文章编号: 1001-0920(2008)02-0200-04

离散灰色模型的仿射特性研究

谢乃明, 刘思峰
(南京航空航天大学 经济与管理学院, 南京 210016)

摘 要: 对离散灰色模型进行了重新定义并给出了参数求解式,建立了离散最优化灰色模型. 通过对这两个模型进行仿射特性研究,分析了仿射变换导致的模型参数变化特征,以及仿射变换对模型模拟和预测值的影响. 研究结果表明,通过仿射变换,可以缩小数据的量级,简化建模过程,而不会改变模型的模拟和预测效果.

关键词: 离散灰色模型; 参数特征; 最小二乘法; 优化; 累加生成
中图分类号: C931 **文献标识码**: A

Research on the affine properties of discrete grey model

XIE Nai-ming, LIU Si-feng
(College of Economic and Management, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China. Correspondent: XIE Nai-ming, E-mail: xienaiming@yahoo.com.cn)

Abstract: A discrete grey model is redefined, and its parameters expression is given. Then the discrete grey optimize model is constructed. The properties of parameters caused by the affine transformations are analysed, so is the infection that affine transformations caused to simulative and predicative results. Study results show that the data level can be reduced, the course of constructing model can be simplified, but the simulative and predicative results do not change.

Key words: Discrete grey model; Parameter property; Least square methods; Optimize; Accumulating generator operator

1 引 言

在灰色系统建模过程中,为了取得较好的模拟和预测效果,常常需要对系统行为特征数据进行数据变换和处理. 通过算子作用,使之化为数量级大体相当的无量纲数据,并将负相关因素转换为正相关因素,使其具有可比性[1-4]. 近年来的研究表明,原始数据的数据变换也是提高灰色模型模拟与预测精度的重要手段[5-8],国内外众多学者对此做了深入研究,取得了一些结果[9-13]. 目前,常用的处理算子有初值化算子、均值化算子、归一化算子和区间值化算子等. 实际上,这些通过算子的线性运算是对原始序列数据进行数乘变换或平移变换得到的结果,这些变换对灰色系统模型的参数和预测值有何具体影响? 变换前后模型的相互关系怎样? 都是理论上值得探讨的问题. 对于传统的单变量和多变量灰色预测模型,肖新平教授已经作了初步讨论[14]. 而对于离散形式的灰色模型,由于提出时间尚短,目前还没有相关研究结果. 谢乃明等已经证明了离散形式的灰色模型比经典的 GM(1,1) 模型更加符合灰色系统累加生成的建模原理,取得不弱于经典灰色模型的模拟和预测效果[15],因此对离散灰色模型进行参数特性的研究具有重要的意义. 本文重点研究离散灰色模型和离散优化灰色模型,讨论模型的参数随原始数据序列作仿射变换的性质.

2 模型的定义

定义 1 设 $X^{(0)}$ 为原始数据序列, $X^{(1)} = \mathrm{AGO}\, X^{(0)}$, 即

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)),$$

$$x^{(1)}(k) = \sum_{m=1}^{k} x^{(0)}(m),$$

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n)),$$

称

$$x^{(1)}(k+1) = \beta_1 x^{(1)}(k) + \beta_2$$

为离散灰色模型(DGM).

收稿日期: 2006-11-02; **修回日期**: 2007-01-22.
基金项目: 国家自然科学基金项目(70473037); 南京航空航天大学特聘教授科研创新基金项目(1009-260812).
作者简介: 谢乃明(1981—),男,安徽天长人,博士生,从事管理科学与工程、系统工程的研究; 刘思峰(1956—),男,河南平舆人,教授,博士生导师,从事数量经济学、系统工程等研究.

1) 称(β_1, β_2)为 DGM 模型的一级参数包,记为 P_{I},则 P_{I} 可以表示为向量

$$P_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix},\ P_{\mathrm{I}} = (\beta_1, \beta_2)^{\mathrm{T}}.$$

2) 称(β_1, β_2)的构成成分为 DGM 模型中间参数,中间参数全体为模型的二级参数包,记为 P_{II}.

3) 称 DGM 模型二级参数包构成成分为基本参数,基本参数全体称为模型三级参数包,记为 P_{III}.

