

文章编号: 1001-0920(2008)02-0182-05

区间数判断矩阵的一致性研究

冯向前¹, 魏翠萍², 胡 钢¹, 李宗植¹

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016; 2. 曲阜师范大学 运筹与管理学院, 山东 日照 276826)

摘要: 研究区间数判断矩阵的一致性. 首先对现有文献中有关区间数判断矩阵的一致性定义进行了总结、分析, 指出定义中存在的合理性. 在此基础上给出区间数判断矩阵的完全一致性、强一致性、一致性和满意一致性定义, 讨论这些定义和现有文献中相关定义的关系, 论证了一致性等定义的合理性, 并给出了一致性判别方法. 最后通过算例验证了判别方法的有效性和适用性.

关键词: 不确定层次分析法; 区间数判断矩阵; 一致性

中图分类号: C934; O223 **文献标识码:** A

Consistency of interval judgment matrix

FENG Xiang-qian¹, WEI Cui-ping², HU Gang¹, LI Zong-zhi¹

(1. College of Economics and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China; 2. College of Operations Research and Management, Qufu Normal University, Rizhao 276826, China. Correspondent: FENG Xiang-qian, E-mail: sxfxq265@sohu.com)

Abstract: The consistency problem of the interval judgment matrix is studied. Existing definitions on the consistency in some papers are firstly summarized and analyzed, and the invalidity in these definitions are pointed out. Furthermore, some definitions concerning the consistency of interval judgement matrix including perfect consistency, strong consistency, consistency and satisfactory consistency are proposed, and the relations between these definitions and the existing ones in some papers are discussed. The validity of these definitions is confirmed. Moreover, a method for testing consistency is given, and two examples show the effectiveness and potential practicality of this method.

Key words: Uncertain type of the analytical hierarchy process; Interval judgment matrix; Consistency

1 引言

层次分析法(AHP)作为一种多准则决策方法,已在实践中得到了很好的应用.在应用层次分析法时,由于客观事物的复杂性及人们思维能力、知识结构和知识水平的局限性,单一准则下,决策者虽然能确定第*i*个元素比第*j*个元素重要,但对重要的强度常常不能作出确定的、一致的判断.在这种情况下,决策者的思维判断用模糊数或区间数来反映更合理.此时所得判断矩阵为模糊数判断矩阵或区间数判断矩阵,从而使传统的层次分析法扩展为不确定层次分析法.在不确定层次分析法中,单一准则下,如何由区间数判断矩阵导出合理的排序向量是合成排序向量的基础,而区间数判断矩阵是否满足一致性直接影响到排序向量的合理性.因此,研究区间数判断矩阵的一致性是一个很重要的课题.目前

已有很多文献对其进行了研究^[1-13],但是这些定义之间没有统一性,而且有的定义明显存在不合理性.

本文对现有文献中区间数判断矩阵的一致性定义进行了总结分析,指出了某些定义的不合理性.在此基础上,给出了符合实际情况的区间数判断矩阵一致性的相关定义,并探讨了这些定义和现有的一些定义之间的相互关系以及一致性判别问题.

2 区间数判断矩阵一致性分析

定义 1 称数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$ 具有一致性,若 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} \bar{a}_{kj}$, $i, j, k = 1, 2, \dots, n$.

定义 2 设有两个区间数 $a_1 = [l_1, u_1]$, $a_2 = [l_2, u_2]$, $l_1 > 0, l_2 > 0$, 则

$$a_1 \cdot a_2 = [l_1 \cdot l_2, u_1 \cdot u_2],$$

$$1/a_1 = [1/u_1, 1/l_1].$$

定义 3 称 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是区间数判断矩阵,如

收稿日期: 2006-10-28; 修回日期: 2007-01-29.

基金项目: 国家自然科学基金项目(10671108); 山东省自然科学基金项目(Y2005A04).

作者简介: 冯向前(1977—),男,山西晋城人,博士生,从事系统工程、多属性决策等研究; 魏翠萍(1971—),女,山西长治人,教授,从事运筹学、决策分析等研究.

果对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 均有: 1) $a_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}]$, 且 $0 < l_{ij} < u_{ij}$; 2) $a_{ij} = 1/a_{ji}$. 当对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 都有 $l_{ij} = u_{ij}$ 时, A 为数字判断矩阵.

