261-265.

[7] Xie L H, Lu L, Zhang D. Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems [J]. Automatica, 2004, 40(6): 873-880.

[8] Duan Z S, Zhang J X, Zhang C S. Robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain linear systems[J]. Automatica, 2006, 42(11): 1919-1926.

[9] Geromel J C, Korogui R H. Analysis and synthesis of robust control systems using linear parameter dependent Lyapunov functions [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(12): 1984-1989.

[10] Iwasaki T, Meinsma G, Fu M Y. Generalized S-procedure and finite frequency KYP lemma [J]. Mathematical Problems in Engineering, 2000, 6(3): 305-320.

[11] Skelton R E, Iwasaki T, Grigoriadis K. A unified approach to linear control design [M]. New York: Taylor and Francis, 1997.

[12] Scherer C W. LPV control and full block multipliers [J]. Automatica, 2001, 37(3): 361-375.

[13] Cao Y Y, Lin Z. A descriptor system approach to robust stability analysis and controller synthesis [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(11): 2081-2084.