命题 1　DGM 模型一级参数包在最小二乘准则下有矩阵算式

$$P_{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = (B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y.$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} x^{(1)}(2) \\ x^{(1)}(3) \\ \cdots \\ x^{(1)}(n) \end{bmatrix},\quad B = \begin{bmatrix} x^{(1)}(1) & 1 \\ x^{(1)}(2) & 1 \\ \cdots & \cdots \\ x^{(1)}(n-1) & 1 \end{bmatrix}.$$

命题 2　令

$$C = \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k),\quad D = \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k+1),$$

$$E = \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k)\, x^{(1)}(k+1),$$

$$F = \sum_{k=1}^{n-1} (x^{(1)}(k))^2,\ N = n-1,$$

则有

$$(B^{\mathrm{T}}B)^{-1} = \frac{1}{NF - C^2}\begin{bmatrix} N & -C \\ -C & F \end{bmatrix},\ B^{\mathrm{T}}Y = \begin{bmatrix} E \\ D \end{bmatrix}.$$

命题 3　DGM 模型的参数包有:

1) 一级参数包 P_{I} 为

$$P_{\mathrm{I}} = (\beta_1, \beta_2);$$

$$\beta_1 = \frac{NE - CD}{NF - C^2},\ \beta_2 = \frac{DF - CE}{NF - C^2}.$$

2) 二级参数包为

$$P_{\mathrm{II}} = (C, D, E, F, N);$$

$$C = \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k),\ D = \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k+1),$$

$$E = \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k)\, x^{(1)}(k+1),$$

$$F = \sum_{k=1}^{n-1} (x^{(1)}(k))^2,\ N = n-1.$$

3) 三级参数包为

$$P_{\mathrm{III}} = (x^{(0)}(k), x^{(1)}(k)).$$

命题 4　DGM 模型的递推函数表达式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k x^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1}\beta_2,$$

$$k = 1, 2, \cdots, n-1.$$

从 DGM 模型的递推函数表达式中可以看出,序列的模拟值 $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 依赖于参数 β_1, β_2 和 $x^{(1)}(1)$ 的取值. 参数 β_1 和 β_2 根据最小二乘准则求解得到,而在最小二乘准则下序列的拟合曲线不一定通过序列初值 $x^{(1)}(1)$ 点. 因此离散灰色模型与实际拟合曲线存在差异,可通过建立离散灰色最优化模型来消除.

定义 2　对于原始数据序列 $X^{(0)}$, $X^{(1)} = \mathrm{AGO}X^{(0)}$,称

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1 \hat{x}^{(1)}(k) + \beta_2, \\ \hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + \beta_3, \end{cases}$$

为离散灰色最优化模型(DGOM).

DGOM 模型中的参数 β_1 和 β_2 的求解与 DGM 模型一样,对于 β_3 的求解可采用类似最小二乘原则的方法,建立一个无约束优化模型,求解 $\hat{x}^{(1)}(k)$ 和 $x^{(1)}(k)$ 误差平方和最小,也就是求解优化问题

$$\min_{\beta_3} \sum_{k=1}^{n} [\hat{x}^{(1)}(k) - x^{(1)}(k)]^2,$$

可解得

$$\beta_3 = \frac{\sum_{k=1}^{n-1}\left[x^{(1)}(k+1) - \beta_1^k x^{(1)}(1) - \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1}\beta_2\right]\beta_1^k}{1 + \sum_{k=1}^{n-1}(\beta_1^k)^2}.$$

命题 5　DGOM 模型的递推函数表达式为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \beta_1^k \hat{x}^{(1)}(1) + \frac{1-\beta_1^k}{1-\beta_1}\beta_2,$$

$$k = 1, 2, \cdots, n-1,$$

其中 $\hat{x}^{(1)}(1) = x^{(1)}(1) + \beta_3$.

3　模型的参数特征

定义 3　对于序列数据 $y_k(k = 1, 2, \cdots, n)$,变换 $x_k = \rho y_k + a, k = 1, 2, \cdots, n$(其中,$a, \rho$为常数)称为仿射变换,其中 ρ, a 分别被称为数乘量和平移量.

下面讨论仿射变换对离散灰色模型参数值和模拟预测值的影响. 设 $Y^{(0)}$ 为原始序列,$X^{(0)}$ 为数乘变换序列,$Y^{(1)}$ 和 $X^{(1)}$ 为累加生成序列,且

$$x^{(1)}(k) = \rho y^{(1)}(k) + a,\ k = 1, 2, \cdots, n.$$

记 $\bar{\beta}_1$ 和 $\bar{\beta}_2$ 分别为原始序列 $Y^{(0)}$ 的 DGM 模型的参数,β_1 和 β_2 是数乘变换序列 $X^{(0)}$ 对应的参数,其他参数类似定义.