在现有文献中, 区间数判断矩阵的一致性定义有 4 种形式:

1) 第 1 种形式: 文献 [1] 对区间数判断矩阵一致性的定义如下:

定义 4 称区间数判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为一一致性矩阵, 如果对任意 $i, j, k = 1, 2, \dots, n$, 均有: $a_{ij} a_{jk} = a_{ik}$.

定义中并不要求对角线元素为 1, 在此基础上, 文献 [3-5, 7] 对区间数判断矩阵一致性作了进一步的研究. 文献 [4] 称定义 4 为完全一致性, 并且定义了一致性.

定义 5 设 A^* 为完全一致性判断矩阵, 称 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为一一致性判断矩阵, 若 $A = A^* \cdot E$, 且满足

$$\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{j} \right) R.$$

其中: $E = (e_{ij})_{n \times n}$, $e_{ij} = [\frac{1}{i}, \frac{1}{j}]$, $R = [R^-, R^+]$ 为预先给定的临界区间数.

文献 [3] 在令对角线元素为 1 的前提下, 引用文献 [1] 的定义.

定义 6 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为区间数判断矩阵, 对任意的 j , $a_{jj} = [1, 1]$. 如果对任意 $i, j, k = 1, 2, \dots, n$, 均有 $a_{ij} a_{jk} = a_{ij} a_{ik}$, 则称 A 为一一致性区间数判断矩阵. $a_{ij} = [1, 1]$, 表示方案 j 与自身相比较.

文献 [1] 中对区间数判断矩阵的定义不要求对任意的 i , $a_{ii} = 1$, 而人们的判断中对于同一事物自身属性相比较, 重要性程度应为 1 才符合实际情况. 而对任意的 i , $a_{ii} = 1$ 时, 文献 [2] 用模糊集理论证明了文献 [1] 的定义仅适用于判断用精确数值表示的情形. 也就是说, 对满足定义 4 的一致性区间数判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ($a_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}]$), 设 $A^L = (l_{ij})_{n \times n}$, $A^U = (u_{ij})_{n \times n}$, 若对任意的 i , $a_{ii} = 1$, 则 $A^L = A^U$. 因此对区间数判断矩阵, 定义 4 ~ 6 均不合理.

2) 第 2 种形式: 文献 [6] 模仿一致性数字判断矩阵的定义给出了一致性区间数判断矩阵的定义.

定义 7 称区间数判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 具有一致性, 若对任意的 $i, j, k = 1, 2, \dots, n$, 均有 $a_{ij} = a_{ik} a_{kj}$.

此定义隐含着 $a_{ii} = 1$, 满足人们对同一事物自身属性相比重要性程度为 1 的判断, 但实际上和定义 6 相同, 当区间数判断矩阵满足其条件时, 将退化为普通数字判断矩阵.

3) 第 3 种形式: 文献 [8] 用集合论的理论给出

了区间数判断矩阵的一致性和弱一致性定义.

定义 8 称区间数判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 具有一致性, 若对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\bigcap_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}.$$

定义 9 称区间数判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 具有弱一致性, 若对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\bigcap_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) \neq \emptyset.$$

此定义以集合论的知识给出, 具有一定的合理性, 但是所表示的实际含义不明确.

4) 第 4 种形式: 文献 [11, 12] 基于权重可行域的思想给出了区间数判断矩阵的一致性定义.

定义 10 称区间数判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 具有一致性, 若凸集 S_w 非空. 其中

$$S_w = \left\{ w \mid \begin{matrix} l_{ij} < w_i/w_j < u_{ij}, \\ \sum_{i=1}^n w_i = 1, w_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n \end{matrix} \right\}.$$

3 区间数判断矩阵一致性相关定义及性质

根据上述对区间数判断矩阵一致性定义的讨论, 在区间数判断矩阵满足对角线上元素全为 1 的情况下, 给出比较合理的区间数判断矩阵一致性的相关定义.

定义 11 称 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为完全一致性区间数判断矩阵, 若对任意的 $i < k < j$, 均有 $a_{ij} = a_{ik} a_{kj}$.

此定义避免了定义 7 出现的退化情况.

定义 12 称 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为强一致性区间数判断矩阵, 若对任意的实数 $\bar{a}_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$, 数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{kl})_{n \times n}$ ($\bar{a}_{kl} \in [l_{kl}, u_{kl}]$) 均存在一致性, 其中当 $k = i, l = j$ 时, $\bar{a}_{kl} = \bar{a}_{ij}$.

若对某个 $\bar{a}_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$, 不存在数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{kl})_{n \times n}$ ($\bar{a}_{kl} \in [l_{kl}, u_{kl}]$) 且 $k = i, l = j$ 时, $\bar{a}_{kl} = \bar{a}_{ij}$ 满足一致性, 则说明 \bar{a}_{ij} 是不合理信息, 因此此定义是合理的. 下面的定理 1 将证明定义 8 的一致性条件和定义 12 的强一致性条件是等价的, 但显然定义 12 的条件所表现的实际含义要比定义 8 明确.

定理 1 定义 8 的一致性条件等价于定义 12 的强一致性条件.

证明 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为区间数判断矩阵, 且对任意 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 均有 $a_{ij} = \bigcap_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj})$, 所以对任意 $k = 1, 2, \dots, n$, 有 $a_{ij} \subseteq a_{ik} a_{kj}$, 即对任意 $\bar{a}_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$, 存在 $\bar{a}_{ik} \in [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $\bar{a}_{kj} \in [l_{kj}, u_{kj}]$, 使得 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} \bar{a}_{kj}$ ($k = 1, 2, \dots, n$). 根据定义 1, $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$ 具有一致性.

反之, 若对任意的实数 $\bar{a}_{ij} \in [l_{ij}, u_{ij}]$, 均存在一

致性数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{kl})_{n \times n} (\bar{a}_{kl} [l_{kl}, u_{kl}])$, 其中当 $k = i, l = j$ 时 $\bar{a}_{kl} = \bar{a}_{ij}$. 即对任意的实数 $\bar{a}_{ij} [l_{ij}, u_{ij}]$, 存在 $\bar{a}_{ik} [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $\bar{a}_{kj} [l_{kj}, u_{kj}]$, 使得 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} \bar{a}_{kj} (k = 1, 2, \dots, n)$, 所以 $a_{ij} \subseteq \prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj})$; 又因为当 $k = i$ 时, $a_{ik} a_{kj} = a_{ij}$, 所以 $\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) \subseteq a_{ij}$, 故 $a_{ij} = \prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj})$.

定理 2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为区间数判断矩阵, 若 A 具有完全一致性, 则其具有强一致性.

证明 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为区间数判断矩阵, 要证明 A 具有强一致性, 只需证明对任意的 $\bar{a}_{ij} [l_{ij}, u_{ij}] (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 存在 $\bar{a}_{ik} [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $\bar{a}_{kj} [l_{kj}, u_{kj}]$, 使得 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} \bar{a}_{kj} (k = 1, 2, \dots, n)$. 由定义 3 中条件 2) 知, 当 $i = j$ 时显然成立. 下面只需证明 $i < j$ 的情况, 因为当 $j < i$ 时可以类似地证明. 当 $i < j$ 时, 又分为 3 种情况:

- 1) $i < k < j$, 由于对任意的 $i = 1, 2, \dots, n, a_{ii} = 1$, 以及定义 11 知, 当 $i < k < j$ 时, $a_{ij} = a_{ik} a_{kj}$, 所以对任意的 $\bar{a}_{ij} [l_{ij}, u_{ij}]$, 存在 $\bar{a}_{ik} [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $\bar{a}_{kj} [l_{kj}, u_{kj}]$, 使得 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} \bar{a}_{kj}$.
- 2) $k < i < j$, 由定义 11 知, $a_{kj} = a_{ki} a_{ij}$, 即对任意的 $\bar{a}_{ij} [l_{ij}, u_{ij}]$, 存在 $\bar{a}_{kj} [l_{kj}, u_{kj}]$ 和 $\bar{a}_{ki} [l_{ki}, u_{ki}]$, 使得 $\bar{a}_{kj} = \bar{a}_{ki} \bar{a}_{ij}$. 由定义 3 中式 2) 知, 存在 $\bar{a}_{ik} [l_{ik}, u_{ik}]$, 使得 $\bar{a}_{ki} = 1/\bar{a}_{ik}$, 所以 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} \bar{a}_{kj}$.
- 3) $i < j < k$, 类似 2) 可以证明, 不再赘述.

综上 3 种情况, 当 $i < j$ 时, 对任意的 $k = 1, 2, \dots, n$, 存在 $\bar{a}_{ik} [l_{ik}, u_{ik}]$ 和 $\bar{a}_{kj} [l_{kj}, u_{kj}]$, 使得 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} \bar{a}_{kj}$.

定理 2 研究了定义 11 与定义 12 的关系, 得出若一个区间数判断矩阵具有完全一致性, 那么其一定具有强一致性.