定理 1　二级参数包

$$P_{\mathrm{II}} = (C, D, E, F, N);$$

$$C = \rho\bar{C} + \bar{N}a,\ D = \rho\bar{D} + \bar{N}a,$$

$$E = \rho^2\bar{E} + \rho a\bar{C} + \rho a\bar{D} + \bar{N}a^2,$$

$$F = \rho^2\bar{F} + 2\rho a\bar{C} + \bar{N}a^2,\ N = \bar{N}.$$

证明　$N = n - 1 = \bar{N}$,

$$C = \sum_{k=1}^{n-1} x^{(1)}(k) = \sum_{k=1}^{n-1}(\rho y^{(1)}(k) + a) =$$

$$\rho\sum_{k=1}^{n-1}y^{(1)}(k)+(n-1)a=\rho\bar{C}+\bar{N}a,$$

$$D=\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}(\rho y^{(1)}(k+1)+a)=\rho\sum_{k=1}^{n-1}y^{(1)}(k+1)+(n-1)a=\rho\bar{D}+\bar{N}a,$$

$$E=\sum_{k=1}^{n-1}x^{(1)}(k)x^{(1)}(k+1)=\sum_{k=1}^{n-1}(\rho y^{(1)}(k)+a)(\rho y^{(1)}(k+1)+a)=$$
$$\rho^2\sum_{k=1}^{n-1}y^{(1)}(k)y^{(1)}(k+1)+\rho a\sum_{k=1}^{n-1}y^{(1)}(k)+\rho a\sum_{k=1}^{n-1}y^{(1)}(k+1)+(n-1)a^2=$$
$$\rho^2\bar{E}+\rho a\bar{C}+\rho a\bar{D}+\bar{N}a^2,$$

$$F=\sum_{k=1}^{n-1}(x^{(1)}(k))^2=\sum_{k=1}^{n-1}(\rho y^{(1)}(k)+a)^2=\rho^2\sum_{k=1}^{n-1}(y^{(1)}(k))^2+2\rho a\sum_{k=1}^{n-1}y^{(1)}(k)+\bar{N}a^2=$$
$$\rho^2\bar{F}+2\rho a\bar{C}+\bar{N}a^2.\qquad\square$$

定理 2 $\hat{\beta}_1=\bar{\beta}_1,\ \hat{\beta}_2=\rho\bar{\beta}_2+a(1-\bar{\beta}_1)$.

证明

$$\hat{\beta}_1=\frac{NE-CD}{NF-C^2}=$$
$$\frac{\bar{N}(\rho^2\bar{E}+\rho a\bar{C}+\rho a\bar{D}+\bar{N}a^2)-(\rho\bar{C}+\bar{N}a)(\rho\bar{D}+\bar{N}a)}{\bar{N}(\rho^2\bar{F}+2\rho a\bar{C}+\bar{N}a^2)-(\rho\bar{C}+\bar{N}a)^2}=$$
$$\frac{\bar{N}\rho^2\bar{E}-\rho^2\bar{C}\bar{D}}{\bar{N}\rho^2\bar{F}-\rho^2\bar{C}^2}=\frac{\bar{N}\bar{E}-\bar{C}\bar{D}}{\bar{N}\bar{F}-\bar{C}^2}=\bar{\beta}_1,$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{DF-CE}{NF-C^2}=$$
$$\frac{(\rho\bar{D}+\bar{N}a)(\rho^2\bar{F}+2\rho a\bar{C}+\bar{N}a^2)-(\rho\bar{C}+\bar{N}a)(\rho^2\bar{E}+\rho a\bar{C}+\rho a\bar{D}+\bar{N}a^2)}{\bar{N}(\rho^2\bar{F}+2\rho a\bar{C}+\bar{N}a^2)-(\rho\bar{C}+\bar{N}a)^2)}=$$
$$\rho\frac{\bar{D}\bar{F}-\bar{C}\bar{E}}{\bar{N}\bar{F}-\bar{C}^2}+a\Big(1-\frac{\bar{N}\bar{E}-\bar{C}\bar{D}}{\bar{N}\bar{F}-\bar{C}^2}\Big)=$$
$$\rho\bar{\beta}_2+a(1-\bar{\beta}_1).\qquad\square$$

定理 3 设 $\hat{x}^{(0)}(k),\hat{y}^{(0)}(k)$ 分别为序列 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ 的 DGM 模型模拟值(预测值),则

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\rho\hat{y}^{(1)}(k)+a,$$
$$\hat{x}^{(0)}(k)=\rho\hat{y}^{(0)}(k).$$