推论 1 区间数判断矩阵具有强一致性当且仅当对任意的 $i < j, i, j = 1, 2, \dots, n$, 有 $\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}$.

证明 由定义 8, 定义 12 及定理 1 知, 区间数判断矩阵具有强一致性的充要条件是对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有 $\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}$. 所以只需证明若对任意的 $i < j, i, j = 1, 2, \dots, n$, 有 $\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}$, 则对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有 $\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}$.

若 $i > j$, 由于区间数判断矩阵具有互反性, 即对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有 $l_{ij} \cdot u_{ji} = 1$, 所以

$$\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = \prod_{k=1}^n ([l_{ik}, u_{ik}] \times [l_{kj}, u_{kj}]) = \dots = 1 / \left(\prod_{k=1}^n (a_{jk} \cdot a_{ki}) \right) = 1 / a_{ji} = a_{ij}.$$

若 $i = j$, 有

$$\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{ki}) = \prod_{k=1}^n ([l_{ik}, u_{ik}] \times [1/u_{ik}, 1/l_{ik}]) = \prod_{k=1}^n 1 = a_{ii}.$$

定义 13 称区间数判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 具有一致性, 若存在数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n} (\bar{a}_{ij} [l_{ij}, u_{ij}])$ 具有一致性.

若专家给出的区间数判断矩阵具有一致性, 表明专家给出的偏好含有一致性信息, 根据此偏好信息可以得到比较合理的排序, 若不具有一致性, 说明专家给出的偏好信息不合理, 有条件最好进行修正. 从这个意义看, 定义 13 是合理的. 下面将证明此处对区间数判断矩阵一致性的定义等同于定义 10; 在文献 [3, 9, 10] 中此定义被定义为局部一致.

定理 3 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为区间数判断矩阵, 存在数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n} (\bar{a}_{ij} [l_{ij}, u_{ij}])$ 具有一致性的充要条件是 S_w 非空.

证明 若存在数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n} (\bar{a}_{ij} [l_{ij}, u_{ij}])$ 具有一致性, 则存在向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 使得 $\bar{a}_{ij} = w_i / w_j$, 显然 S_w 非空. 若 S_w 非空, 不妨设向量 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 是 S_w 中的元素, 令 $\bar{a}_{ij} = w_i / w_j$, 根据定义 1 及 S_w 的定义, 知 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$ 具有一致性且 $\bar{a}_{ij} [l_{ij}, u_{ij}]$.

引理 1^[11] 区间数判断矩阵具有一致性当且仅当下面不等式成立:

$$\max_k (l_{ik} l_{kj}) \leq \min_k (u_{ik} u_{kj}), \quad \forall i, j, k = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

由引理 1 可知, 只需进行简单的代数运算就可判别一个区间数判断矩阵是否具有 consistency, 事实上由于区间数判断矩阵具有互反性, 即对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有 $l_{ij} \cdot u_{ji} = 1$, 所以

$$\begin{aligned} \max_k (l_{ik} l_{kj}) \leq \min_k (u_{ik} u_{kj}) &\Leftrightarrow \\ \max_k (1 / (u_{ki} u_{jk})) \leq \min_k (1 / (l_{ki} l_{jk})) &\Leftrightarrow \\ \max_k (l_{jk} l_{ki}) \leq \max_k (u_{jk} u_{ki}). \end{aligned}$$

只需对矩阵的上三角 (或下三角) 的元素进行验证就可以判别一个区间数判断矩阵是否具有 consistency.

定理 4 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为区间数判断矩阵, 存在数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n} (\bar{a}_{ij} [l_{ij}, u_{ij}])$ 具有

一致性的充要条件是对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}$$

证明 对于区间数判断矩阵 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若存在数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n} (\bar{a}_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}])$ 具有一致性, 根据定义 1, 对任意的 $i, j, k = 1, 2, \dots, n$, 都有 $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ik} \bar{a}_{kj} = a_{ik} a_{kj}$, 所以对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有

$$\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}$$

若对任意的 $i, j = 1, 2, \dots, n$, 有 $\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}$

, 不妨令 $\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = [b_{ij}^-, b_{ij}^+] = b_{ij}$. 显然有

$$\max_k (l_{ik} l_{kj}) \leq b_{ij} \leq \min_k (u_{ik} u_{kj})$$

根据引理 1 知区间数判断矩阵 A 具有一致性, 由定义 10 知 S_w 非空, 又由定理 3 知存在数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n} (\bar{a}_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}])$ 具有一致性.