证明 由命题 4 可知

$$\hat{x}(k+1)=\hat{\beta}_1^k x^{(1)}(1)+\frac{1-\hat{\beta}_1^k}{1-\hat{\beta}_1}\hat{\beta}_2=$$
$$\bar{\beta}_1^k(\rho y^{(1)}(1)+a)+\frac{1-\bar{\beta}_1^k}{1-\bar{\beta}_1}[\rho\bar{\beta}_2+a(1-\bar{\beta}_1)]=$$
$$\rho\hat{y}^{(1)}(k+1)+a,\ k=1,2,\cdots,n-1,$$

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)=$$
$$\rho\hat{y}^{(1)}(k)+a-(\rho\hat{y}^{(1)}(k-1)+a)=\rho\hat{y}^{(0)}(k).\qquad\square$$

定理 4 $\hat{\beta}_3=\rho\bar{\beta}_3$.

证明

$$\hat{\beta}_3=\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\Big[x^{(1)}(k+1)-\hat{\beta}_1^k x^{(1)}(1)-\frac{1-\hat{\beta}_1^k}{1-\hat{\beta}_1}\hat{\beta}_2\Big]\hat{\beta}_1^k}{1+\sum_{k=1}^{n-1}(\hat{\beta}_1^k)^2}=$$
$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1}\Big[\rho y^{(1)}(k+1)+a-\bar{\beta}_1^k(\rho y^{(1)}(1)+a)-\frac{1-\bar{\beta}_1^k}{1-\bar{\beta}_1}(\rho\bar{\beta}_2+a-a\bar{\beta}_1)\Big]\bar{\beta}_1^k}{1+\sum_{k=1}^{n-1}(\bar{\beta}_1^k)^2}=\rho\bar{\beta}_3.\qquad\square$$

定理 5 设 $\hat{x}^{(1)}(k),\hat{y}^{(1)}(k)$ 分别为序列 $X^{(1)}$, $Y^{(1)}$ 的 DGOM 模型模拟值(预测值),则

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\rho\hat{y}^{(1)}(k)+a.$$

证明 由命题 5 可知

$$\hat{x}^{(1)}(1)=x^{(1)}(1)+\hat{\beta}_3=$$
$$\rho y^{(1)}(1)+a+\rho\bar{\beta}_3=\rho\hat{y}^{(1)}(1)+a,$$
$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\hat{\beta}_1^k\hat{x}^{(1)}(1)+\frac{1-\hat{\beta}_1^k}{1-\hat{\beta}_1}\hat{\beta}_2=$$
$$\bar{\beta}_1^k(\rho\hat{y}^{(1)}(1)+a)+\frac{1-\bar{\beta}_1^k}{1-\bar{\beta}_1}(\rho\bar{\beta}_2+a-a\bar{\beta}_1)=$$
$$\rho\hat{y}^{(1)}(k+1)+a,\ k=1,2,\cdots,n-1;$$
$$\hat{x}^{(0)}(k)=\rho\hat{y}^{(1)}(k)+a-(\rho\hat{y}^{(1)}(k-1)+a)=$$
$$\rho\hat{y}^{(0)}(k).\qquad\square$$

定理 6 若记 $\varepsilon(k)$ 与 $\bar{\varepsilon}(k)$ 分别为序列 $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ 的 DGM 模型或 DGOM 模型的相对误差,即

$$\varepsilon(k)=\frac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}\times 100\,\%,$$
$$\bar{\varepsilon}(k)=\frac{y^{(0)}(k)-\hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)}\times 100\,\%,$$

则有

$$\varepsilon(k)=\bar{\varepsilon}(k),\ k=2,3,\cdots,n.$$

证明 由定理 4 和定理 6 可得

$$\varepsilon(k)=\frac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)}\times 100\,\%=$$
$$\frac{\rho y^{(0)}(k)-\rho\hat{y}^{(0)}(k)}{\rho y^{(0)}(k)}\times 100\,\%=$$
$$\frac{y^{(0)}(k)-\hat{y}^{(0)}(k)}{y^{(0)}(k)}\times 100\,\%=\bar{\varepsilon}(k).\qquad\square$$

4 结 语

通过对离散灰色模型和离散灰色最优化模型的参数仿射特性研究,由定理 3,定理 5 和定理 6 可以得出如下结论:对累加生成序列作仿射变换后,所

求得的模拟预测值也保持相应的仿射变换量. 特殊地,令平移量为零时,对序列作数乘 ρ 倍变换,变换后所得的模型拟合值和预测值也相应变化 ρ 倍. 另外,不管仿射变换量的多少,对数据模拟预测值的相对误差都无影响. 因此,在建立离散灰色模型或离散灰色最优化模型的过程中,可根据计算量的大小、数据的实际意义等因素,预先对数据序列作仿射变换,缩小数据的量级,简化建模过程,而不会改变模型的模拟和预测效果.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 35-41.
(Deng Ju-long. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002: 35-41.)