由定理 4 可以得出, 对于区间数判断矩阵 A , 若 $\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则 A 具有一致性, 在文献[8] 中被定义为局部一致性.

推论 2 区间数判断矩阵具有一致性当且仅当

对任意的 $i < j, i, j = 1, 2, \dots, n$, 有 $\prod_{k=1}^n (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}$

证明方法类似于推论 1, 这里不再赘述.

另外, 当区间数判断矩阵不具有一致性时, 可由文献[10, 13] 中的定义判别其是否具有满意一致性.

定义 14^[10, 13] 称 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为满意一致性区间数判断矩阵, 若存在数字判断矩阵 $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$ 具有一致性(其中 $\bar{a}_{ij} = [(1 - \alpha_{ij}) l_{ij}, (1 + \alpha_{ij}) u_{ij}]$).

α_{ij} 为判断 a_{ij} 的决策容许偏差, 令 $\alpha_{ij} = \max_{i,j} \alpha_{ij}$, 一般取 $\alpha = 0.1$ (RI 为判断矩阵的平均随机一致性指标).

4 算例分析

算例 1 假设 3 个方案的决策问题有区间数判断矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & [1, 3] & [1, 6] \\ [1/3, 1] & 1 & [1, 2] \\ [1/6, 1] & [1/2, 1] & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $[1, 3] \times [1, 2] = [1, 6]$, 根据定义 11, A 具有完全一致性, 下面利用推论 1 证明 A 具有强一致性.

$$\prod_{k=1}^3 a_{1k} a_{k2} =$$

$$[1, 3] \times [1, 3] \times [1/2, 6] = [1, 3] = a_{12}$$

$$\prod_{k=1}^3 a_{1k} a_{k3} =$$

$$[1, 6] \times [1, 6] \times [1, 6] = [1, 6] = a_{13}$$

$$\prod_{k=1}^3 a_{2k} a_{k3} =$$

$$[1/3, 6] \times [1, 2] \times [1, 2] = [1, 2] = a_{23}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & [2, 5] & [2, 4] & [1, 3] \\ [1/5, 1/2] & 1 & [1, 3] & [1, 2] \\ [1/4, 1/2] & [1/3, 1] & 1 & [1/2, 1] \\ [1/3, 1] & [1/2, 1] & [1, 2] & 1 \end{bmatrix}$$

算例 2 考虑如上区间数判断矩阵 B , 文献[11] 应用引理 1 的方法证明了其具有一致性, 下面用推论 2 进行验证.

$$\prod_{k=1}^4 a_{1k} a_{k2} =$$

$$[2, 5] \times [2, 5] \times [2/3, 4] \times [1/2, 3] = [2, 3]$$

$$\prod_{k=1}^4 a_{1k} a_{k3} =$$

$$[2, 4] \times [2, 15] \times [2, 4] \times [1, 6] = [2, 4]$$

$$\prod_{k=1}^4 a_{1k} a_{k4} =$$

$$[1, 3] \times [2, 10] \times [1, 4] \times [1, 3] = [2, 3]$$

$$\prod_{k=1}^4 a_{2k} a_{k3} =$$

$$[2/5, 2] \times [1, 3] \times [1, 3] \times [1, 4] = [1, 2]$$

$$\prod_{k=1}^4 a_{2k} a_{k4} =$$

$$[1/5, 3/2] \times [1, 2] \times [1/2, 3]$$

$$[1, 2] = [1, 3/2]$$

$$\prod_{k=1}^4 a_{3k} a_{k4} =$$

$$[1/4, 3/2] \times [1/3, 2] \times [1/2, 1]$$

$$[1/2, 1] = [1/2, 1]$$

对任意的 $i < j, i, j = 1, 2, 3, 4$, 有 $\prod_{k=1}^4 (a_{ik} a_{kj}) = a_{ij}$

, 由推论 2 知区间数判断矩阵 B 具有一致性, 但其计算过程较文献[11] 简单.

5 结 语

本文在对现有文献关于区间数判断矩阵的一致性相关定义中存在的问题进行分析后, 提出了合理的区间数判断矩阵一致性的相关定义, 统一了现有文献对区间数判断矩阵一致性的定义, 并且讨论了它们之间的关系. 若专家给出的偏好信息满足强一致性, 说明专家给出的所有信息都具有一致性, 都是合理信息, 但其性质还有待于进一步研究; 若专家给

出的偏好信息满足一致性,说明此信息含有一致性信息,可以根据此信息求解出合理的排序向量;若专家给出的信息不满足一致性,如果可能的话最好对偏好信息进行改进,否则若满足满意一致性,也可根据此信息得出满意的排序向量.有关区间数判断矩阵一致性的相关定义完全可以类推到区间数互补判断矩阵.对区间数判断矩阵一致性定义的讨论,为不确定层次分析法的研究提供了更加合理的理论依据.