[2] 邓聚龙. 灰预测与灰决策[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2002: 24-30.
(Deng Ju-long. Grey prediction and grey decision[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science & Technology, 2002: 24-30.)

[3] 刘思峰, 党耀国, 方志耕, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004: 103-110.
(Liu Si-feng, Dang Yao-guo, Fang Zhi-geng. Grey system theory and its application [M]. Beijing: Science Press, 2004: 103-110.)

[4] Deng Ju-long. Introduction to grey system theory[J]. The J of Grey System, 1989, 1(1): 1-24.

[5] Lin Yi, Liu Si-feng. A systemic analysis with data (II) [J]. Int J of General Systems, 2000, 29(6): 1001-1013.

[6] Liu Si-feng, Forrest J. The role and position of grey system theory in science development[J]. The J of Grey System, 1997, 9(4): 351-356.

[7] 穆勇. 优化灰导数白化值的无偏灰色 GM(1,1) 模型[J]. 数学的实践与认识, 2003, 33(3): 13-16.
(Mu Yong. An unbiased GM(1,1) model with optimum grey derivatives whitening values[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2003, 33(3): 13-16.)

[8] 王义闹, 刘开第. 优化灰导数白化值的 GM(1,1) 建模法[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 124-128.
(Wang Yi-nao, Liu Kai-di. GM(1,1) modeling method of optimum the whiting values of grey derivative[J]. Systems Engineering Theory & Practic, 2001, 21(5): 124-128.)

[9] 宋中民, 同小军, 肖新平. 中心逼近式灰色 GM(1,1) 模型[J]. 系统工程理论与实践, 2001, 21(5): 110-113.
(Song Zhong-min, Tong Xiao-jun, Xiao Xin-ping. Center approach grey GM(1,1) model[J]. Systems Engineering Theory & Practic, 2001, 21(5): 110-113.)

[10] 谭冠军. GM(1,1) 模型的背景值构造方法和应用[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(4): 99-103.
(Tan Guan-jun. The structure method and application of back- ground valuein grey system GM(1,1) model [J]. Systems Engineering Theory & Practic, 2000, 20(4): 99-103.)

[11] Liu Bin, Liu Si-feng, Zhai Zhen-jie, et al. Optimum time response sequence for GM(1,1)[J]. Chinese J of Management Science, 2003, 11(4): 54-57.

[12] Luo Dang, Liu Si-feng, Dang Yao-guo. The optimization of grey model GM(1,1)[J]. Chinese Engineering Science, 2003, 5(8): 50-53..

[13] 张辉, 胡适耕. GM(1,1) 模型的精确解法[J]. 系统工程理论方法应用, 2001, 10(1): 72-74.
(Zhang Hui, Hu Shi-geng. Accurate solutioon for GM(1,1) model[J]. Systems Engineering - Theory Methodology and Applications, 2001, 10(1): 72-74.)

[14] 肖新平, 邓聚龙. 数乘变换下 GM(0,N) 模型中的参数特征[J]. 系统工程与电子技术, 2000, 22(10): 1-3.
(Xiao Xin-ping, Deng Ju-long. Parameter characteristics of GM(0,N) model under multiple transformation [J]. Systems Engineering and Electronic, 2000, 22(10): 1-3.)

[15] 谢乃明, 刘思峰. 离散 GM(1,1) 模型与灰色预测模型建模机理[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(1): 93-98.
(Xie Nai-ming. Liu Si-feng. Discrete GM(1,1) and mechanism of grey forecasting model[J]. Systems Engineering Theory & Practice, 2005, 25(1): 93-98.)

(上接第 199 页)

[9] Deng Z L, Li C B. Self-tuning information Kalman predictor weighted by scalars[C]. Proc of the 6th Congress on Intelligent Control and Automation. 大连, 2006, 2: 1487-1491.

[10] 陈传璋. 数学分析[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1962.
(Chen Chuan-zhang. Mathematical analysis[M]. Shanghai: Shanghai Science and Technique Press, 1962.)