参考文献(References)

- [1] 魏毅强,刘进生,王绪柱. 不确定 AHP 中判断矩阵的一致性概念及权重[J]. 系统工程理论与实践, 1994, 7(4): 16-22.
(Wei Yi-qiang, Liu Jin-sheng, Wang Xu-zhu. Concept of consistence and weights of the judgment matrix in the uncertain type of AHP[J]. Systems Engineering- Theory and Practice, 1994, 7(4): 16-22.)
- [2] 许若宁,刘克. 关于 Fuzzy 判断矩阵一致性的讨论[J]. 系统科学与数学, 2000, 20(1): 58-64.
(Xu Ruo-ning, Liu Ke. A note on consistency of fuzzy judgment matrix[J]. Systems Science and Mathematic Sciences, 2000, 20(1): 58-64.)
- [3] 朱建军,刘士新,王梦光. 基于遗传算法求解区间数 AHP 判断矩阵的权重[J]. 系统工程学报, 2004, 19(4): 344-349.
(Zhu Jian-Jun, Liu Shi-xin, Wang Meng-guang. Estimation of weight vectors of interval numbers judgment matrix in AHP using genetic algorithm[J]. J of Systems Engineering, 2004, 19(4): 344-349.)
- [4] 刘心报. 不确定型 AHP 中判断矩阵一致性的定义[J]. 运筹与管理, 1998, 7(2): 41-43.
(Liu Xin-bao. Definition of the judgment matrix consistency in the uncertain type of AHP[J]. Operation and Management, 1998, 7(2): 41-43.)
- [5] 周礼刚,陈华友. 两类区间数判断矩阵的一致性研究[J]. 运筹与管理, 2005, 14(4): 47-51.
(Zhou Li-gang, Chen Hua-you. Research on consistency of two interval judgment matrices[J]. Operation and Management, 2005, 14(4): 47-51.)
- [6] 徐泽水. 群组 AHP 中区间判断矩阵的一致性研究[J]. 运筹与管理, 2000, 9(2): 8-11.
(Xu Ze-shui. Research on consistency of interval judgment matrices in group AHP[J]. Operation and Management, 2000, 9(2): 8-11.)
- [7] 李炳军,刘思峰. 一种基于区间数判断矩阵的群决策新方法[J]. 中国管理科学, 2004, 12(6): 109-112.
(Li Bing-jun, Liu Si-feng. A new method on group decision making with interval number judgment matrices[J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(6): 109-112.)
- [8] 韦振中,韦兰用. 一致性区间数判断矩阵及其性质[J]. 广西工学院学报, 2000, 11(4): 17-20.
(Wei Zhen-zhong, Wei Lan-yong. The consistent interval number judgment matrix and its characteristics[J]. J of Guangxi University of Technology, 2000, 11(4): 17-20.)
- [9] 朱建军,刘士新,王梦光. 一种新的求解区间判断矩阵权重的方法[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(4): 29-34.
(Zhu Jian-jun, Liu Shi-xin, Wang Meng-guang. Novel weight approach for interval numbers comparison matrix in the analytic hierarchy process [J]. Systems Engineering- Theory and Practice, 2005, 25(4): 29-34.)
- [10] 朱建军,王梦光,刘士新. 一种新型不确定 AHP 的研究与应用[J]. 管理科学学报, 2005, 8(5): 15-20.
(Zhu Jian-jun, Wang Meng-guang, Liu Shi-xin. Research on and application of new uncertainty model in analytical hierarchy process[J]. J of Management Science, 2005, 8(5): 15-20.)
- [11] Wang Y M, Yang J B, Xu D L. Interval weight generation approaches based on consistency test and interval comparison matrices[J]. Applied Mathematics and Computation, 2005, 167(1): 252-273.
- [12] Islam R, Biswal M P, Alam S S. Preference programming and inconsistent interval judgments[J]. European J of Operational Research, 1997, 97(1): 53-62.
- [13] Leung L C, Cao D. On consistency and ranking of alternatives in fuzzy AHP [J]. European J of Operational Research, 2000, 124(1): 102-113.